

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 20, стр. 144–144 (2023)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxxУДК 519.214
MSC 60G50;60G40О ВРЕМЕНАХ ПЕРВОГО ПРОХОЖДЕНИЯ ДЛЯ
СИММЕТРИЧНЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДЕНИЙ
БЕЗ УСЛОВИЯ ЛИНДЕБЕРГА

А.И. Саханенко

ABSTRACT. We consider exit times for random walks with independent but not necessarily identical distributed increments. We are going to describe an asymptotical behavior of the probability that the random walk stay above the moving boundary for a long time. In the paper by D. Denisov, A. Sakhanenko, and V. Wachtel (Ann. Probab., 2018) an universal asymptotical formula for such probability was found in the case when the random walk satisfies the classical Lindeberg condition. Now we investigate a question if it is possible to find similar asymptotic for more general random walks when increments may have infinite variances, but the central limit theorem should be still valid. We obtain such result for a class of walks with symmetrically distributed increments.

Keywords: random walk, symmetric distribution, exit time, central limit theorem, moving boundary.

1. ВВЕДЕНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ.

1.1. Введение. Рассмотрим случайное блуждание

$$S_k := X_1 + \dots + X_k, \quad k = 1, 2, \dots,$$

SAKHANENKO, A.I., ON FIRST-PASSAGE TIMES FOR SYMMETRIC RANDOM WALKS WITHOUT LINDBERBERG CONDITION.

© 2022 САХАЕНКО А.И.

Работа выполнена при поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект № FWNF-2022-0010, а также при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта № 20-51-12007.

Поступила 22 ноября 2022 г., опубликована 31 января 2023 г.

построенное по независимым случайным величинам X_1, X_2, \dots . Для последовательности $\{g_k\}$ действительных чисел введём величину

$$T := \inf\{k \geq 1 : S_k \leq g_k\}$$

равную времени первого пересечения меняющейся границы $\{g_k\}$ случайным блужданием $\{S_k\}$. Основной целью настоящей работы является исследование асимптотического поведения распределения этого времени:

$$\mathbf{P}(T > n) = \mathbf{P}\left(\min_{1 \leq k \leq n} (S_k - g_k) > 0\right).$$

В данной статье рассматривается случай, когда блуждание $\{S_n\}$ принадлежит области притяжения нормального закона. Точнее, мы предполагаем, что существует такая числовая последовательность $\{b_n\}$, что

(1) S_n/b_n сходится по распределению к стандартному нормальному закону, и что вдобавок

$$(2) \quad X_n/b_n \xrightarrow{P} 0 \quad \text{и} \quad b_n \rightarrow \infty.$$

(В (1), (2) и далее все пределы берутся при $n \rightarrow \infty$.)

Будем также считать, что граница $\{g_n\}$ меняется медленнее, чем нормирующая последовательность, т. е. что

$$(3) \quad g_n/b_n \rightarrow 0.$$

Кроме того, чтобы исключить тривиальные случаи, мы предполагаем, что

$$(4) \quad \mathbf{P}(T > n) > 0 \quad \text{для всех} \quad n \geq 1.$$

Хорошо известным классическим случаем, когда (1) может выполняться, является случай нулевых средних и конечных дисперсий:

$$(5) \quad \forall k \geq 1 \quad \mathbf{E}X_k = 0 \quad \text{and} \quad B_n^2 := \sum_{k=1}^n \mathbf{E}X_k^2 \rightarrow \infty.$$

Если ещё условие Линдеберга

$$(6) \quad L_n(\varepsilon) := \frac{1}{B_n^2} \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k^2; |X_k| > \varepsilon B_n] \rightarrow 0 \quad \text{для каждого} \quad \varepsilon > 0$$

верно, то (1) и (2) справедливы при $b_n = B_n$. В недавней статье [1] было показано, что при выполнении этих классических условий (5) и (6) также имеет место следующая асимптотика:

$$(7) \quad \mathbf{P}(T > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U_g(B_n^2)}{B_n},$$

где U_g — положительная медленно меняющаяся функция со значениями

$$U_g(B_n^2) = \mathbf{E}[S_n - g_n; T > n], \quad n \geq 1.$$

До статьи [1] такая точная асимптотика, как (7), была известна только для независимых и одинаково распределённых случайных величин $\{X_k\}$ (см. подробности и библиографию в [1]).

1.2. Постановка задачи. Известно, что центральная предельная теорема (1) может быть верной и для случайных величин $\{X_k\}$ с бесконечными дисперсиями или даже без средних значений. Введём функции:

$$(8) \quad \Sigma_n(u) := \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(|X_k| > u) \quad \text{и} \quad B_n^2(u) := \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[X_k^2 \wedge u^2],$$

где мы используем стандартные обозначения:

$$u \vee v := \max\{u, v\} \quad \text{и} \quad u \wedge v := \min\{u, v\}.$$

Подчеркнём, что для симметрично распределённых X_1, X_2, \dots , из сходимостей (1) и (2) мы с необходимостью имеем (см. подробности ниже, в замечании 3), что

$$(9) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \Sigma_n(\varepsilon b_n) \rightarrow 0,$$

а также

$$(10) \quad B_n^2(b_n) \sim b_n^2 \sim b_{n+1}^2 \rightarrow \infty.$$

В настоящей статье вместо (9) мы используем следующее более ограничительное условие:

$$(11) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad Q_n(\varepsilon) := b_n \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{P}(|X_k| > \varepsilon b_n)}{b_k} \rightarrow 0; \quad \text{где} \quad Q_n(\varepsilon) \geq \Sigma_n(\varepsilon b_n).$$

Легко видеть, что из предположения (11) следует (см. также ниже замечание 5), что существуют числа $\{\varepsilon_n\}$ такие, что:

$$(12) \quad \varepsilon_n \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad Q_n(\varepsilon_n) \rightarrow 0.$$

Чтобы сформулировать наши основные результаты, мы должны ввести случайные блуждания со срезанными приращениями. Для каждого $u > 0$ и всех $k \geq 1$ положим

$$(13) \quad X_k^{[u]} := (|X_k| \wedge u) \cdot \text{sign}(X_k) = \begin{cases} u, & \text{if } X_k \geq u, \\ X_k, & \text{если } |X_k| \leq u, \\ -u, & \text{if } X_k \leq -u. \end{cases}$$

Определим также

$$(14) \quad S_k(u) := \sum_{j=1}^k X_j^{[u]} \quad \text{и} \quad T^{(u)} := \inf\{k \geq 1 : S_k(u) \leq g_k\}.$$

Наша цель — доказать, что при соответствующих $u_n \rightarrow \infty$

$$(15) \quad \mathbf{P}(T > n) \sim \mathbf{P}(T^{(u_n)} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_n(u_n)}{b_n},$$

где

$$E_n(u) := \mathbf{E}[S_n(u) - g_n ; T^{(u)} > 0].$$

1.3. Основные результаты. В остальной части статьи мы используем следующие предположения.

(а) Независимые случайные величины X_1, X_2, \dots распределены симметрично.

(б) Положительные действительные числа $\{b_n\}$ и $\{\varepsilon_n\}$ таковы, что выполняются условия (10) и (12).

(г) Границей $\{g_n\}$ является невозрастающая последовательность действительных чисел, удовлетворяющая условию (3) и, кроме того,

$$(16) \quad \mathbf{P}(X_1 > g_1^+) > 0 \quad \text{с} \quad \varepsilon_1 b_1 > g_1^+.$$

Ниже мы говорим, что *последовательность $\{U_n\}$ медленно меняется при $b_n \rightarrow \infty$* , в случае если

$$(17) \quad \forall c > 0 \quad U_{m(n)} \sim U_n, \quad \text{когда} \quad b_{m(n)} \sim c b_n \quad \text{и} \quad m(n) \rightarrow \infty.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия (а), (б) и (г). Предположим также, что действительные числа $\{u_n\}$ таковы, что

$$(18) \quad \forall n \geq 1 \quad \varepsilon_n b_n \wedge \varepsilon_1 b_1 \leq u_n \quad \text{and} \quad u_n Q_n(\varepsilon_n)/b_n \rightarrow 0.$$

Тогда верна асимптотическая формула (15) и, кроме того, последовательность $\{E_n(u_n)\}$ медленно меняется при $b_n \rightarrow \infty$.

1.4. Частные случаи и комментарии.

Следствие 1. Пусть условие Линдберга (5)-(6) имеет место вместе с предположениями (а) и (г), в которых используются числа B_n вместо b_n . Тогда предположение (б) также выполняется, причём с необходимостью $b_n \sim B_n$ и верны все утверждения теоремы 1. В частности, в этом случае имеем следующую асимптотическую формулу

$$\mathbf{P}(T > n) \sim \mathbf{P}(T^{(u_n)} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_n(u_n)}{b_n} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{U_g(B_n^2)}{B_n}$$

для всех чисел $\{u_n\}$, удовлетворяющих (18).

Пример 1. Пусть случайные величины $\{X_k\}$ распределены одинаково и симметрично, причём

$$(19) \quad \mathbf{P}(|X_1| > x) = C(a) \frac{\log^{2a} x}{x^2} \quad \text{при всех} \quad x > e^a,$$

где $a \geq 0$ и $\mathbf{P}(|X_1| > e^a) = 1$. Легко убедиться, что

$$(20) \quad B_n^2(b_n) = n \int_0^{b_n} 2x \mathbf{P}(|X_1| > x) dx \sim b_n^2 := \frac{C(a)}{2a+1} n \log^{2a+1}(n+1) \rightarrow \infty.$$

В пункте 2.7 будет показано, что в этом случае все условия и утверждения Теоремы 1 справедливы для любых чисел $\{u_n\}$ таких что

$$(21) \quad u_n \sim C b_n \log^\delta(n+1), \quad \text{когда} \quad -1/2 < \delta < 1 \quad \text{и} \quad C > 0.$$

Замечание 1. Предположения (г) и (а) влекут за собой условие (4). Кроме того, в этом случае

$$(22) \quad G_n := \max_{k \leq n} |g_k| = |g_1| \vee |g_n| = o(b_n).$$

Замечание 2. Обозначим через N_0 минимальное число n такое, что случайная величина X_n имеет невырожденное распределение. При условии (а) в этом случае $X_k = 0$ для всех $k < N_0$. По этой причине представляется естественным считать X_{N_0} первым слагаемым в нашем блуждании; то есть предположить, что X_1 имеет невырожденное распределение. И мы действительно ввели это предположение в (16), хотя и неявно.

Замечание 3. Напомним, что если имеет место сходимость (2), то S_n/b_n является суммой независимых случайных величин $X_1/b_n, X_2/b_n, \dots$, удовлетворяющих условию равномерной бесконечной малости:

$$\max_{1 \leq j \leq n} \mathbf{P}(|X_j|/b_n > \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{для каждого } \varepsilon > 0.$$

Следовательно, для симметрично распределенных X_1, X_2, \dots сходимости в (1) и (2) имеет место тогда и только тогда, когда выполняются условия (9) и (10). Доказательство этого известного факта можно найти, например, в книге Лозва [4] (см. пункты 22.5 и 23.1 в русском переводе 1962 года).

Замечание 4. Заметим, что $B_n(u)$ — это неубывающая и непрерывная функция от $u \geq 0$ для каждого $n \geq 1$. Таким образом, при выполнении условий (9) и (10) существуют числа $\{\tilde{b}_n\}$ такие, что

$$(23) \quad B_n^2(\tilde{b}_n) = \tilde{b}_n^2 \sim \tilde{b}_{n+1}^2 \sim b_n^2 \sim b_{n+1}^2 \rightarrow \infty.$$

Итак, не уменьшая общности в теореме 1 вместо чисел $\{b_n\}$ всегда можно использовать неубывающие числа $\{\tilde{b}_n\}$. И $\tilde{b}_1 > 0$ по предположению (16).

Замечание 5. Пусть (11) выполнено при некоторых $\{b_n > 0\}$ и задано число $\varepsilon_1 > 0$. В этом случае

$$\forall n \geq 2 \quad Q_n(\varepsilon_n^*) \leq \varepsilon_n^*, \quad \text{при } \varepsilon_n^* := \min\{\varepsilon > 0 : Q_n(\varepsilon) \leq \varepsilon\} \rightarrow 0.$$

Таким образом, числа $\{\varepsilon_n = \varepsilon_n^*\}$ и $\{\varepsilon_n = \sup_{k \geq n} \varepsilon_k^*\}$ автоматически удовлетворяют предположению (12).

Замечание 6. Наша гипотеза состоит в том, что если в теореме 1 вместо предположения (b) требовать только сходимости (1) и (2), то условие (11) будет необходимым для выполнения (15) при $u_n = \varepsilon b_n$.

Остальная часть статьи посвящена доказательствам сформулированных выше утверждений.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА

Ниже в статье мы везде предполагаем, что действительные числа $\{v_n\}$ таковы, что

$$(24) \quad \underline{v}_n := \varepsilon_n b_n \wedge \varepsilon_1 b_1 \leq v_n = o(b_n).$$

2.1. Специальные уровни срезов.

Лемма 1. При предположениях (b) и (g) для любых действительных чисел $\{v_n\}$ со свойством (24) имеет место следующая асимптотическая формула:

$$(25) \quad \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_n(v_n)}{b_n}.$$

Кроме того, в этом случае

$$(26) \quad B_n(v_n) \sim B_n(\varepsilon_n b_n) \sim b_n \sim b_{n+1}.$$

Доказательство. При $v_n \leq 1$ из (8) получаем, что

$$\begin{aligned} 0 &\leq B_n^2(b_n) - B_n^2(v_n) \leq B_n^2(b_n) - B_n^2(\varepsilon_n b_n) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{E}[(X_k^{[b_n]})^2 - \varepsilon_n^2 b_n^2 \mid X_k] > \varepsilon_n b_n \leq b_n^2 \Sigma_n(\varepsilon_n b_n) = o(b_n^2), \end{aligned}$$

потому что $\Sigma_n(\varepsilon_n b_n) \leq Q_n(\varepsilon_n) \rightarrow 0$ в силу (12). А искомая формула (26) следует из (10).

Для доказательства (25) нам понадобятся обозначения:

$$(27) \quad X_{k,n} := \frac{X_k^{[v_n]}}{B_n(v_n)}, \quad S_{k,n} := X_{1,n} + \dots + X_{k,n} \quad \text{и} \quad g_{k,n} := -\frac{g_k}{B_n(v_n)}.$$

Из (22) и (26) легко видеть, что

$$(28) \quad \max_{k \leq n} |X_{k,n}| \leq r_n := \frac{v_n}{B_n(v_n)} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad g_n^* := \max_{k \leq n} |g_{k,n}| = \frac{G_n}{B_n(v_n)} \rightarrow 0.$$

Свойства (26) – (28) позволяют применить основное утверждение теоремы 1 из [2]. В результате, используя обозначение $Z_{k,n} := S_{k,n} - g_{k,n}$ получаем, что

(29)

$$\mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) = \mathbf{P}\left(\min_{k \leq n} Z_{k,n} > 0\right) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \mathbf{E}\left[Z_{n,n}; \min_{k \leq n} Z_{k,n} > 0\right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{E_k(v_n)}{B_n(v_n)}.$$

Теперь (25) следует из (29) и (26). \square

2.2. Сравнение уровней усечения. Далее в статье по умолчанию предполагается, что используются целые m, n и действительные числа u, v со следующими свойствами:

$$(30) \quad n \geq m \geq 1 \quad \text{и} \quad u \geq v > 0.$$

Введем случайные величины:

$$(31) \quad Z_n(u) := S_n(u) - g_n, \quad \underline{Z}_n(u) := \min_{1 \leq k \leq n} Z_k(u), \quad \alpha(v) := \min\{k \geq 1 : |X_k| > v\}.$$

Отметим, что $\alpha(v)$ — это момент остановки и что

(32)

$$\forall j < \alpha(v) \quad X_k^{[u]} = X_k^{[v]}, \quad S_k(u) = S_k(v), \quad Z_k(u) = Z_k(v), \quad \underline{Z}_k(u) = \underline{Z}_k(v).$$

Положим

$$(33) \quad T_n^{(u)} := T^{(u)} \wedge n \quad \text{и} \quad P_n(u, v) := \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(T^{(u)} > k - 1) \mathbf{P}(|X_k| > v),$$

причём мы всегда считаем, что $\mathbf{P}(T^{(u)} > 0) = 1$.

Предложение 1. Пусть случайные величины X_1, X_2, \dots независимы. Тогда для любого целого числа $n \geq 1$ и всех действительных $u \geq v > 0$ имеет место следующее соотношение:

$$(34) \quad \mathbf{P}(\alpha(v) \leq T^{(u)} \leq n) \leq \mathbf{P}(T_n^{(u)} \geq \alpha(v)) = \mathbf{P}(T_n^{(v)} \geq \alpha(v)) \leq \inf_{u \in [v, \infty)} P_n(u, v).$$

Кроме того, в этом случае

$$(35) \quad \left| \mathbf{P}(T^{(u)} > n) - \mathbf{P}(T^{(v)} > n) \right| \leq \mathbf{P}(T_n^{(v)} \geq \alpha(v)),$$

$$(36) \quad \left| \mathbf{P}(T > n) - \mathbf{P}(T^{(v)} > n) \right| \leq \mathbf{P}(T_n^{(v)} \geq \alpha(v)).$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\{T^{(u)} \geq k\} = \{T^{(u)} > k - 1\} = \{\underline{Z}_{k-1}(u) > 0\}$ и, следовательно,

$$(37) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(T^{(u)} \wedge n \geq \alpha(v)) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\alpha(v) = k, T^{(u)} \geq k) = \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\alpha(v) = k, \underline{Z}_{k-1}(u) > 0) \\ &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(\alpha(v) = k, \underline{Z}_{k-1}(v) > 0) = \mathbf{P}(T^{(v)} \wedge n \geq \alpha(v)), \end{aligned}$$

где мы применили (32) при $j = k - 1 < k = \alpha(v)$. Далее,

$$(38) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(\alpha(v) = k, \underline{Z}_{k-1}(u) > 0) &= \mathbf{P}(\alpha(v) > k - 1, |X_k| > v, \underline{Z}_{k-1}(u) > 0) \\ &\leq \mathbf{P}(|X_k| > v, \underline{Z}_{k-1}(u) > 0) = \mathbf{P}(|X_k| > v) \mathbf{P}(\underline{Z}_{k-1}(u) > 0), \end{aligned}$$

где мы использовали независимость случайных величин X_k и $Z_{k-1}(u)$. Суммируя оценки в (38), получаем из (37), что

$$\mathbf{P}(T^{(u)} \wedge n \geq \alpha(v)) \leq \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(|X_k| > v) \mathbf{P}(\underline{Z}_{k-1}(u) > 0) = P_n(u, v),$$

Из этого неравенства и (37) следует (34).

Учитывая (32), легко видеть, что

$$\alpha(v) \leq T^{(u)} \wedge T^{(v)}, \quad \text{когда } T^{(u)} \neq T^{(v)}.$$

Но из этого факта и (34) имеем:

$$(39) \quad P_{u,v,n} := \mathbf{P}(T^{(u)} > n, T^{(v)} \leq n) \leq \mathbf{P}(\alpha(v) \leq T^{(v)} \leq n),$$

$$(40) \quad P_{v,u,n} = \mathbf{P}(T^{(v)} > n, T^{(u)} \leq n) \leq \mathbf{P}(\alpha(v) \leq T^{(u)} \leq n).$$

Теперь заметим, что

$$\mathbf{P}(T^{(v)} > n) - P_{v,u,n} \leq \mathbf{P}(T^{(u)} > n) \leq \mathbf{P}(T^{(v)} > n) + P_{u,v,n}.$$

Это соотношение вместе с (39), (40) и (34) влечёт (35).

Наконец, (36) следует из (35) при $u \rightarrow \infty$. \square

2.3. Свойства математических ожиданий $E_m(\cdot)$. Мы собираемся доказать следующее утверждение.

Предложение 2. *Предположим, что условия (а) и (г) выполнены вместе со свойствами (30). Тогда*

$$(41) \quad 0 \leq E_n(u) - E_m(u) \leq (u + g_n - g_m) \mathbf{P}(T^{(u)} > m),$$

$$(42) \quad |E_n(u) - E_n(v)| \leq 2(u + g_1 - g_n) \mathbf{P}(T_n^{(v)} \geq \alpha(v)).$$

Кроме того, в этом случае

$$(43) \quad \forall n \geq 1 \quad \forall u \geq \varepsilon_1 b_1 > g_1^+ \quad E_n(u) \geq E_1(u) \geq K_0 := \mathbf{E}(X_1^{\lceil \varepsilon_1 b_1 \rceil} - g_1^+) > 0.$$

Доказательство основано на двух леммах.

Лемма 2. При выполнении условия (а) верны следующие представления:

(44)

$$E_n(u) = \mathbf{E}[g_n - S_{T^{(u)}}; T^{(u)} \leq n] - g_n = \mathbf{E}[g_{T^{(u)}} - S_{T^{(u)}}; T^{(u)} \leq n] - \mathbf{E}g_{T^{(u)} \wedge n}.$$

Если же предположение (г) также выполняется, то имеют место соотношения (41), (43), а также и

$$(45) \quad g_{T^{(u)}} \geq S_{T^{(u)}} = S_{T^{(u)}-1} + X_{T^{(u)}}^{[u]} > g_{T^{(u)}-1} - u \geq g_{T^{(u)}} - u.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что (45) сразу следует из определений (14) и (13) случайных величин $T^{(u)}$ и $X_k^{[u]}$ в случае, когда последовательность $\{g_n\}$ — невозрастающая. Далее, из равенства (12) в [3] (там оно доказано в лемме 3) имеем

$$(46) \quad E_n(u) = \mathbf{E}[-S_{T^{(u)}}; T^{(u)} \leq n] - g_n \mathbf{P}(T^{(u)} > n).$$

Из этого тождества после очевидных преобразований легко получить оба представления в (44). Кроме того, из (46) очевидно следует, что для всех $n \geq m \geq 1$

(47)

$$E_n(u) - E_m(u) = \mathbf{E}[g_{T^{(u)}} - S_{T^{(u)}}; m < T^{(u)} \leq n] - \mathbf{E}[g_m - g_{T^{(u)} \wedge n}; m < T^{(u)}].$$

Подставляя оценки из (45) в (47), мы приходим к (41).

Наконец, мы имеем из (16) при $u \geq \varepsilon_1 b_1 > g_1^+$, что

$$(48) \quad \begin{aligned} E_1(u) &\geq \mathbf{E}[X_1^{[u]} - g_1; X_1 > 0] \geq \mathbf{E}[X_1^{[\varepsilon_1 b_1]} - g_1; X_1 > 0] \\ &\geq \mathbf{E}[X_1^{[\varepsilon_1 b_1]} - g_1^+; X_1 > g_1^+] = K_0 = \mathbf{E}(X_1^{[\varepsilon_1 b_1]} - g_1^+)^+ > 0, \end{aligned}$$

потому что величина $X_1^{[u]}$ возрастает с ростом $u > 0$, в случае когда $X_1 > 0$. Теперь (41) и (48) дают (43). \square

Лемма 3. В условиях предложения 2

$$(49) \quad |E_n(u) - E_n^*(v, v)| \leq (u + g_1 - g_n) \mathbf{P}(\alpha(v) \leq T^{(u)} \leq n),$$

где

$$(50) \quad E_n^*(u, v) := \mathbf{E}[g_n - S_{T^{(u)}}; T^{(u)} < \alpha(v)] - g_n = E_n^*(v, v).$$

Доказательство. Если $T^{(u)} < \alpha(v)$, то из (32) следует, что $T^{(u)} = T^{(v)}$ и $S_{T^{(u)}} = S_{T^{(v)}}$. Таким образом, (50) доказано.

Теперь из представления (44) и определения (50) мы имеем, что

$$(51) \quad \Delta_n(u, v) := E_n(u) - E_n^*(u, v) = \mathbf{E}[g_n - S_{T^{(u)}}; \alpha(v) \leq T^{(u)} \leq n].$$

Используя (45), получаем

$$|\Delta_n(u, v)| \leq \mathbf{E}[|g_n - g_{T^{(u)}}| + u; \alpha(v) \leq T^{(u)} \leq n] \leq (u + g_1 - g_n) \mathbf{P}(\alpha(v) \leq T^{(u)} \leq n).$$

Последнее неравенство влечёт (49), поскольку $\Delta_n(u, v) = E_n(u) - E_n^*(u, v)$ ввиду (50) и (51). \square

Теперь мы имеем из (49), что

$$\begin{aligned} |E_n(u) - E_n(v)| &\leq |E_n(u) - E_n^*(v, v)| + |E_n(v) - E_n^*(v, v)| \\ &\leq (u + g_1 - g_n) \mathbf{P}(\alpha(v) \leq T^{(u)} \leq n) + (v + g_1 - g_n) \mathbf{P}(\alpha(v) \leq T^{(v)} \leq n) \\ &\leq 2(u + g_1 - g_n) \mathbf{P}(\alpha(v) \leq T_n^{(v)}), \end{aligned}$$

где мы также использовали (34). Итак, (42) доказано. Напомним, что остальные утверждения предложения 2 следуют из леммы 2.

2.4. Верхние оценки вероятностей $\mathbf{P}(T^{(v_n)} > n)$. Ниже мы фиксируем последовательность $\{v_n\}$ и введём некоторые константы K и N , которые могут зависеть от фиксированных последовательностей $\{v_n, b_n, g_n\}$ и от распределений величин $\{X_n\}$.

Лемма 4. *При выполнении условий (b) и (g) для любой последовательности действительных чисел $\{v_n\}$ со свойством (24) существует число $K < \infty$ такое, что*

$$(52) \quad \forall n \geq 1 \quad b_{n+1} \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) \leq K E_n(v_n).$$

Доказательство. Согласно лемме 1

$$\mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) \frac{b_{n+1}}{E_n(v_n)} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{b_{n+1}}{b_n} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi}} < 1.$$

Следовательно, существует натуральное число $N < \infty$ такое, что

$$(53) \quad \forall n \geq N \quad b_{n+1} \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) \leq E_n(v_n).$$

Отметим, что для невозрастающих чисел $\{g_n\}$ условие (16) влечёт, что

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad \forall u > 0 \quad \mathbf{P}(S_n(u) > g_n) &\geq \mathbf{P}(T^{(u)} > n) \\ &\geq \mathbf{P}(X_1 > g_1, X_2 \geq 0, \dots, X_n \geq 0) \geq \mathbf{P}(X_1 > g_1)/2^{n-1} > 0. \end{aligned}$$

Из этого факта и (16) получаем, что $E_n(u) > 0$ для всех $n \geq 1$ и $u > 0$. Следовательно, используя также (43) при $u = v_n \geq \varepsilon_1 b_1$, мы получаем, что

$$(54) \quad \forall n \geq 1 \quad \frac{b_{n+1} \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n)}{E_n(v_n)} \leq \frac{b_{n+1}}{E_1(v_n)} \leq \frac{b_{n+1}}{K_0} < \infty.$$

Теперь (52) вытекает из (53) и (54) при $K := 1 + \max_{2 \leq n \leq N} b_n/K_0 < \infty$. \square

2.5. Доказательство теоремы 1. Нам потребуются два вспомогательных утверждения.

Лемма 5. *Пусть выполнены условия (a), (b) и (g). Тогда для всех $u \geq v_n \geq \underline{v}_n$*

$$(55) \quad \mathbf{P}(T_n^{(u)} \geq \alpha(v_n)) \leq P_n(v_n, v_n) \leq K Q_n(\varepsilon_n) E_n(v_n)/b_n = o(E_n(v_n)/b_n),$$

$$(56) \quad \mathbf{P}(T_n^{(u)} > n) \leq K(1 + Q_n(\varepsilon_n)) E_n(v_n)/b_n = O(E_n(v_n)/b_n).$$

Кроме того, в этом случае

$$(57) \quad \mathbf{P}(T > n) \sim \mathbf{P}(T^{(u)} > n) \sim \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi}} E_n(v_n) b_n.$$

Доказательство. Подставляя оценку (52) в (33), находим, что

$$\begin{aligned} P_n(v_n, v_n) &= \sum_{k=1}^n \mathbf{P}(T^{(v_n)} > k-1) \mathbf{P}(|X_k| > v_n) \leq \sum_{k=1}^n \frac{K E_n(v_n)}{b_k} \mathbf{P}(|X_k| > v_n) \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{K E_n(v_n)}{b_k} \mathbf{P}(|X_k| > \varepsilon_n b_n) = K Q_n(\varepsilon_n) E_n(v_n)/b_n. \end{aligned}$$

И теперь (55) следует из (12).

После этого из (35) и (36) получаем:

$$\begin{aligned} \left| \mathbf{P}(T^{(u)} > n) - \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) \right| &\leq P_n(v_n, v_n) = o(E_n(v_n)/b_n), \\ \left| \mathbf{P}(T > n) - \mathbf{P}(T^{(v_n)} > n) \right| &\leq P_n(v_n, v_n) = o(E_n(v_n)/b_n) \end{aligned}$$

Но эти соотношения вместе с (25) немедленно дают нам (56) и (57). \square

Лемма 6. В условиях леммы 5

$$(58) \quad \forall n \geq 1 \quad \forall u \geq v_n \geq \underline{v}_n \quad |E_n(u) - E_n(v_n)| \leq 2KQ_n(\varepsilon_n)E_n(v_n) \frac{u + g_1 - g_n}{b_n}.$$

В частности, $E_n(u_n) \sim E_n(v_n)$ при выполнении условий теоремы 1.

Доказательство. Подставляя (55) в (42) при $v = v_n$, мы находим (58). Далее, при выполнении условий (3) и (18) мы имеем из (58) при $u = u_n$, что

$$\frac{u_n + g_1 - g_n}{b_n} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad E_n(u_n) - E_n(v_n) = o(E_n(v_n)).$$

Следовательно, $E_n(u_n) \sim E_n(v_n)$. \square

Теперь первое утверждение теоремы 1 непосредственно вытекает из лемм 5 и 6. Доказательство второго основано на следующем утверждении.

Предложение 3. В условиях теоремы 1 последовательность $\{E_n(u_n)\}$ медленно меняется при $b_n \rightarrow \infty$.

В силу замечания 4 без ограничения общности в доказательстве, вместо первоначальных чисел $\{b_n\}$, используются неубывающие числа $b_n := \tilde{b}_n \vee b_1$ для $n > 1$. Определим

$$(59) \quad \bar{\varepsilon}_n := \max_{k \leq n} \varepsilon_k \rightarrow 0, \quad v_n := \bar{\varepsilon}_n b_n = o(b_n), \quad \text{так что} \quad v_n + g_1 - g_n = o(b_n),$$

где также учтено условие (3). Таким образом, в доказательстве используются специальные числа $v_n \geq \underline{v}_n$. Также для произвольного $c \in (0, 1]$ выберем любые целые числа $m(n)$ со следующими свойствами:

$$(60) \quad n \geq m = m(n) \geq 1 \quad \text{и} \quad b_{m(n)} \sim cb_n, \quad \text{так что} \quad Q_{m(n)}(\varepsilon_{m(n)}) \rightarrow 0.$$

Лемма 7. В условиях теоремы 1 имеем:

$$(61) \quad b_n P(v_{m(n)}, v_{m(n)}) = o(E_{m(n)}(v_{m(n)})) \quad \text{и} \quad E_{m(n)}(v_n) \sim E_{m(n)}(v_{m(n)}).$$

Доказательство. Благодаря (60) мы находим из (55) с $m(n)$ вместо n , что

$$(62) \quad b_n P(v_{m(n)}, v_{m(n)}) \leq b_n K Q_{m(n)}(\varepsilon_{m(n)}) E_{m(n)}(v_{m(n)}) / b_{m(n)} = o(E_{m(n)}(v_{m(n)})).$$

Итак, первое соотношение в (61) доказано.

Далее из (42) и (34) с m вместо n имеем:

$$\forall m \geq 1 \quad \forall u \geq v > 0 \quad |E_m(u) - E_m(v)| \leq 2(u + g_1 - g_m)P(v, v).$$

Из этого неравенства при $m = m(n)$, $u = v_n$ и $v = v_{m(n)}$ приходим к

$$|E_{m(n)}(v_n) - E_{m(n)}(v_{m(n)})| \leq 2(v_n + g_1 - g_{m(n)})P(v_{m(n)}, v_{m(n)}).$$

Подставляя (59) и (62) в последнюю оценку, получаем:

$$|E_{m(n)}(v_n) - E_{m(n)}(v_{m(n)})| = o(b_n) \cdot o(E_{m(n)}(v_{m(n)})/b_n) = o(E_{m(n)}(v_{m(n)})).$$

Отсюда следует второе соотношение в (61). \square

Лемма 8. В условиях теоремы 1

$$(63) \quad E_n(v_n) \sim E_{m(n)}(v_n) \sim E_{m(n)}(v_{m(n)}).$$

Доказательство. Ввиду (60) мы находим из (56) с $m(n)$ вместо n , что

$$(64) \quad b_n \mathbf{P}(T_{m(n)}^{(u)} > n) \leq b_n K(1 + Q_{m(n)}(\varepsilon_{m(n)})) E_{m(n)}(v_{m(n)}) / b_{m(n)} = o(E_{m(n)}(v_{m(n)}))$$

для всех $u \geq v_{m(n)}$. Далее, из (41) и (59) при $m = m(n)$, $u = v_n$ и $v = v_{m(n)}$ имеем для всех $u > 0$ что

$$0 \leq E_n(u) - E_{m(n)}(u) \leq (u + g_n - g_{m(n)}) \mathbf{P}(T^{(u)} > m(n)) = o(b_n) \mathbf{P}(T^{(u)} > m(n)).$$

Подставляя теперь (64) в последнюю оценку при $u = v_n$, получаем:

$$|E_n(v_n) - E_{m(n)}(v_n)| = o(E_{m(n)}(v_{m(n)})).$$

Но это отношение влечёт (63), потому что $E_{m(n)}(v_n) \sim E_{m(n)}(v_{m(n)})$ в силу (61). \square

Итак, последовательность $\{E_n(v_n)\}$ медленно меняется при $b_n \rightarrow \infty$, поскольку все условия в определении (17) выполняются когда $U_n = E_n(v_n)$, как это следует из (63). С другой стороны, в условиях теоремы 1 имеем $E_n(u_n) \sim E_n(v_n)$ ввиду леммы 6. Но этот факт означает, что последовательность $\{E_n(u_n)\}$ также медленно меняется при $b_n \rightarrow \infty$.

Таким образом, предложение 3 и теорема 1 доказаны.

2.6. Доказательство следствия 1. Если выполнено условие Линдберга, то по центральной предельной теореме имеет место сходимость (1) с B_n вместо b_n . Но если в этом случае (1) верно ещё и для некоторого другого b_n , то с необходимостью $b_n \sim B_n$. Таким образом, вместо (11) с произвольным b_n достаточно показать, что (11) верно, когда $b_n = B_n$. Но этот факт вытекает из следующего вспомогательного утверждения.

Лемма 9. Если выполняется условие Линдберга (6), то

$$(65) \quad \forall \varepsilon > 0 \quad B_n \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{P}(|X_k| > \varepsilon B_n)}{B_k} \leq B_n \sum_{k=1}^n \frac{\mathbf{E}[X_k^2 : |X_k| > \varepsilon B_n]}{\varepsilon^2 B_n^2 B_k} \leq \frac{2\sqrt{L_n(\varepsilon)}}{\varepsilon^2} \rightarrow 0.$$

Доказательство. Для фиксированных $\varepsilon > 0$ и $B_n > 0$ введем обозначения:

$$v_k := \mathbf{E}[X_k^2 : |X_k| > \varepsilon B_n] \quad \text{и} \quad V_k := \sum_{j=1}^k v_j \leq B_k^2, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ясно, что для всех $n \geq 1$

$$\sum_{k=1}^n \frac{v_k}{B_k} \leq \sum_{k=1}^n \frac{v_k}{\sqrt{V_k}} = \sum_{k=1}^n \frac{V_k - V_{k-1}}{\sqrt{V_k}} \leq \int_0^{\sqrt{V_n}} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{V_n} = 2B_n \sqrt{L_n(\varepsilon)}.$$

В результате получаем (65). \square

2.7. Доказательство утверждения из примера 1. Прежде всего отметим, что при любых числах δ и u_n из (21)

$$(66) \quad \varepsilon_n := \log^{(\delta-1)/3}(n+1) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \varepsilon_n b_n / u_n = O(\log^{(\delta-1)/3-\delta}(n+1)) \rightarrow 0.$$

Таким образом, первые условия в (12) и (18) выполнены.

Теперь из (19) имеем:

$$(67) \quad \forall \varepsilon \in (0, 1] \quad \varepsilon^2 \mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon b_n) \leq C(\mathbf{a}) \frac{\log^{2a} b_n}{b_n^2} = \frac{O(\log^{2a}(n+1))}{n \log^{2a+1}(n+1)} = \frac{O(1)}{n \log(n+1)}.$$

С другой стороны, легко видеть, что для всех действительных c

$$q_n(c) := \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k} \log^c(n+1)} \sim \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x} \log^c(x+1)} \sim \frac{2\sqrt{n}}{\log^c(n+1)} = \frac{2n}{\sqrt{n} \log^c(n+1)}$$

по правилу Лопиталья. Следовательно, при $c = a + 1/2$ из (20) имеем, что

$$(68) \quad \sum_{k=1}^n \frac{b_n}{b_k} = q_n(a + 1/2) = \frac{b_n O(n)}{b_n} = O(n).$$

В силу определения (11) из (67) и (68) следует, что

$$(69) \quad \forall \varepsilon \in (0, 1] \quad \varepsilon^2 Q_n(\varepsilon) = \varepsilon^2 \mathbf{P}(|X_1| > \varepsilon b_n) \sum_{k=1}^n \frac{b_n}{b_k} = \frac{O(1)}{\log(n+1)}.$$

Наконец, полагая $\varepsilon = \varepsilon_n$ в (69), получаем:

$$Q_n(\varepsilon_n) = \frac{O(1)}{\varepsilon_n^2 \log(n+1)} = O(\log^{-2(\delta-1)/3-1}(n+1)) \rightarrow 0,$$

$$Q_n(\varepsilon_n) \frac{u_n}{b_n} = \frac{O(1)}{\varepsilon_n^2 \log(n+1)} = O(\log^{\delta-2(\delta-1)/3-1}(n+1)) \rightarrow 0.$$

Итак, вторые условия в (12) и (18) также верны.

Таким образом, все условия теоремы 1 выполнены и, как следствие, все утверждения этой теоремы имеют место с числами $\{u_n\}$ из (21) при использовании вспомогательной последовательности $\{\varepsilon_n\}$, введённой в (66).

REFERENCES

- [1] Denisov, D., Sakhanenko, A. and Wachtel, V. First-passage times for random walks with non-identically distributed increments. *Ann. Probab.* **46**(6): 3313-3350, 2018.
- [2] Denisov, D., Sakhanenko, A. and Wachtel, V. First-passage times for random walks in the triangular array setting. *A Lifetime of Excursions Through Random Walks and Levy Processes*. Progress in Probability, **78**, 181-203, 2021.
- [3] Doney, R. A. (1995). Spitzer's condition and ladder variables in random walks. *Probab. Theory Related Fields.* **101**: 577-580.
- [4] Loève, M. *Probability Theory I*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag New York, Heidelberg, Berlin, 1977.

ALEXANDER IVANOVICH SAKHANENKO
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
PR. KOPTYUGA, 4,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
E-mail address: aisakh@mail.ru