S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, стр. 1–1 (2022) УДК 512.53, 512.58,

DOI 10.17377/semi.2017.14.xxx MSC 20M30, 18M05

О ПРОСТРАНСТВАХ ЧУ НАД КАТЕГОРИЕЙ $SS - Act$

Е.Е. Скурихин, А.А. Степанова, А.Г. Сухонос[1]

Abstract. We prove the general properties of morphisms of Chu spaces and functors with a value in the category of Chu spaces. As a consequence, the existence of coproducts and some products is proved; monomorphisms and epimorphisms of $Chu(SS - Act)$ and $Chu(SS - Act, D)$ categories of Chu spaces over $SS - Act$ category are characterized; characteristics of separable and complete separable Chu spaces are given.

Keywords: Cartesian Closed Category, S-Act, Chu spaces, limits of functors.

1. Введение

Конструкция Чу [1, 2], позволяющая по заданной симметрической моноидальной замкнутой категории и фиксированному объекту в ней построить новую категорию с дополнительными свойствами, привела к формированию понятия пространства Чу и появления целых направлений исследования категорий пространств Чу и свойств выделенных объектов и морфизмов. Если $\mathcal{V}$ категория, $\otimes : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}$ функтор, рассматриваемый как произведение на категории $\mathcal{V}$, то пространством Чу над $\mathcal{V}$ называется любой морфизм $r : A \otimes X \longrightarrow D$ категории $\mathcal{V}$, где $A, X, D \in Ob(\mathcal{V})$. Категория $Chu(\mathcal{V}, D)$, где D фиксированный объект $\mathcal{V}$, определяется так [2, 6]: объекты её — это пространства Чу $r : A \otimes X \longrightarrow D$, а морфизмом из r в $r' : A' \otimes X' \to D$ является произвольная пара (f, g) морфизмов $f : A \to A'$, $g : X' \to X$ категории $\mathcal{V}$ такая, что $r \circ (1_A \otimes g) = r' \circ (f \otimes 1_{X'})$.

E.E. Skurikhin, A. A. Stepanova, A.G. Sukhonos. On Chu spaces over $SS - Act$ category.

The research was funded by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (agreement No. 075-02-2022-880).

Received November, 27, 2022, published December, 1, 2022.

В работе [7] введена категория $Chu(\mathcal{V})$, объекты которой — это всевозможные пространства Чу $r : A \otimes X \longrightarrow D$, а морфизмом из r в $r' : A' \otimes X' \to D'$ является произвольная тройка (f, g, h) морфизмов $f : A \to A'$, $g : X' \to X$, $h : D \to D'$ категории $\mathcal{V}$ такая, что $h \circ r \circ (1_A \otimes g) = r' \circ (f \otimes 1_{X'})$. В работах [7, 9] обе эти категории изучались для случая, когда $\mathcal{V} = S - Act$ — категория S-полигонов, где S — коммутативный моноид, а произведением является тензорное произведение. В предлагаемой работе в качестве $\mathcal{V}$ рассматривается категория $SS - Act$, введённая в работе [10], а качестве произведения в этой категории рассматривается декартово произведение. Категория $SS - Act$ декартово замкнута, кроме того, функтор вложения $S - Act \to SS - Act$ обладает сопряжённым слева. Используя это, мы доказываем общие свойства морфизмов пространств Чу и функторов со значением в категории пространств Чу. В качестве следствий доказывается существование копроизведений, некоторых произведений, характеризуются мономорфизмы и эпиморфизмы категорий $Chu(SS - Act)$ и $Chu(SS - Act, D)$, даются характеристики отделимых и полных отделимых пространств Чу.

2. Предварительные сведения

Пусть S — моноид, 1 — единица моноида S. Левым S-полигоном, или просто полигоном называется множество A, на котором зафиксировано левое действие моноида S, т.е. такое отображение $(s, a) \mapsto sa$ множества $S \times A$ в A, что для любых $a \in A$ и $s, t \in S$, $1a = a$ и $s(ta) = (st)a$. Отображение $f : A \longrightarrow B$ называется гомоморфизмом S-полигонов, если для любых $a \in A$, $s \in S$, $f(sa) = sf(a)$ [3, 4].

Категория, объектами которой являются полигоны, морфизмами — гомоморфизмы полигонов, а композиция 2 морфизмов определяется как суперпозиция соответствующих отображений, обозначается $S-Act$, так что $Ob(S-Act)$ это класс всех S-полигонов, $Hom_{S-Act}(A, B)$ — это множество всех гомоморфизмов из полигона A в полигон B. Единицами категории $S - Act$ являются тождественные отображения $1_A \in Hom_{S-Act}(A, A)$.

Категория $SS-Act$ определяется следующим образом [10]. Объекты её — это S-полигоны, морфизмом из A в B называется любой гомоморфизм S-полигонов $u : S \times A \to Hom_{S-Act}(A, B)$. Таким образом,

$$Ob(SS - Act) = Ob(S - Act), \ \ Hom_{SS-Act}(A, B) = Hom_{S-Act}(S \times A, B).$$

Если $u \in Hom_{SS-Act}(A, B)$, $v \in Hom_{SS-Act}(B, C)$, то их композиция $v \cdot u \in Hom_{SS-Act}(A, C)$ определяется равенством

$$(v \cdot u)(s, a){=}v(s, u(s, a)).$$

Единицами категории $SS - Act$ являются морфизмы $e_A \in Hom_{SS-Act}(A, A)$, где $e_A(s, a) = a$.

В категории $SS - Act$ имеются произведения и копроизведения [10].

Утверждение 1. *1) Произведением полигонов A_i $(i \in I)$ в категории $SS-Act$ является полигон $\prod\limits_{i \in I} A_i$ вместе с морфизмами $p_i \in Hom_{SS-Act}(\prod\limits_{i \in I} A_i, A_i)$, задаваемыми равенствами $p_i(s, a) = a(i)$ для любых $a \in \prod\limits_{i \in I} A_i$, $i \in I$.*

2) Копроизведением полигонов A_i $(i \in I)$ в категории $SS-Act$ является полигон $\coprod\limits_{i\in I} A_i$ вместе с морфизмами $q_i \in Hom_{SS-Act}(A_i, \coprod\limits_{i\in I} A_i)$, задаваемыми равенствами $q_i(s,a_i) = a_i$ для любых $a_i \in A_i$, $i \in I$.

Пространством Чу над категорией $SS-Act$ называется набор (A,X,D,r), где $A,X,D \in Ob(SS-Act)$, $r \in Hom_{SS-Act}(A\times X, D)$. Если это не приводит к недоразумениям, будем сокращать обозначение пространства Чу (A,X,D,r) до $r \in Hom_{SS-Act}(A\times X,D)$. В соответствии с общими определениями, категория $Chu(SS-Act)$ задаётся так. Пусть $r \in Hom_{SS-Act}(A\times X,D)$, $r' \in Hom_{SS-Act}(A'\times X', D')$. Морфизмом или преобразованием Чу r в r' называется тройка (f,g,h) морфизмов $f \in Hom_{SS-Act}(A,A')$, $g\in Hom_{SS-Act}(X',X)$, $h \in Hom_{SS-Act}(D,D')$, если она удовлетворяет условию

$$h\cdot r\cdot(e_A\times g) = r'\cdot(f\times e_{X'}).$$

Будем писать в этом случае $(f,g,h): r\to r'$.

Если $(f',g',h'): r'\to r''$, то композиция преобразований Чу определяется следующим образом:

$$(f',g',h')\circ(f,g,h) = (f'\cdot f, g\cdot g', h'\cdot h): r\to r''.$$

3. Основная лемма

Если $u: S\times A\to B$ гомоморфизм полигонов, то отображение $tu: S\times A\to B$, задаваемое равенством $(tu)(s,a) = u(st,a)$, также является гомоморфизмом, так что множество $Hom_{SS-Act}(A,B)$ наделяется структурой S-полигона. По аналогии с отображениями множеств введем обозначение:

$$Hom_{SS-Act}(A,B) = B^A.$$

В работе [10] доказано, что категория $SS-Act$ декартово замкнута, т.е. функторы $Hom_{SS-Act}(\bullet\times\bullet,\bullet)$ и $Hom_{SS-Act}(\bullet,\mathcal{H}^{SS}(\bullet,\bullet))$ изоморфны для некоторого функтора

$$\mathcal{H}^{SS}: (SS-Act)^o\times(SS-Act)\to SS-Act.$$

Функтор $\mathcal{H}^{SS}$ определяется так. Если $A,B,A',B' \in Ob(SS-Act)$, $f\in Hom_{SS-Act}(A',A)$, $g\in Hom_{SS-Act}(B,B')$, то

$$\mathcal{H}^{SS}(A,B) = B^A = Hom_{SS-Act}(A,B),$$

отображение

$$g^f = \mathcal{H}^{SS}(f,g) \in Hom_{SS-Act}(B^A, B'^{A'})$$

задаётся равенством $g^f(s,w) = \mathcal{H}^{SS}(f,g)(s,w) = (sg)\cdot w\cdot(sf)$, если $(s,w)\in S\times B^A$.

Обозначим через $p_{A,X,D}: Hom_{SS-Act}(A\times X,D)\to Hom_{SS-Act}(A,D^X)$ отображение такое, что

$$((p_{A,X,D}(r))(s,a))(t,x) = r(ts,(ta,x)),$$

где $r\in Hom_{SS-Act}(A\times X,D)$, $s,t\in S$, $a\in A$, $x\in X$.

В работе [10] доказано, что каждое отображение $p_{A,X,D}$ биективно и для любых $v\in Hom_{SS-Act}(A',A)$, $g\in Hom_{SS-Act}(X',X)$, $h\in Hom_{SS-Act}(D,D')$, любого $r\in Hom_{SS-Act}(A\times X,D)$ выполняется равенство

$$(*)\qquad p_{A',X',D'}(h\cdot r\cdot(v\times g)) = h^g\cdot p_{A,X,D}(r)\cdot v,$$

и это означает, что семейство отображений

$$P^{SS} = \{p_{A,X,D} \mid A, X, D \in Ob(SS - Act)\}$$

является изоморфизмом функторов

$$P^{SS} : Hom_{SS-Act}(\bullet \times \bullet, \bullet) \to Hom_{SS-Act}(\bullet, \mathcal{H}^{SS}(\bullet, \bullet)).$$

Соотношение $(*)$ эквивалентно

$(**)$ $p_{A,X',D'}(h \cdot r \cdot (e_A \times g)) = h^g \cdot p_{A,X,D}(r)$ и $p_{A',X,D}(r \cdot (v \times e_X)) = p_{A,X,D}(r) \cdot v$.

Для $r \in Hom_{SS-Act}(A \times X, D)$ введем обозначение:

$$\hat{r} = p_{A,X,D}(r).$$

Будем также обозначать через $r_{XD} \in Hom_{SS-Act}(D^X \times X, D)$ пространство Чу, задаваемое равенством

$$p_{D^X,X,D}(r_{XD}) = \widehat{r_{XD}} = e_{D^X},$$

где $e_{D^X} : S \times D^X \to D^X$ — единица категории $SS - Act$. Отметим, что $\hat{r} \in Hom_{SS-Act}(A, D^X)$.

Лемма 1. *(Основная лемма)*

1) Пусть $f \in Hom_{SS-Act}(A, A')$, $g \in Hom_{SS-Act}(X', X)$, $h \in Hom_{SS-Act}(D, D')$, $r \in Hom_{SS-Act}(A \times X, D)$, $r' \in Hom_{SS-Act}(A' \times X', D')$. *Тогда*

(a)

$(f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r') \Leftrightarrow h^g \cdot p_{A,X,D}(r) = p_{A',X',D'}(r') \cdot f \Leftrightarrow h^g \cdot \hat{r} = \hat{r'} \cdot f;$

(b) $$(h^g, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{XD}, r_{X'D'});$$

(c) $$(\hat{r}, e_X, e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{XD});$$

(d) $$(f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{X'D'}) \Leftrightarrow f = h^g \cdot p_{A,X,D}(r) \Leftrightarrow f = h^g \cdot \hat{r},$$

при этом

(e) $$(f, g, h) = (h^g, g, h) \circ (\hat{r}, e_X, e_D).$$

2) Для любого $w \in Hom_{SS-Act}(A, D^X)$

$$p_{A,X,D}(r_{XD} \cdot (w \times e_X)) = w.$$

3) Имеет место равенство

(f) $$r = r_{XD} \cdot (\hat{r} \times e_X)$$

и, если $w \in Hom_{SS-Act}(A, D^X)$ *и* $r = r_{XD} \cdot (w \times e_X)$, *то* $w = \hat{r}$.

4) Для любого $w \in Hom_{SS-Act}(A, D^X)$ *следующие условия эквивалентны для любого:*

(g) $$p_{A,X,D}(r) = w;$$

(h) $$(w, e_X, e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{XD});$$

(i) $$r = r_{XD} \cdot (w \times e_X).$$

Доказательство. Докажем 1).

(a) По определению морфизмов пространств Чу,

$$(f,g,h)\in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r')\Leftrightarrow h\cdot r\cdot(e_A\times g)=r'\cdot(f\times e_{X'}).$$

Так как отображение $p_{A,X',D'}$ биективно, то

$$h\cdot r\cdot(e_A\times g)=r'\cdot(f\times e_{X'})\Leftrightarrow p_{A,X',D'}(h\cdot r\cdot(e_A\times g))=p_{A,X',D'}(r'\cdot(f\times e_{X'})).$$

В силу соотношения $(**)$

$$p_{A,X',D'}(h\cdot r\cdot(e_A\times g))=h^g\cdot p_{A,X,D}(r)=h^g\cdot\hat{r},$$
$$p_{A,X',D'}(r'\cdot(f\times e_{X'}))=p_{A',X',D'}(r')\cdot f=\hat{r'}\cdot f,$$

откуда и получается нужный результат.

(b) Так как $p_{X^D,X,D}(r_{XD})=e_{D^X}$ и $p_{D'^{X'},X',D'}(r_{X'D'})=e_{D'^{X'}}$, то применяя (a) получаем

$$(f,g,h)\in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{XD},r_{X'D'})\Leftrightarrow h^g\cdot p_{D^X,X,D}(r_{XD})=p_{D'^{X'},X',D'}(r_{X'D'})\cdot f\Leftrightarrow h^g=f.$$

(c) По (a) имеем

$$(f,e_X,e_D)\in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r_{XD})\Leftrightarrow p_{A,X,D}(r)=p_{D^X,S,D}(r_{XD})\cdot f\Leftrightarrow\hat{r}=f.$$

(d), (e) Так как $p_{D'^{X'},X',D'}(r_{X'D'})=e_{D'^{X'}}$, то применяя (a) получаем

$$(f,g,h)\in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r_{X'D'})\Leftrightarrow h^g\cdot p_{A,X,D}(r)=p_{A',X',D'}(r_{X'D'})\cdot f\Leftrightarrow h^g\cdot p_{A,X,D}(r)=f.$$

По (b) и (c) $(h^g,g,h)\in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{XD},r_{X',D'})$, $(\hat{r},e_X,e_D)\in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r_{XD})$, следовательно,

$$(h^g,g,h)\circ(\hat{r},e_X,e_D)=(h^g\cdot\hat{r},g\cdot e_X,e_D\cdot h)=(f,g,h).$$

Докажем 2). В силу соотношения $(**)$ $p_{A',X,D}(r\cdot(v\times e_X))=p_{A,X,D}(r)\cdot v$, где $v\in Hom_{SS-Act}(A',A)$. Полагая $v=w\in Hom_{SS-Act}(A,D^X)$ и $r=r_{XD}$ получаем

$$p_{A,X,D}(r_{XD}\cdot(w\times e_X))=p_{D^X,X,D}(r_{XD})\cdot w=w.$$

Докажем 3). Пусть $r\in Hom_{SS-Act}(A\times X,D)$. Полагая в 2) $w=p_{A,X,D}(r)=\hat{r}$ получаем $p_{A,X,D}(r_{XD}\cdot(\hat{r}\times e_X))=\hat{r}=p_{A,X,D}(r)$. Так как $p_{A,X,D}$ инъективное отображение, то $r_{XD}\cdot(\hat{r}\times e_X)=r$.

Если $r_{XD}\cdot(w\times e_X)=r_{XD}\cdot(\hat{r}\times e_X)$ для некоторого $w\in Hom_{SS-Act}(A,D^X)$, то в силу 2) получаем

$$w=p_{A,X,D}(r_{XD}\cdot(w\times e_X))=p_{A,X,D}(r_{XD}\cdot(\hat{r}\times e_X))=\hat{r}.$$

Докажем 4). Эквивалентность условий (g) и (i) доказана в 2), а эквивалентность условий (g) и (h) проверено при доказательстве соотношения (c). □

4. Мономорфизмы и эпиморфизмы в категории $Chu(SS-Act)$

Нам понадобятся следующие результаты, доказанные в работе [10].

Утверждение 2. *Пусть $u:S\times A\to B$ — морфизм категории $S-Act$. Следующие условия эквивалентны:*

1) u является эпиморфизмом категории $SS-Act$;

2) для каждого $s\in S$ отображение $u_s:A\to B$, задаваемое равенством $u_s(a)=u(s,a)$, сюрьективно;

3) отображение $\bar{u}:S\times A\to S\times B$, задаваемое равенством $\bar{u}(s,a)=(s,u(s,a))$, является эпиморфизмом категории $S-Act$.

Утверждение 3. *Пусть* $u : S \times A \to B$ *— морфизм категории* $S - Act$ *и для каждого* $s \in S$ *отображение* $u_s : A \to B$*, задаваемое равенством* $u_s(a) = u(s,a)$*, инъективно. Тогда* u *является мономорфизмом категории* $SS - Act$*.*

Приведем характеризацию эпиморфизмов и мономорфизмов категории $Chu(SS-Act)$.

Теорема 1. *Пусть* $r \in Hom_{SS-Act}(A \times X, D)$ *и* $r' \in Hom_{SS-Act}(A' \times X', D')$*. Морфизм* $(f,g,h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r')$ *является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда* $f \in Hom_{SS-Act}(A,A')$ *— эпиморфизм,* $g \in Hom_{SS-Act}(X',X)$ *– мономорфизм и* $h \in Hom_{SS-Act}(D,D')$ *— эпиморфизм.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $(f,g,h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r')$ — эпиморфизм.

Покажем, что f — эпиморфизм категории $SS-Act$. Пусть $f_1, f_2 \in Hom_{SS-Act}(A',E)$ такие, что $f_1 \cdot f = f_2 \cdot f$. Необходимо показать, что $f_1 = f_2$. Определим $w \in Hom_{SS-Act}((E \times A') \times X', D')$ и $(f_1', e_{X'}, e_{D'}), (f_2', e_{X'}, e_{D'}) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r', w)$ следующим образом: $w(s,((e,a'),x')) = r'(s,(a',x'))$, $f_1'(s,a') = (f_1(s,a'),a')$, $f_2'(s,a') = (f_2(s,a'),a')$, где $s \in S$, $a' \in A'$, $x' \in X'$, $e \in E$. Корректность определения морфизмов $(f_1', e_{X'}, e_{D'})$, $(f_2', e_{X'}, e_{D'})$ следует из равенств:

$$e_{D'}(s, r'(s,(a', e_{X'}(s,x')))) = r'(s,(a',x')) = w(s,((f_1(s,a'),a'),x')) =$$

$$= w(s,((f_2(s,a'),a'),x')) = w(s,(f_1'(s,a'),x')) = w(s,(f_2'(s,a'),x')),$$

где $s \in S$, $a' \in A'$, $x' \in X'$. Покажем, что $f_1' \cdot f = f_2' \cdot f$. Действительно,

$$(f_1' \cdot f)(s,a) = f_1'(s,(f(s,a))) = (f_1(s,f(s,a)), f(s,a)) = ((f_1 \cdot f)(s,a), f(s,a)) =$$

$$= ((f_2 \cdot f)(s,a), f(s,a)) = (f_2(s,f(s,a)), f(s,a)) = f_2'(s,(f(s,a))) = (f_2' \cdot f)(s,a),$$

где $s \in S$, $a \in A$. Следовательно, $(f_1', e_{X'}, e_{D'}) \cdot (f,g,h) = (f_2', e_{X'}, e_{D'}) \cdot (f,g,h)$. Поскольку (f,g,h) — эпиморфизм категории $Chu(SS-Act)$, то $f_1' = f_2'$ и значит $f_1 = f_2$ и f — эпиморфизм категории $SS - Act$.

Покажем, что h — эпиморфизм категории $SS-Act$. По утверждению 2 достаточно показать, что морфизм $\bar{h} : S \times D \to S \times D'$ категории $S - Act$ является эпиморфизмом, где $\bar{h}$ определяется следующим образом: $\bar{h}(s,d) = (s, h(s,d))$ для любых $s \in S$, $d \in D$. Предположим, что $D_1' \neq S \times D'$, где $D_1' = \bar{h}(S \times D)$. Через D_0' обозначим фактор-полигон полигона $S \times D'$ по конгруэнции Риса $\rho_{D_1'}$. Определим $w \in Hom_{SS-Act}(\Theta \times X', D_0')$ и $(f', e_{X'}, h_1)$, $(f', e_{X'}, h_2) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r', w)$ следующим образом: $w(s,(\theta,x')) = D_1'$, $f'(s,a') = \theta$, $h_1(s,d') = D_1'$, $h_2(s,d') = (s,d')/\rho_{D_1'}$, где $s \in S$, $a' \in A'$, $x' \in X'$, $d' \in D'$. Ясно, что $h_1 \neq h_2$. Корректность определения морфизма $(f', e_{X'}, h_1)$ следует из равенств

$$h_1(s, r'(s,(a', e_{X'}(s,x')))) = D_1' = w(s,(f'(s,a'),x')),$$

где $s \in S$, $a' \in A'$, $x' \in X'$. Покажем корректность определения морфизма $(f', e_{X'}, h_2)$. Пусть $s \in S$, $a' \in A'$, $x' \in X'$. Поскольку f — эпиморфизм, то по утверждению [10] отображение f_s, задаваемое равенством $f_s(a) = f(s,a)$ для любого $a \in A$, сюръективно. Поэтому $a' = f(s,a)$ для некоторого $a \in A$. Так как (f,g,h) — морфизм категории $Chu(SS - Act)$, то $r'(s,(a',x')) = r'(s,(f(s,a),x')) = h(s, r(s,(a, g(s,x'))))$. Тогда

$$(s, r'(s,(a',x'))) = (s, h(s, r(s,(a, g(s,x'))))) = \bar{h}(s, r(s,(a, g(s,x')))) \in D'_1.$$

Следовательно,

$$h_2(s, r'(s,(a', e_{X'}(s, x')))) = h_2(s, r'(s,(a', x'))) = D'_1 = w(s,(f'(s, a'), x'),$$

т.е. морфизм $(f', e_{X'}, h_2)$ определен корректно. Поскольку $(s, h(s, d)) = \bar{h}(s, d) \in D'_1$ для любого $d \in D$, то

$$(h_1 \cdot h)(s, d) = h_1(s, h(s, d)) = D'_1 = (s, h(s, d))/\rho_{D'_1} =$$

$$= h_2(s, h(s, d)) = (h_2 \cdot h)(s, d),$$

т.е. $h_1 \cdot h = h_2 \cdot h$. Следовательно, $(f', e_{X'}, h_1) \cdot (f, g, h) = (f', e_{X'}, h_2) \cdot (f, g, h)$. Поскольку (f, g, h) — эпиморфизм категории $Chu(SS-Act)$, то $h_1 = h_2$. Противоречие. Следовательно, h — эпиморфизм категории $SS-Act$.

Покажем, что g — мономорфизм категории $SS-Act$. Пусть $g_1, g_2 \in Hom_{SS-Act}(Z, X')$ такие, что $g \cdot g_1 = g \cdot g_2$. Необходимо показать, что $g_1 = g_2$. Пусть $s \in S$, $a' \in A'$, $z \in Z$. Покажем, что $r'(s,(a', g_1(s, z))) = r'(s,(a', g_2(s, z)))$. Поскольку f — эпиморфизм категории $SS-Act$, то по утверждению 2 отображение f_s является эпиморфизмом. Следовательно, $a' = f(s, a)$ для некоторого $a \in A$. Тогда

$$r'(s,(a', g_1(s, z))) = r'(s,(f(s, a), g_1(s, z))) = h(s, r(s,(a, g(s, g_1(s, z))))) =$$

$$= h(s, r(s,(a,(g \cdot g_1)(s, z)))) = h(s, r(s,(a,(g \cdot g_2)(s, z)))) =$$

$$= h(s, r(s,(a, g(s, g_2(s, z))))) = r'(s,(f(s, a), g_2(s, z))) = r'(s,(a', g_2(s, z))),$$

т.е. $r'(s,(a', g_1(s, z))) = r'(s,(a', g_2(s, z)))$. Определим $w \in Hom_{SS-Act}(A' \times Z, D')$ следующим образом: $w(s,(a', z)) = r'(s,(a', g_1(s, z)))$. Покажем, что $(e_{A'}, g_1, e_{D'}), (e_{A'}, g_2, e_{D'}) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r', w)$. Действительно,

$$e_{D'}(s, r'(s,(a', g_2(s, z)))) = r'(s,(a', g_2(s, z))) = r'(s,(a', g_1(s, z))) =$$

$$= e_{D'}(s, r'(s,(a', g_1(s, z)))) = w(s,(a', z)),$$

где $s \in S$, $a' \in A'$, $z \in Z$. Поскольку $g \cdot g_1 = g \cdot g_2$, то $(f, g, h) \cdot (e_{A'}, g_1, e_{D'}) = (f, g, h) \cdot (e_{A'}, g_2, e_{D'})$. Поскольку (f, g, h) — эпиморфизм категории $Chu(SS-Act)$, то $g_1 = g_2$.

Достаточность. Пусть $(f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r')$, где f и h – эпиморфизмы, g — мономорфизм категории $SS-Act$. Пусть $w \in Ob(Chu(SS-Act))$ и (f_1, g_1, h_1), $(f_1, g_1, h_1) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r', w)$ такие, что $(f_1, g_1, h_1) \cdot (f, g, h) = (f_2, g_2, h_2) \cdot (f, g, h)$. Тогда $f_1 \cdot f = f_2 \cdot f$, $g \cdot g_1 = g \cdot g_2$ и $h_1 \cdot h = h_2 \cdot h$. Поскольку f и h — эпиморфизмы категории $SS-Act$, то $f_1 = f_2$ и $h_1 = h_2$; поскольку g — мономорфизм категории $SS-Act$, то $g_1 = g_2$, т.е. $(f_1, g_1, h_1) = (f_2, g_2, h_2)$. Следовательно, морфизм $(f, g, h) : r \to r'$ является эпиморфизмом категории $Chu(SS-Act)$. □

Из доказательства теоремы 1 получаем

Следствие 1. *Пусть $r \in Hom_{SS-Act,D}(A \times X, D)$ и $r' \in Hom_{SS-Act}(A' \times X', D)$. Морфизм $(f, g) \in Hom_{Chu(SS-Act,D)}(r, r')$ является эпиморфизмом тогда и только тогда, когда $f \in Hom_{SS-Act}(A, A')$ — эпиморфизм и $g \in Hom_{SS-Act}(X', X)$ – мономорфизм.*

Теорема 2. *Пусть $r \in Hom_{SS-Act}(A \times X, D)$ и $r' \in Hom_{SS-Act}(A' \times X', D')$. Морфизм $(f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r')$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $f \in Hom_{SS-Act}(A, A')$ — мономорфизм, $g \in Hom_{SS-Act}(X', X)$ – эпиморфизм и $h \in Hom_{SS-Act}(D, D')$ — мономорфизм.*

Доказательство. **Необходимость.** Пусть $(f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r')$ — мономорфизм.

Покажем, что h — мономорфизм категории $SS-Act$. Пусть $h_1, h_2 \in Hom_{SS-Act}(E, D)$ такие, что $h \cdot h_1 = h \cdot h_2$. Необходимо показать, что $h_1 = h_2$. Определим $w \in Hom_{SS-Act}(A \times X, E \sqcup D)$ и $(e_A, e_X, h'_1), (e_A, e_X, h'_2) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(w, r)$ следующим образом: $w(s,(a,x)) = r(s,(a,x))$, $h'_1(s,e) = h_1(s,e)$, $h'_2(s,e) = h_2(s,e)$, $h_1(s,d) = h_2(s,d) = d$ для любых $s \in S$, $a \in A$, $x \in X$, $e \in E$, $d \in D$. Корректность определения морфизмов (e_A, e_X, h'_1), (e_A, e_X, h'_2) следует из равенств:

$$h'_1(s, w(s,(a, e_X(s,x)))) = h'_2(s, w(s,(a, e_X(s,x)))) =$$

$$= w(s,(a,x)) = r(s,(a,x)) = r(s,(e_A(s,a),x)),$$

где $s \in S$, $a \in A$, $x \in X$. Так как $h \cdot h_1 = h \cdot h_2$, то $(f,g,h)\cdot(e_A, e_X, h'_1) = (f,g,h)\cdot(e_A, e_X, h'_2)$. Поскольку (f,g,h) — мономорфизм категории $Chu(SS-Act)$, то $h'_1 = h'_2$. Следовательно, $h_1 = h_2$.

Покажем, что g — эпиморфизм категории $SS-Act$. По утверждению 2 достаточно показать, что морфизм $\bar{g} : S \times X' \to S \times X$ категории $S-Act$ является эпиморфизмом, где $\bar{g}$ определяется следующим образом: $\bar{g}(s,x') = (s, g(s,x'))$ для любых $s \in S$, $x' \in X'$. Предположим, что $X_1 \neq S \times X$, где $X_1 = \bar{g}(S \times X')$. Через X_0 обозначим фактор-полигон полигона $S \times X$ по конгруэнции Риса ρ_{X_1}. Определим $w \in Hom_{SS-Act}(A \times (X_0 \times X), D)$ и (e_A, g_1, e_D), $(e_A, g_2, e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(w, r)$ следующим образом: $w(s,(a,(x_0,x))) = r(s,(a,x))$, $g_1(s,x) = (X_1, x)$, $g_2(s,x) = ((s,x)/\rho_{X_1}, x)$, где $s \in S$, $a \in A$, $x \in X$, $x_0 \in X_0$. Ясно, что $g_1 \neq g_2$. Из определения пространства Чу w следуют равенства

$$e_D(s, w(s,(a, g_1(s,x)))) = e_D(w(s,(a, g_2(s,x)))) = r(s,(a,x)) = r(s,(e_A(s,a),x)),$$

где $s \in S$, $a \in A$, $x \in X$, что доказывает корректность определения морфизмов (e_A, g_1, e_D), (e_A, g_2, e_D). Покажем, что $g_1 \cdot g = g_2 \cdot g$. Действительно,

$$(g_1 \cdot g)(s,x') = g_1(s, g(s,x')) = (X_1, g(s,x')) = (\bar{g}(s,x')/\rho_{X_1}, g(s,x')) =$$

$$= ((s, g(s,x'))/\rho_{X_1}, g(s,x')) = g_2(s, g(s,x')) = (g_2 \cdot g)(s,x')$$

для любых $s \in S$, $x' \in X'$. Тогда $(f,g,h)\cdot(e_A, g_1, e_D) = (f,g,h)\cdot(e_A, g_2, e_D)$. Поскольку (f,g,h) — мономорфизм категории $Chu(SS-Act)$, то $g_1 = g_2$. Противоречие. Следовательно, g — эпиморфизм категории $SS-Act$.

Покажем, что f — мономорфизм категории $SS-Act$. Пусть $f_1, f_2 \in Hom_{SS-Act}(E, A)$ такие, что $f \cdot f_1 = f \cdot f_2$. Необходимо показать, что $f_1 = f_2$. Определим $r_1, r_2 \in Hom_{SS-Act}(E \times X', D)$ следующим образом: $r_1(s,(e,x')) = r(s,(f_1(s,e), g(s,x')))$, $r_2(s,(e,x')) = r(s,(f_2(s,e), g(s,x')))$ для любых $x' \in X'$, $s \in S$, $e \in E$. Поскольку $(f,g,h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r')$, то

$$(h \cdot r_1)(s,(e,x')) = h(s, r_1(s,(e,x'))) = h(s, r(s,(f_1(s,e), g(s,x')))) =$$

$$= r'(s,(f(s, f_1(s,e)), x')) = r'(s,((f \cdot f_1)(s,e), x'))$$

для любых $x' \in X'$, $s \in S$, $e \in E$. Аналогично, $(h \cdot r_2)(s,(e,x')) = r'(s,((f \cdot f_2)(s,e)), x')$ для любых $x' \in X'$, $s \in S$, $e \in E$. Так как $f \cdot f_1 = f \cdot f_2$, то $(h \cdot r_1)(s,(e,x')) = (h \cdot r_2)(s,(e,x'))$, т.е. $h \cdot r_1 = h \cdot r_2$. Морфизм h является мономорфизмом категории $SS-Act$. Следовательно, $r_1 = r_2$, т.е.

$$r(s,(f_1(s,e), g(s,x'))) = r(s,(f_2(s,e), g(s,x')))$$

для любых $x' \in X'$, $s \in S$, $e \in E$. Пусть $x \in X$, $s \in S$, $e \in E$. Покажем, что $r(s,(f_1(s,e),x)) = r(s,(f_2(s,e),x))$. Так как g — эпиморфизм категории $SS - Act$, то по утверждению 2 g_s — сюръекция и $x = g(s,x')$ для некоторого $x' \in X'$. Тогда

$$r(s,(f_1(s,e),x)) = r(s,(f_1(s,e),g(s,x'))) =$$
$$= r(s,(f_2(s,e),g(s,x'))) = r(s,(f_2(s,e),x)).$$

Определим $w \in Hom_{SS-Act}(E\times X, D)$ следующим образом: $w(s,(e,x)) = r(s,(f_1(s,e),x))$. Покажем, что $(f_1,e_X,e_D),(f_2,e_X,e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(w,r)$. Действительно,

$$r(s,(f_2(s,e),x)) = r(s,(f_1(s,e),x)) = w(s,(e,x)) = e_D(s,w(s,(e,e_X(s,x)))).$$

Ясно, что $(f,g,h)\cdot(f_1,e_X,e_D) = (f,g,h)\cdot(f_2,e_X,e_D)$. Поскольку (f,g,h) — мономорфизм категории $Chu(SS - Act)$, то $f_1 = f_2$.

Достаточность. Пусть $(f,g,h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r')$, где f и h — мономорфизмы, g — эпиморфизм категории $SS - Act$. Предположим, что пространство Чу w и (f_1,g_1,h_1), $(f_1,g_1,h_1) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(w,r)$ такие, что $(f,g,h)\cdot(f_1,g_1,h_1) = (f,g,h)\cdot(f_2,g_2,h_2)$. Тогда $f\cdot f_1 = f\cdot f_2$, $g_1\cdot g = g_2\cdot g$ и $h\cdot h_1 = h\cdot h_2$. Поскольку f и h — мономорфизмы категории $SS - Act$, то $f_1 = f_2$ и $h_1 = h_2$; поскольку g — эпиморфизм категории $SS - Act$, то $g_1 = g_2$, т.е. $(f_1,g_1,h_1) = (f_2,g_2,h_2)$. Следовательно, преобразование $(f,g,h) : r \to r'$ является мономорфизмом категории $Chu(SS - Act)$. □

Из доказательства теоремы 2 получаем

Следствие 2. *Пусть $r \in Hom_{SS-Act}(A\times X, D)$ и $r' \in Hom_{SS-Act}(A'\times X', D)$. Морфизм $(f,g) \in Hom_{Chu(SS-Act,D)}(r,r')$ является мономорфизмом тогда и только тогда, когда $f \in Hom_{SS-Act}(A,A')$ – мономорфизм и $g \in Hom_{SS-Act}(X',X)$ – эпиморфизм.*

5. Отделимые и полные отделимые пространства Чу

Пространство Чу $r \in Hom_{SS-Act}(A\times X, D)$ называется *отделимым* (*полным отделимым*), если $\hat{r} = p_{A,X,D}(r) \in Hom_{SS-Act}(A, D^X)$ является мономорфизмом (изоморфизмом) категории $SS - Act$.

Утверждение 4. *(Об отделимых и полных отделимых пространствах)*

1) Для пространства Чу $r \in Hom_{SS-Act}(A\times X, D)$ следующие условия эквивалентны:

(a) r является отделимым;

(b) $(\hat{r},e_X,e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r_{XD})$ является мономорфизмом категории $Chu(SS - Act)$;

(b') существует мономорфизм $w \in Hom_{SS-Act}(A,D^X)$ категории $SS-Act$ такой, что $(w,e_X,e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r_{XD})$;

(c) существует морфизм $(f,g,h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r_{X,D})$ такой, что f является мономорфизмом категории $SS - Act$.

2) Пусть $(f,g,h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r,r')$ морфизм пространств Чу. Если f является мономорфизмом категории $SS-Act$ и пространство r' отделимо, то пространство r отделимо.

3) Для пространства Чу $r \in Hom_{SS-Act}(A\times X, D)$ следующие условия эквивалентны:

(d) r является полным отделимым;

(e) $(\hat{r}, e_X, e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{XD})$ *является изоморфизмом категории* $Chu(SS-Act)$.

(f) r *изоморфно* $r_{X',D'}$ *для некоторых* $X', D' \in Ob(SS-Act)$.

Доказательство. Докажем 1). $(a) \Rightarrow (b)$ По лемме 1 п. (c) $(p_{A,X,D}(r), e_X, e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{XD})$. Так как $p_{A,X,D}(r)$ — мономорфизм, а e_X, e_D — изоморфизмы категории $SS-Act$, то $(p_{A,X,D}(r), e_X, e_D)$ является мономорфизмом категории $Chu(SS-Act)$.

$(b) \Rightarrow (b')$ Так как $(\hat{r}, e_X, e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{XD})$ является мономорфизмом категории $Chu(SS-Act)$, то по теореме 2 $\hat{r}$ является мономорфизмом категории $SS-Act$ и, полагая $w = \hat{r}$, получаем (b').

$(b') \Rightarrow (c)$ очевидно.

$(c) \Rightarrow (a)$ По лемме 1 п. (d) $h^g \cdot \hat{r} = f$. Так как по условию f мономорфизм, то и $\hat{r}$ мономорфизм, так что r является отделимым.

Докажем 2). Пусть $r' \in Hom_{SS-Act}(A' \times X', D')$. Так как r' отделимо, то по (b') существует мономорфизм $w' \in Hom_{SS-Act}(A', D'^{X'})$ категории $SS-Act$ такой, что $(w', e_{X'}, e_{D'}) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r', r_{X'D'})$. Тогда $(w' \cdot f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{X'D'})$. По лемме 1 п. (d) $w' \cdot f = h^g \cdot \hat{r}$. Поскольку $w' \cdot f$ — мономорфизм, то $\hat{r}$ также является мономорфизмом. Следовательно, пространство r отделимо.

Докажем 3). $(d) \Rightarrow (e)$ По лемме 1 п. (c) $(\hat{r}, e_X, e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{XD})$. Так как r — полное отделимое пространство Чу, то $\hat{r}$ и e_X, e_D — изоморфизмы. Следовательно $(\hat{r}, e_X, e_D)$ изоморфизм категории $Chu(SS-Act)$.

$(e) \Rightarrow (f)$ очевидно.

$(f) \Rightarrow (d)$ Пусть $(f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{XD})$ — изоморфизм в категории $Chu(SS-Act)$. Тогда f, g и h являются изоморфизмами в категории $SS-Act$, а значит и h^g — изоморфизм. По лемме 1 п. (d) $f = h^g \cdot \hat{r}$. Следовательно, $\hat{r}$ — изоморфизм, т.е. r — полное отделимое пространство Чу. □

6. Функторы со значениями в категории $Chu(SS-Act)$

Рассмотрим функторы

$$P_1 : Chu(SS-Act) \to (SS-Act),\ P_2 : Chu(SS-Act) \to (SS-Act)^o,$$

$$P_3 : Chu(SS-Act) \to (SS-Act),\ P_{23} : Chu(SS-Act) \to (SS-Act)^o \times (SS-Act),$$

которые сопоставляют каждому пространству Чу

$$(A, X, D, r),\ \ r \in Hom_{SS-Act}(A \times X, D)$$

объекты

$$P_1(A, X, D, r) = A,\ P_2(A, X, D, r) = X,\ P_3(A, X, D, r) = D,\ P_{23}(A, X, D, r) = (X, D)$$

и каждому морфизму $(f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r')$ морфизмы

$$P_1(f, g, h) = f,\ P_2(f, g, h) = g,\ P_3(f, g, h) = h,\ P_{23}(f, g, h) = (g, h).$$

Тот факт, что это функторы, прямо следует из определения композиции преобразований Чу.

Если Z — категория, $F : Z \to Chu(SS-Act)$ — произвольный функтор, то будем использовать обозначения F_1, F_2, F_3, $F_{23} = (F_2, F_3)$ для функторов, играющих роль координат F:

$$F_1 = P_1 \circ F : Z \to (SS-Act),\ F_2 = P_2 \circ F : Z \to (SS-Act)^o,$$

$F_3 = P_3 \circ F : Z \to (SS - Act)$, $F_{23} = P_{23} \circ F : Z \to (SS - Act)^o \times (SS - Act)$.

Теорема 3. *(о функторах в $Chu(SS - Act)$)*

1) Пусть $F : Z \to Chu(SS-Act)$ — произвольный функтор. Тогда имеются однозначно определённые функторы $F_1 : Z \to SS - Act$, $F_2 : Z \to (SS - Act)^o$, $F_3 : Z \to SS - Act$, такие, что для любого объекта $z \in Ob(Z)$ и любого морфизма $a \in Hom_Z(z, z')$

$$F(z) = (F_1(z), F_2(z), F_3(z), r(z)),$$

где $r(z) \in Hom_{SS-Act}(F_1(z) \times F_2(z), F_3(z))$ и

$$F(a) = (F_1(a), F_2(a), F_3(a)) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r(z), r(z')).$$

2) Пусть $F_1 : Z \to (SS - Act)$, $F_2 : Z \to (SS - Act)^o$, $F_3 : Z \to (SS - Act)$ – произвольные функторы и для каждого $z \in Ob(Z)$ зафиксирован морфизм $r(z) \in Hom_{SS-Act}(F_1(z) \times F_2(z), F_3(z))$. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) отображение, задаваемое равенствами

$$F(z) = (F_1(z), F_2(z), F_3(z), r(z)),\ F(a) = (F_1(a), F_2(a), F_3(a)), \tag{1}$$

где $a \in Hom_Z(z, z')$, является функтором $F : Z \to Chu(SS - Act)$;

(b) для каждого $a \in Hom_Z(z, z')$

$$(F_1(a), F_2(a), F_3(a)) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r(z), r(z')). \tag{2}$$

(c) для каждого $a \in Hom_Z(z, z')$

$$F_3(a)^{F_2(a)} \cdot \widehat{r(z)} = \widehat{r(z')} \cdot F_1(a); \tag{3}$$

(d) семейство

$$W = \{W(z) = \widehat{r(z)} \in Hom_{SS-Act}(F_1(z), F_3(z)^{F_2(z)}) \mid z \in Ob(Z)\}$$

является гомоморфизмом функторов $W : F_1 \to F_3^{F_2} = \mathcal{H}^{SS} \circ (F_2, F_3)$.

Доказательство. Докажем 1). Так как $F(z)$ является пространством Чу, то $F(z) = (A, X, D, r(z))$ для некоторого $r(z) \in Hom_{SS-Act}(A \times X, D)$, так что в силу введённых выше обозначений, $A = P_1(F(z)) = F_1(z)$, $X = P_2(F(z)) = F_2(z)$, $D = P_3(F(z)) = F_3(z)$. Если $a \in Hom_Z(z, z')$, то $F(a) = (f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r(z), r(z'))$, значит $f = P_1(F(a)) = F_1(a)$, $g = P_2(F(a)) = F_2(a)$, $h = P_3(F(a)) = F_3(a)$. Следовательно, $F(a) = (F_1(a), F_2(a), F_3(a)) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r(z), r(z'))$.

Докажем 2). $(a) \Rightarrow (b)$ очевидно.

$(b) \Rightarrow (a)$ Так как $r(z) \in Hom_{SS-Act}(F_1(z)\times F_2(z), F_3(z))$, то $F(z) \in Ob(Chu(SS-Act))$, и в силу (2) $F(a) = (F_1(a), F_2(a), F_3(a)) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r(z), r(z'))$. Если $b \in Hom_Z(z', z'')$, то из того, что F_1, F_2 и F_3 функторы и из определения композиции преобразований Чу следует

$$F(b\circ a) = (F_1(b\circ a), F_2(b\circ a), F_3(b\circ a)) = (F_1(b)\cdot F_1(a), F_2(a)\cdot F_2(b), F_3(b)\cdot F_3(a)) =$$
$$= (F_1(b), F_2(b), F_3(b)) \circ (F_1(a), F_2(a), F_3(a)) = F(b) \circ F(a),$$
$$F(e_z) = (F_1(e_z), F_2(e_z), F_3(e_z)) = (1_{F_1(z)}, 1_{F_2(z)}, 1_{F_3(z)}) = 1_{F(z)},$$

так что F — функтор.

Условия (b) и (c) эквивалентны в силу соотношения (a) леммы 1.

Условия (c) и (d) эквивалентны по определению гомоморфизма (естественного преобразования) функторов.

□

7. Основная теорема о функторе H

Рассмотрим функторы

$$H_1 = \mathcal{H}^{SS} : (SS - Act)^o \times (SS - Act) \to (SS - Act),$$
$$H_2 : (SS - Act)^o \times (SS - Act) \to (SS - Act)^o,$$
$$H_3 : (SS - Act)^o \times (SS - Act) \to (SS - Act),$$

где $H_2(X, D) = X$, $H_2(g, h) = g$, $H_3(X, D) = D$, $H_3(g, h) = h$ для любых $X, D \in Ob(SS - Act)$, $g \in Hom_{SS-Act}(X', X)$, $h \in Hom_{SS-Act}(D, D')$.

Тогда

$$r_{XD} \in Hom_{SS-Act}(D^X \times X, D) = Hom_{SS-Act}(H_1(X, D) \times H_2(X, D), H_3(X, D)),$$

и по пункту (b) леммы 1,

$$(H_1(g, h), H_2(g, h), H_3(g, h)) = (h^g, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{XD}, r_{X'D'}).$$

Поэтому для категории $Z = (SS - Act)^o \times (SS - Act)$ и функторов $F_i = H_i$ выполняются условия пункта (b) теоремы 3, и следовательно, по пункту (a) той же теоремы отображение, задаваемое равенствами

$$H(X, D) = (D^X, X, D, r_{XD}), \quad H(g, h) = (h^g, g, h),$$

является функтором

$$H : (SS - Act)^o \times (SS - Act) \to Chu(SS - Act).$$

Теорема 4. *(о функторе H)*

1) Функтор H является полным и строгим.

2) Пусть $F : Z \to Chu(SS - Act)$ функтор, задаваемый равенством (1). Существует канонический гомоморфизм функторов

$$V = \{V(z) \mid z \in Ob(Z)\} : F \to H \circ F_{23},$$

задаваемый равенством

$$V(z) = (W(z), e_{F_2(z)}, e_{F_3(z)}) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r(z), r_{F_2(z)F_3(z)}),$$

где

$$W(z) = \widehat{r(z)} \in Hom_{SS-Act}(F_1(z), F_3(z)^{F_2(z)}).$$

3) Функтор H сопряжён справа функтору P_{23}.

4) (a) Пусть $z \in Ob(Z)$. Тогда
$V(z)$ — мономорфизм $\Leftrightarrow$ $W(z)$ — мономорфизм $\Leftrightarrow$ $F(z)$ — отделимое пространство Чу;
$V(z)$ — изоморфизм $\Leftrightarrow$ $W(z)$ — изоморфизм $\Leftrightarrow$ $F(z)$ — полное отделимое пространство Чу.

(b) Гомоморфизм функторов $V : F \to H \circ F_{23}$ является изоморфизмом $\Leftrightarrow$ для всякого $z \in Ob(Z)$ пространство Чу $F(z)$ является полным отделимым.

Доказательство. 1) Покажем, что H — полный строгий функтор, т.е. отображение

$$Hom_{(SS-Act)^o \times (SS-Act)}((X, D), (X', D')) \to Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{XD}, r_{X'D'}),$$

задаваемое равенством $H(g, h) = (h^g, g, h)$, биективно. Инъективность очевидна. Докажем сюръективность. Пусть $(f, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{XD}, r_{X'D'})$.

Так как $(h^g, g, h) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{XD}, r_{X'D'})$, то по лемме 1 п. (d) имеем $f = h^g$, т.е. $H(g,h) = (f,g,h)$. Биективность отображения $(g,h) \mapsto (h^g, g, h)$, а значит полнота и строгость функтора H доказаны.

2) Имеем

$$(H \circ F_{23})(z) = r_{F_2(z)F_3(z)},$$
$$(H \circ F_{23})(a) = (F_3(a)^{F_2(a)}, F_2(a)F_3(a));$$
$$F(z) = r(z);\ F(a) = (F_1(a), F_2(a), F_3(a)).$$

Для того, чтобы доказать, что V — гомоморфизм функторов, нужно установить, что для любого $a \in Hom_Z(z, z')$ выполняется равенство

$$V(z') \circ F(a) = (H \circ F_{23})(a) \circ V(z). \tag{4}$$

Так как

$$V(z') \circ F(a) = (W(z') \cdot F_1(a), e_{F_2(z')} \cdot F_2(a), e_{F_3(z')} \cdot F_3(a)),$$
$$(H \circ F_{23})(a) \circ V(z) = (F_3(a)^{F_2(a)} \cdot W(z), F_2(a) \cdot e_{F_2(z)}, F_3(a) \cdot e_{F_3(z)}),$$

то равенство (4) означает одновременное выполнение трех равенств:

$$W(z') \cdot F_1(a) = F_3(a)^{F_2(a)} \cdot W(z);$$
$$e_{F_2(z')} \cdot F_2(a) = F_2(a) \cdot e_{F_2(z)};\ e_{F_3(z')} \cdot F_3(a) = F_3(a) \cdot e_{F_3(z)}.$$

Первое из них совпадает с равенством (3) теоремы 3 и поэтому выполняется, второе и третье очевидны.

3) Воспользуемся одним из стандартных признаков сопряжённости [5] и для этого докажем, что существуют единица и коединица сопряжения, т.е. такие гомоморфизмы функторов

$$\eta : 1_{Chu(SS-Act)} \to H \circ P_{23},\ \varepsilon : P_{23} \circ H \to 1_{SS-Act^o \times SS-Act},$$

что

$$H\varepsilon \circ \eta H = 1_H,\ \varepsilon P_{23} \circ P_{23}\eta = 1_{P_{23}}, \tag{5}$$

где гомоморфизмы функторов

$$H\varepsilon : H \circ P_{23} \circ H \to H \ \text{ и } \eta H : H \to H \circ P_{23} \circ H$$

определяются так:

$$(\eta H)(X,D) = \eta(H(X,D)) : H(X,D) \to (H \circ P_{23})(H(X,D)),$$
$$(H\varepsilon)(X,D) = H(\varepsilon(X,D)) : H((P_{23} \circ H)(X,D)) \to H(X,D).$$

Заметим, что $P_{23} \circ H = 1_{(Chu(SS-Act))^o \times Chu(SS-Act)}$.

Определим коединицу ε сопряжения как тождественный гомоморфизм

$$\varepsilon = \{\varepsilon(X,D) \in Hom_{(SS-Act)^o \times (SS-Act)}((X,D),(X,D)) \mid X, D \in Ob(SS-Act)\},$$

$\varepsilon(X,D) = (e_X, e_D)$. Очевидно, что и гомоморфизмы функторов $H\varepsilon$ и εP_2 являются тождественными.

Для определения единицы η сопряжения применим результат пункта 2) к случаю, когда $F = 1_{Chu(SS-Act)} : Chu(SS-Act) \to Chu(SS-Act)$ — тождественный функтор, $Z = Chu(SS-Act)$. Тогда $F_{23} = P_{23}$, и если $r \in Hom_{SS-Act}(A \times X, D)$, то $H \circ P_{23}(r) = H(X,D) = r_{XD}$,

$$V(r) = (\hat{r}, e_X, e_D) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, r_{XD})$$

и $V : 1_{Chu(SS-Act)} \to H \circ P_{23}$ — гомоморфизм функторов. Полагаем $\eta = V$. Так как $\hat{r}_{XD} = e_{D^X}$, то $(\eta H)(X,D) = V(r_{XD}) = (e_{D^X}, e_X, e_D) = 1_H(X,D) \in$

$Hom_{Chu(SS-Act)}(H(X,D),H(X,D))$, так что $\eta H : H \to H = H \circ P_{23} \circ H$ — тождественное преобразование функторов. Имеем также $(P_{23}\eta)(r) = P_{23}(\hat{r}, e_X, e_D) = (e_X, e_D) = 1_{P_{23}(r)} \in Hom_{(SS-Act)^o \times (SS-Act)}(P_{23}(r), P_{23}(r))$; следовательно, $P_{23}\eta : P_{23} \to P_{23} = P_{23} \circ H \circ P_{23}$ — тождественное преобразование функторов.

Таким образом, преобразования функторов $H\varepsilon,\ \eta H,\ \varepsilon P_{23},\ P_{23}\eta$ тождественны, значит выполняются равенства (5), откуда следует сопряжённость функторов H и P_{23}.

4) прямо следует из теоремы 3 и общих свойств гомоморфизмов функторов.

□

8. Пределы, произведения и копроизведения в категории $Chu(SS-Act)$

Теорема 5. *(о пределах) Пусть Z — категория, $F : Z \to Chu(SS-Act)$ такой функтор, что $F(z)$ — полное отделимое пространство Чу для любого $z \in Ob(Z)$. Если каждый функтор $Z \to SS-Act$ имеет предел и каждый функтор $Z^o \to SS-Act$ имеет копредел, то существует $limF$, который является полным отделимым пространством Чу.*

Доказательство. По теореме 3 имеются функторы $F_1 : Z \to SS-Act$, $F_2 : Z \to (SS-Act)^o$, $F_3 : Z \to SS-ActF$ такие, что

$$F(z) = (F_1(z), F_2(z), F_3(z), r(z)),\ F(a) = (F_1(a), F_2(a), F_3(a)),$$

где $r(z) \in Hom_{SS-Act}(F_1(z) \times F_2(z), F_3(z))$, $a \in Hom_Z(z, z')$. Обозначим

$$F_2^o : Z^o \to SS-Act$$

функтор, задаваемый равенствами

$$F_2^o(z) = F_2(z)$$

и если $a \in Hom_{Z^o}(z', z)$, то

$$F_2^o(a) = F_2(a) \in Hom_{(SS-Act)^o}(F_2(z), F_2(z')) = Hom_{SS-Act}(F_2^o(z'), F_2^o(z)).$$

По условию функтор F_2^o имеет копредел, а функтор F_3 имеет предел, т.е. имеются универсальные конусы

$$\varphi_2^o = \{\varphi_2(z) \in Hom_{(SS-Act)^o}(F_2^o(z), X)) \mid z \in Ob(Z)\},$$

$$\varphi_3 = \{\varphi_3(z) \in Hom_{SS-Act}(D, F_3(z)) \mid z \in Ob(Z)\}$$

из которых первый — конус копредела, второй — конус предела. Таким образом, $X = colimF_2^o$, $D = limF_3$. По свойствам дуальных категорий

$$\varphi_2 = \{\varphi_2(z) \in Hom_{SS-Act}(X, F_2(z)) \mid z \in Ob(Z)\}$$

является конусом предела функтора F_2, так что $X = limF_2$ и, следовательно, по свойствам произведения категорий,

$$\varphi_{23} = \{(\varphi_2(z), \varphi_3(z)) \in Hom_{(SS-Act)^o \times (SS-Act)}((X, D), F_{23}(z)) \mid z \in Ob(Z)\}$$

является конусом предела функтора $F_{23} = (F_2, F_3)$.

Так как функтор H имеет сопряжённый слева, то он переводит конус предела в конус предела, т.е. $H(\varphi_{23}) = \{H(\varphi_{23}(z)) \mid z \in Ob(Z)\}$, где

$$H(\varphi_{23}(z)) = (\varphi_3(z)^{\varphi_2(z)}, \varphi_2(z), \varphi_3(z)) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(H(X,D), H(F_2(z), F_3(z)))$$

является конусом предела функтора $H \circ F_{23}$. В частности,

$$H(X,D) = r_{XD} = lim(H \circ F_{23}).$$

По теореме 4 о функторе H имеется канонический гомоморфизм функторов $V : F \to H \circ F_{23}$ и, так как по условию каждое $F(z)$ является полным отделимым пространством Чу, то V является изоморфизмом функторов и, следовательно,

$$\{V(z)^{-1} \circ H(\varphi_{23}(z)) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{XD}, F(z)) \mid z \in Ob(Z)\}$$

является конусом предела функтора F, откуда $limF = r_{XD}$. Поскольку

$$V(z) = (\widehat{r(z)}, 1_{F_2(z)}, 1_{F_3(z)}) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r(z), r_{F_2(z),F_3(z)}),$$

то

$$V(z)^{-1} = (\widehat{r(z)}^{-1}, 1_{F_2(z)}, 1_{F_3(z)}) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{F_2(z)F_3(z)}, r(z)),$$

т.е.

$$V(z)^{-1} \circ H(\varphi_{23})(z) = (\widehat{r(z)}^{-1} \cdot \varphi_3(z)^{\varphi_2(z)}, \varphi_2(z), \varphi_3(z)).$$

□

Из доказанного следует, что существует произведение полных отделимых пространств Чу.

Теорема 6. *Пусть $r_i \in Hom_{SS-Act}(A_i \times X_i, D_i)$ $(i \in I)$ — полные отделимые пространства Чу. Произведением пространств Чу r_i, $i \in I$, является полное отделимое пространство Чу $r_{X_0D_0}$ вместе с преобразованиями Чу*

$$((\hat{r}_i)^{-1} \cdot p_i^{q_i}, q_i, p_i) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_{X_0D_0}, r_i),$$

где $X_0 = \coprod_{i \in I} X_i$, $D_0 = \prod_{i \in I} D_i$, $q_i(s, x_i) = x_i$, $p_i(s, d) = d(i)$ для любых $x_i \in X_i$, $d \in \prod_{i \in I} D_i$, $i \in I$.

Доказательство. Рассмотрим дискретную категорию Z, объекты которой — это элементы множества I. Тогда семейство $\{r_i \in Hom_{SS-Act}(A_i \times X_i, D_i) \mid i \in I\}$ — это то же самое, что функтор $F : Z \to Chu(SS-Act)$, определяемый равенством $F(i) = r_i$, а предел функтора F — это то же самое, что произведение указанного семейства. Поэтому доказываемый результат является частным случаем теоремы 5 о пределах. □

Следующая теорема показывает, что копроизведения в категории $Chu(SS-Act)$ существуют для любых пространств Чу.

Теорема 7. *Пусть $r_i \in Hom_{SS-Act}(A_i \times X_i, D_i)$, $i \in I$. Копроизведением пространств Чу r_i, $i \in I$, является пространство Чу $r \in Hom_{SS-Act}(\coprod_{i \in I} A_i \times \prod_{i \in I} X_i, \coprod_{i \in I} D_i)$ вместе с преобразованиями Чу $(f_i, g_i, h_i) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_i, r)$, где $r(s, (a_i, x)) = r_i(s, (a_i, x(i)))$, $f_i(s, a_i) = a_i$, $g_i(s, x) = x(i)$, $h_i(s, d_i) = d_i$ для любых $a_i \in A_i$, $x \in \prod_{i \in I} X_i$, $d_i \in D_i$, $i \in I$.*

Доказательство. Пусть условия теоремы выполнены и $i \in I$. Корректность определения преобразования Чу (f_i, g_i, h_i) следует из равенств:

$$h_i(s, (r_i(s, (a_i, g_i(s, x))))) = r_i(s, (a_i, x(i))) = r(s, (a_i, x)) = r(s, (f_i(s, a_i), x))$$

для любых $a_i \in A_i$, $x \in \prod_{i \in I} X_i$.

Пусть $t \in Hom_{SS-Act}(B \times Y, D)$, $(f'_i, g'_i, h'_i) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_i, t)$. По утверждению 1 полигон $\coprod_{i\in I} A_i$ вместе с морфизмами f_i, $i \in I$, и полигон $\coprod_{i\in I} D_i$ вместе с морфизмами h_i, $i \in I$, являются копроизведениями полигонов A_i $(i \in I)$ и D_i $(i \in I)$ соответственно, а полигон $\prod_{i\in I} X_i$ вместе с морфизмами g_i, $i \in I$, является произведением полигонов X_i $(i \in I)$ в категории $SS - Act$. Тогда существуют и причем единственные морфизмы $\tilde{f} \in Hom_{SS-Act}(\coprod_{i\in I} A_i, B)$, $\tilde{g} \in Hom_{SS-Act}(Y, \prod_{i\in I} X_i)$, $\tilde{h} \in Hom_{SS-Act}(\coprod_{i\in I} D_i, D)$ такие, что $f'_i = \tilde{f} \cdot f_i$, $g'_i = g_i \cdot \tilde{g}$ и $h'_i = \tilde{h} \cdot h_i$ для любого $i \in I$, т.е. $\tilde{f}(s, a_i) = f_i(s, a_i)$, $\tilde{g}(s, y)(i) = g'_i(s, y)$ и $\tilde{h}(s, d) = h'_i(s, d)$ для любых $a_i \in A_i$, $y \in Y$, $d \in D$, $i \in I$.

Покажем, что $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r, t)$, т.е. для любых $a \in \coprod_{i\in I} A_i$, $y \in Y$ имеет место равенство $\tilde{h}(s, r(s, (a, \tilde{g}(s, y)))) = t(s, (\tilde{f}(s, a), y))$. Так как $(f_i, g_i, h_i) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_i, r)$, то $r(s, (f_i(s, a), \tilde{g}(s, y))) = h_i(s, r_i(s, (a, (g_i \cdot \tilde{g})(s, y))))$ для любых $a \in A_i$, $y \in Y$. Так как $h'_i = \tilde{h} \cdot h_i$ и $g'_i = g_i \cdot \tilde{g}$, то $\tilde{h}(s, r(s, (a, \tilde{g}(y)))) = (\tilde{h} \cdot h_i)(s, r_i(s, (a, (g_i \cdot \tilde{g})(s, y)))) = h'_i(s, r_i(s, (a, g'_i(s, y))))$ для любых $a \in A_i$, $y \in Y$. Так как $(f'_i, g'_i, h'_i) \in Hom_{Chu(SS-Act)}(r_i, t)$, то $h'_i(s, r_i(s, (a, g'_i(s, y))) = t(s, (f'_i(s, a), y)))$ для любых $a \in A_i$, $y \in Y$. Поскольку $\tilde{f}(s, a) = f'_i(s, a)$, то $t(s, (f'_i(s, a), y)) = t(s, (\tilde{f}(s, a), y))$ для любых $a \in A_i$, $y \in Y$. Таким образом, для любых $a \in \coprod_{i\in I} A_i$, $y \in Y$ имеет место равенство $\tilde{h}(s, r(s, (a, \tilde{g}(s, y)))) = t(s, (\tilde{f}(s, a) \times y))$. □

References

[1] M. Barr, *-Autonomous Categories, Lecture Notes in Math., 752, Springer-Verlag, Berlin, 1979. Zbl 0415.18008

[2] M. Barr, C. Wells, Category Theory for Computing Science. Prentice Hall, London, 1995. Zbl 0841.18001

[3] V. Gould, A.V. Mikhalev, E.A. Palyutin, A.A. Stepanova, Model-theoretic properties of free, projective, and flat S-acts, J. Math. Sci. New York, 164:2 (2010), 195-227. Zbl 1288.03026

[4] M. Kilp, U. Knauer, A.V. Mikhalev, Monoids, acts and categories. With applications to wreath products and graphs, Walter De Gruyter, Berlin, 2000. Zbl 0945.20036

[5] S. Mac Lane, Categories for the working mathematician, Graduate Texts in Mathematics, 5, Springer, New York, 1998. Zbl 0906.18001

[6] V.R. Pratt, Chu Spaces, School on category theory and applications. Lecture notes of courses, Coimbra, Portugal, July 13-17, 1999. Coimbra: Universidade de Coimbra, Departamento de Matematica. Textos Mat., Ser. B., 21, Universidade de Coimbra, Coimbra. 1999, (39-100). Zbl 0954.18002

[7] A.A. Stepanova, E.E. Skurikhin, A.G. Sukhonos, Category of Chu spaces over S-Act category, Sib. Elektron. Mat. Izv., 14 (2017), 1220-1237. Zbl 1391.18010

[8] A.A. Stepanova, E.E. Skurikhin, A.G. Sukhonos, Equalizers and coequalizers in categories of Chu spaces over S-Act categories, Sib. Elektron. Mat. Izv., 16 (2019), 709-717. Zbl 1420.18021

[9] A.A. Stepanova, E.E. Skurikhin, A.G. Sukhonos, Product of Chu spaces in the category of Chu(S-Act), Sib. Elektron. Mat. Izv., 17 (2020), 1352-1358.

[10] E.E. Skurikhin, A.A. Stepanova A.G. Sukhonos, Extensions of the category S-Act, Sib. Elektron. Mat. Izv., 18 (2021), 1332-1357.

E.E. Skurikhin
Institute of Applied Mathematics,
Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
690920, Vladivostok, Russia
Email address: eeskur@gmail.com

A. A. Stepanova
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
690920, Vladivostok, Russia
Email address: stepltd@mail.ru

A.G. Sukhonos
Far-Eastern Federal University,
b.Ayaks-10,
690920, Vladivostok, Russia
Email address: agsukh@mail.ru