S(e)MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 517.95
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 35Q35

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ ОБЕРБЕКА–БУССИНЕСКА С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Р.В. Бризицкий

Abstract: The global solvability of the boundary value problem for mass transfer equations has been proven, in which the coefficients of mass expansion and reaction nonlinearly depend on the concentration of the substance, and also depend on spatial variables. The mathematical apparatus is adapted to a specific boundary value problem to prove its solvability with minimal requirements for the initial data. Additional properties of the weak solution are established and their applications are discussed.

Keywords: generalized Boussinesq model, Leray–Schauder principle, maximum principle, global solvability, local uniqueness.

Brizitskii, R.V., Generalised Boussinesq model with variable coefficients.

Работа выполнена в рамках госзадания ИПМ ДВО РАН (№ 075-01290-23-00) и при поддержке Министерства науки и высшего образования РФ (проект № 075-02-2023-946).

Поступила 1 января 2023 г., опубликована 31 декабря 2023 г.

1 Введение. Постановка краевой задачи

Исследование краевых и экстремальных задач для уравнений тепломассопереноса началось с изучения моделей в рамках приближения Буссинеска (см. [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]). Однако зависимость некоторых коэффициентов рассматриваемых моделей от концентрации вещества и температуры является вполне естественной с физической точки зрения и, следовательно, и должна быть учтена. Некоторую промежуточную нишу занимают работы [8, 9, 10, 11] по исследованию краевых и экстремальных задач для нелинейной модели реакции–диффузии–конвекции с зависимыми от решения коэффициентами, как в уравнении, так и в граничных условиях, а также статьи [12, 13, 14], посвященные исследованию близких моделей сложного теплообмена. Наконец, отметим работы [15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32], посвященные исследованию краевых и экстремальных задач для различных моделей, обобщающих приближение Буссинеска. Отдельно стоит упомянуть статьи [33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42], в которых рассматриваются усложненные, в том числе и реологические, модели гидродинамики.

В настоящей работе исследуется краевая задача для уравнений массопереноса, в которой коэффициенты массобмена и реакции нелинейно зависят от концентрации вещества, а так же зависят от пространственных переменных.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается следующая краевая задача:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \beta(\varphi,\mathbf{x})\varphi\mathbf{G},\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ на } \Omega, \tag{1}$$

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi,\mathbf{x})\varphi = f \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор скорости, функция φ имеет смысл концентрации примеси, $p = P/\rho$, где P – давление, $\rho = \mathrm{const}$ – плотность жидкости, $\nu = \mathrm{const} > 0$ – кинематическая вязкость, $\lambda = \lambda(\mathbf{x}) > 0$ – коэффициент диффузии, где $\mathbf{x} \in \Omega$, $\beta = \beta(\varphi,\mathbf{x})$ – коэффициент массового расширения, $\mathbf{G} = -(0,0,G)$ – ускорение свободного падения, $\mathbf{f}$ и f – объемные плотности, соответственно, внешних сил и внешних источников примеси, функция $k = k(\varphi,\mathbf{x})$ имеет смысл коэффициента реакции. Ниже на задачу (1)–(3) при заданных функциях $\mathbf{f}, f, \lambda, \beta, k$ и $\mathbf{g}$ будем ссылаться как на задачу 1.

С прикладной точки зрения, модель (1)–(3) учитывает довольно произвольную зависимость скорости распада примеси от ее концентрации, а также неоднородность протекания данной реакции в пространстве. Последнее может быть вызвано действием реагента, предназначенного для очистки водоема от загрязнений. В этом случае естественно, что коэффициент реакции λ так же зависит и от пространственных переменных. В качестве примера такого коэффициента реакции можно рассмотреть функцию $k(\varphi,\mathbf{x}) = \alpha(\mathbf{x})\varphi^2$, где функция α, моделирующая зависимость скорости реакции от $\mathbf{x} \in \Omega$, может играть роль управления в соответствующей экстремальной задаче (см. [9]). При необходимости могут быть реализованы аналогичные варианты коэффициента массового расширения $\beta(\varphi, \mathbf{x})$.

В данной статье с использованием принципа Лере–Шаудера доказывается глобальная разрешимость задачи 1, а так же устанавливаются достаточные условия локальной единственности. Сделав акцент на зависимости от φ коэффициента β можно предположить, что полученный результаты является частным случаем результатов [17] в виду использования в работе однородного условия Дирихле для φ. Однако это же условие позволяет отказаться от требования ограниченности коэффициента β, как [17], заменив его условием степенного роста (см. условие (v)).

В свою очередь, ограниченность близкой нелинейности в [17] достигнута за счет установленного в цитируемой работе принципа минимума для температуры. Полученный в [25] принципа максимума и минимума для концентрации φ позволяет не только применить подход работы [17] к исследованию задачи 1 с неоднородным граничным условием для концентрации, но и несколько расширить варианты условий на функцию $\beta(\varphi, \mathbf{x})$. Однако такой принцип установлен при жестких условиях на другой зависимый от φ коэффициент k. По этой причине мы и выделили краевую задачу с однородным условием Дирихле для φ.

Так же отметим, что настоящая статья обобщает результаты [22] и [24], а так же некоторые результаты [23] и [25] за счет наличия в уравнениях модели двух зависимых от концентрации вещества коэффициентов.

2 Разрешимость краевой задачи

Будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D означает область Ω или ее подобласть $Q \subset \Omega$ или границу Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ обозначим, соответственно, норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Нормы и скалярные произведения в $L^2(Q)$, $L^2(\Omega)$ и $L^2(\Gamma)$ обозначим, соответственно, через $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$, $\|\cdot\|_\Omega$ $(\cdot,\cdot)_\Omega$, $\|\cdot\|_\Gamma$ и $(\cdot,\cdot)_\Gamma$

Введем следующие функциональные множества:

$$L^p_+(D) = \{k \in L^p(D) : k \geq 0\},\ p \geq 3/2,$$

$$H^s_{\lambda_0}(\Omega) = \{\lambda \in H^s(\Omega) : \lambda \geq \lambda_0 > 0\},\ s > 3/2,$$

и пространство

$$L^2_0(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega) : (h, 1) = 0\}.$$

Определим пространство тестовых функций для вектора скорости:

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}.$$

Будем использовать произведения пространств

$$H = H^1_0(\Omega)^3 \times H^1_0(\Omega),\ \ W = V \times H^1_0(\Omega),$$

наделенные нормами:

$$\|(\mathbf{w},h)\|_H^2 = \|(\mathbf{w},h)\|_W^2 = \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^2 + \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}^2,$$

и двойственные к H и W функциональные пространства

$$H^* = H^{-1}(\Omega)^3 \times H^{-1}(\Omega), \;\; W^* = V^* \times H^{-1}(\Omega).$$

Пусть выполняются следующие условия:

(i) Ω – ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$, состоящей из N связных компонент Γ^j, $j = 1, 2, ..., N$;

(ii) $\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s > 3/2$, $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$, $f \in H^{-1}(\Omega)$;

(iii) $\mathbf{g} \in H^{1/2}(\Gamma)^3$, $(\mathbf{g}, \mathbf{n})_{\Gamma^j} = 0$, $j = 1, 2, ..., N$;

(iv) для любой функции $w \in H^1_0(\Omega)$ имеет место вложение $\beta(w, \cdot) \in L^p_+(\Omega)$, где $p \geq 5/3$ и не зависит от w, и на любом шаре $B_r = \{w \in H^1_0(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r справедливо неравенство:

$$\|\beta(w_1, \cdot) - \beta(w_2, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L_\beta \|w_1 - w_2\|_{L^4(\Omega)} \;\; \forall w_1, w_2 \in H^1_0(\Omega),$$

где L_β – константа, зависящая от r, но не зависящая от $w_1, w_2 \in B_r$;

(v) функция $\beta(\varphi, \cdot)$ является ограниченной в том смысле, что существуют положительные константы A, B, зависящие от β, такие, что

$$\|\beta(\varphi, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq A\|\varphi\|^t_{1,\Omega} + B, \; p \geq 5/3, \; t \geq 0; \tag{4}$$

(vi) для любой функции $v \in H^1_0(\Omega)$ справедливо вложение $k(v, \cdot) \in L^p_+(\Omega)$ для $p \geq 5/3$, где p не зависит от v, и на любом шаре $B_r = \{v \in H^1(\Omega) : \|v\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r справедливо неравенство:

$$\|k(v_1, \cdot) - k(v_2, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L_k \|v_1 - v_2\|_{L^4(\Omega)} \;\; \forall v_1, v_2 \in H^1_0(\Omega),$$

где L_k – константа, зависящая от r, но не зависящая от $v_1, v_2 \in B_r$;

Отметим, что условия (iv), (v), и условие (v) описывают операторы, действующие из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, где $p \geq 5/3$. Это позволяет учитывать зависимость коэффициентов массообмена и реакции, как от компоненты φ решения $(\mathbf{u}, \varphi, p)$ задачи 1, так и от пространственных переменных $\mathbf{x} \in \Omega$.

Например,

$$\beta = \varphi^2|\varphi| \text{ (или } \beta = 1/(1+\varphi^2)) \text{ в } Q_1 \subset \Omega \text{ и } \beta = \beta_0(\mathbf{x}) \in L^2_+(Q_2) \text{ в } Q_2 = \Omega \backslash Q_1,$$

$$k = \varphi^2 \text{ в } Q_1 \subset \Omega \text{ и } k = k_0(\mathbf{x}) \in L^{5/3}_+(Q_2) \text{ в } Q_2.$$

С физической точки зрения коэффициент k отвечает ситуации, когда в подобласти $Q \subset \Omega$ скорость распада примеси пропорциональна квадрату ее концентрации, в то время, как вне подобласти Q, скорость данной химической реакции зависит только от пространственных переменных. Аналогично, коэффициент массового расширения β может так же менять зависимость от φ на зависимость от $\mathbf{x} \in \Omega$.

Напомним, что по теореме вложения Соболева, пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в пространство $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$, и с некоторыми константами C_s, зависящими от s и Ω, справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \le C_s \|\varphi\|_{1,\Omega} \ \ \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

Справедлива следующая техническая лемма (см. подробно в [3, 44]).

Лемма 1. *Пусть выполняются условия (i), (ii), $\beta_0, k_0 \in L^p_+(\Omega), p \ge 5/3$, $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $\lambda \in H^s_{\lambda_0}(\Omega)$, $s > 3/2$. Тогда существуют положительные константы $C_0, C_1, \delta_0, \delta_1, \gamma_1, \gamma_1'$, $\gamma_2, \gamma_2', \gamma_p, \beta_1$, β_2, зависящие от Ω или от Ω и p, с которыми выполняются следующие соотношения:*

$$|(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{w})| \le C_0 \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \ \ \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3,$$

$$|(\beta_0 h \mathbf{G}, \mathbf{v})| \le \beta_1 \|\beta_0\|_{L^p(\Omega)} \|h\|_{1,\Omega} \|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \ \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3, h \in H^1(\Omega),$$

$$|((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{h}, \mathbf{z})| \le \gamma_1' \|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)^3} \|\mathbf{h}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{z}\|_{1,\Omega} \le$$

$$\le \gamma_1 \|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{h}\|_{1,\Omega} \|\mathbf{z}\|_{1,\Omega} \ \forall \mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3, \tag{6}$$

$$((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}), \ ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \ \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \ \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3, \tag{7}$$

$$\nu(\nabla \mathbf{v}, \nabla \mathbf{v}) \ge \nu_* \|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}, \ \ \nu_* = \delta_0 \nu \ \ \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \tag{8}$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \mathbf{v} \ne \mathbf{0}} -(\operatorname{div}\mathbf{v}, p)/\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \ge \beta_2 \|p\|_\Omega \ \ \forall p \in L^2_0(\Omega), \tag{9}$$

$$|(\lambda \nabla h, \nabla \eta)| \le C_1 \|\lambda\|_{s,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega},$$

$$|(k_0 h, \eta)| \le \gamma_p \|k_0\|_{L^p(\Omega)} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega}, \tag{10}$$

$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla h, \eta)| \le \gamma_2' \|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \le$$

$$\le \gamma_2 \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \|h\|_{1,\Omega} \|\eta\|_{1,\Omega} \ \forall h, \eta \in H^1(\Omega), \tag{11}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla h, h) = 0, \ \ (\lambda \nabla h, \nabla h) \ge \lambda_* \|h\|^2_{1,\Omega} \ \forall h \in H^1_0(\Omega), \ \ \lambda_* \equiv \delta_1 \lambda_0. \tag{12}$$

При доказательстве разрешимости неоднородной краевой задачи (1)–(3) важную роль играет следующая лемма о лифтинге скорости. Под лифтингом скорости мы понимаем функцию $\mathbf{u}_0 \in H^1(\Omega)^3$, удовлетворяющую граничному условию $\mathbf{u}_0|_\Gamma = \mathbf{g}$ (см. [3, 43, 44]).

Лемма 2. *Пусть выполняется условие (i) и функция $\mathbf{g}$ удовлетворяет условию (iii). Тогда для произвольного (малого) $\varepsilon > 0$ существует функция $\mathbf{u}_\varepsilon \in H^1(\Omega)^3$, такая что*

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\varepsilon = 0 \ \textit{в} \ \Omega, \ \ \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{g} \ \textit{на} \ \Gamma,$$

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{1,\Omega} \le C_\varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \ \ |((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u}_\varepsilon, \mathbf{v})| \le \varepsilon \|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma} \|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} \ \ \forall \mathbf{v} \in V. \tag{13}$$

Здесь константа C_ε зависит от ε и от Ω.

Из второй оценки (10) для функции $k(\varphi,\cdot)$, удовлетворяющей условию (vi), вытекает неравенство:

$$|((k(\varphi_1,\cdot)-k(\varphi_2,\cdot))\varphi,\eta)| \le$$
$$\le \gamma_p L_k \|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \ \ \forall\varphi,\varphi_1,\varphi_2,\eta\in H^1(\Omega). \qquad (14)$$

Для доказательства глобальной разрешимости задачи 1 мы применим теорему Лере–Шаудера.

Умножим первое уравнение в (1) на функцию $\mathbf{v}\in H_0^1(\Omega)^3$, а уравнение (2) умножим на функцию $h\in H_0^1(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω с применением формул Грина. Приходим к слабой формулировке задачи 1:

$$\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})+((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v})-(p,\operatorname{div}\mathbf{v})=$$
$$=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle+(\beta(\varphi,\cdot)\,\varphi,\mathbf{G},\mathbf{v}) \quad \forall\mathbf{v}\in H_0^1(\Omega)^3, \qquad (15)$$
$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla h)+(k(\varphi,\cdot)\varphi,h)+(\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi,h)=\langle f,h\rangle \quad \forall h\in H_0^1(\Omega), \qquad (16)$$
$$\operatorname{div}\mathbf{u}=0 \text{ в } \Omega, \ \ \mathbf{u}=\mathbf{g} \text{ на } \Gamma. \qquad (17)$$

Тройку $(\mathbf{u},\varphi,p)\in H^1(\Omega)^3\times H_0^1(\Omega)\times L_0^2(\Omega)$, удовлетворяющую (15)–(17), назовем слабым решением задачи 1.

Рассмотрим сужение (15) на пространство V:

$$\nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v})+((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v})=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle+(\mathbf{b}\varphi,\mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v}\in V. \qquad (18)$$

Для доказательства существования слабого решения задачи 1 достаточно доказать существование решения $(\mathbf{u},\varphi)\in H^1(\Omega)^3\times H_0^1(\Omega)$ задачи (16)–(18). О восстановлении давления p из уравнения (18) см. [44, с. 89].

Выбирая ε из условия

$$\varepsilon=\varepsilon_0\le\delta_0\nu/(2\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma})\Rightarrow|((\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{u}_{\varepsilon_0},\mathbf{v})|\le(\delta_0\nu/2)\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 \ \forall\mathbf{v}\in V, \qquad (19)$$

будем искать скорость $\mathbf{u}$ в виде суммы: $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{w}$, где $\mathbf{u}_0\equiv\mathbf{u}_{\varepsilon_0}$ и $\mathbf{w}\in V$ – неизвестная функция.

Подставляя $\mathbf{u}=\mathbf{u}_0+\mathbf{w}$ в (18), (16), приходим к соотношениям

$$\nu(\nabla\mathbf{w},\nabla\mathbf{v})+((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{w},\mathbf{v})+((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v})+((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{w},\mathbf{v})=$$
$$=\langle\mathbf{f}_1,\mathbf{v}\rangle+(\beta(\varphi,\cdot)\varphi\,\mathbf{G},\mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v}\in V, \qquad (20)$$
$$(\lambda\nabla\varphi,\nabla h)+(k(\varphi,\cdot)\varphi,h)+$$
$$+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla\varphi,h)+(\mathbf{w}\cdot\nabla\varphi,h)=\langle f,h\rangle \ \ \forall h\in H_0^1(\Omega). \qquad (21)$$

Здесь

$$\langle\mathbf{f}_1,\mathbf{v}\rangle=\langle\mathbf{f},\mathbf{v}\rangle-\nu(\nabla\mathbf{u}_0,\nabla\mathbf{v})-((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) \qquad (22)$$

и справедлива оценка:

$$\|\mathbf{f}_1\|_{-1,\Omega}\le M_{\mathbf{f}_1}=\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}+\nu C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}+\gamma_1 C_{\varepsilon_0}^2\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}^2. \qquad (23)$$

Сложив (20), (21), получаем

$$a((\mathbf{w},\varphi),(\mathbf{v},h))+((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{w},\mathbf{v})+((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v})+$$
$$+((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{w},\mathbf{v})-(\beta(\varphi,\cdot)\,\varphi\mathbf{G},\mathbf{v})+(k(\varphi,\cdot)\varphi,h)+$$
$$+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla\varphi,h)+(\mathbf{w}\cdot\nabla\varphi,h)=\langle\mathbf{F},(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} \ \ \forall(\mathbf{v},h)\in H. \qquad (24)$$

Здесь

$$a((\mathbf{w},\varphi),(\mathbf{v},h)) = \nu(\nabla\mathbf{w},\nabla\mathbf{v}) + (\lambda\nabla\varphi,\nabla h),$$
$$\langle \mathbf{F},(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} = \langle \mathbf{f}_1,\mathbf{v}\rangle + \langle f,h\rangle \ \ \forall(\mathbf{v},h)\in W = V\times H_0^1(\Omega).$$

Из леммы 1 вытекает непрерывность и коэрцитивность билинейной формы a на пространстве H:

$$a((\mathbf{v},h),(\mathbf{v},h)) \geq \delta_*(\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega} + \|h\|^2_{1,\Omega}) \ \ \forall(\mathbf{v},h)\in H, \ \ \delta_* = \min\{\nu_*,\lambda_*\}. \tag{25}$$

Для доказательства разрешимости задачи (24) применим теорему Лере–Шаудера (см. [13]). Для этого положим $\mathbf{z} = (\mathbf{w},\varphi)\in W$ и введем нелинейный оператор G по формуле

$$a(G(\mathbf{z}),(\mathbf{v},h)) = \langle \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}),(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} =$$
$$= ((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{w},\mathbf{v}) + ((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) + ((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{w},\mathbf{v}) - (\beta(\varphi,\cdot)\,\varphi\mathbf{G},\mathbf{v}) +$$
$$+(k(\varphi,\cdot)\,\varphi,h) + (\mathbf{u}_0\cdot\varphi,h) + (\mathbf{w}\cdot\nabla\varphi,h) = \langle \mathbf{F},(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} \ \ \forall(\mathbf{v},h)\in W. \tag{26}$$

С учетом (25), по теореме Лакса–Мильграма из (26) следует, что для любой пары $\mathbf{z} = (\mathbf{w},\varphi)\in W$ существует единственная пара $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1,s_2)\in W$ и справедливо следующее равенство:

$$a((\mathbf{s}_1,s_2),(\mathbf{v},h)) = \langle \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}),(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} \ \ \forall(\mathbf{v},h)\in W.$$

В таком случае, оператор G, определенный формулой (26), действует из W в W и ставит в соответствие каждой паре функций $\mathbf{z} = (\mathbf{w},\varphi)\in W$ элемент $G(\mathbf{z})\in W$.

Для доказательства существования решения задачи (24) достаточно доказать существование решения $\mathbf{z}\in W$ операторного уравнения

$$\mathbf{z} + G(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \text{ в } W. \tag{27}$$

Вычитая (26), записанного для $\mathbf{z} = \mathbf{z}_2\in W$, из (26) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1\in W$, получаем

$$a(G(\mathbf{z}_1) - G(\mathbf{z}_2),(\mathbf{v},h)) = ((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2),\mathbf{v}) + (((\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v}) +$$
$$+((\mathbf{w}_1\cdot\nabla)(\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2),\mathbf{v}) + (((\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)\cdot\nabla)\mathbf{w}_2,\mathbf{v}) -$$
$$-[((\beta(\varphi_1,\cdot) - \beta(\varphi_2,\cdot))\varphi_1\mathbf{G},\mathbf{v}) + (\beta(\varphi_2,\cdot)(\varphi_1-\varphi_2)\mathbf{G},\mathbf{v})] +$$
$$+((k(\varphi_1,\cdot) - k(\varphi_2,\cdot))\varphi_1,h) + (k(\varphi_2,\cdot)(\varphi_1-\varphi_2),h) +$$
$$+(\mathbf{u}_0\cdot\nabla(\varphi_1-\varphi_2),h) + ((\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2)\cdot\nabla\varphi_1,h) +$$
$$+(\mathbf{w}_2\cdot\nabla(\varphi_1-\varphi_2),h) \ \ \forall(\mathbf{v},h)\in H_0^1(\Omega)^3\times H_0^1(\Omega). \tag{28}$$

Применяя лемму 2.1, неравенство Гельдера, учитывая свойства (iv) и (vi), оценку (5), из (28) приходим к неравенству

$$|a(G(\mathbf{z}_1) - G(\mathbf{z}_2),(\mathbf{v},h))| \leq 2\gamma_1'\|\mathbf{u}_0\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} +$$
$$\gamma_1'(\|\mathbf{w}_1\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{w}_2\|_{1,\Omega})\|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} +$$
$$+C_6\|\beta(\varphi_2,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} +$$
$$+L_\beta C_6\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} +$$
$$\gamma_p L_k\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi_1\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} + C_6\|k(\varphi_2,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega} +$$

$$+\gamma_2'\|\mathbf{u}_0\|_{1,\Omega}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega}+\gamma_2'\|\mathbf{w}_2\|_{1,\Omega}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}+$$
$$+\gamma_2'\|\varphi_1\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}\ \ \forall(\mathbf{v},h)\in W. \tag{29}$$

Положим $\mathbf{y}=(\mathbf{v},h)$. Из (29) вытекает неравенство

$$|a(G(\mathbf{z}_1)-G(\mathbf{z}_2),\mathbf{y})|\le(2\gamma_1'\|\mathbf{u}_0\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+\gamma_1'(\|\mathbf{w}_1\|_{1,\Omega}+\|\mathbf{w}_2\|_{1,\Omega})\|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+C_6\|\beta(\varphi_1,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}+$$
$$+L_\beta C_6\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)}+$$
$$+\gamma_pL_k\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi_1\|_{1,\Omega}+C_6\|k(\varphi_2,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}+$$
$$+\gamma_2'\|\mathbf{u}_0\|_{1,\Omega}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}+\gamma_2'\|\mathbf{w}_2\|_{1,\Omega}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+\gamma_2'\|\varphi_1\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\|_{L^4(\Omega)^3})\|\mathbf{y}\|_W\ \ \forall\mathbf{y}\in W. \tag{30}$$

Полагая $\mathbf{y}=G(\mathbf{z}_1)-G(\mathbf{z}_2)$ в (30), с учетом (25) приходим к оценке

$$\|G(\mathbf{z}_1)-G(\mathbf{z}_2)\|_H\le 2\gamma_1'\|\mathbf{u}_0\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+\gamma_1'(\|\mathbf{w}_1\|_{1,\Omega}+\|\mathbf{w}_2\|_{1,\Omega})\|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+C_6\|\beta(\varphi_1,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}+$$
$$+L_\beta C_6\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)}+$$
$$+\gamma_pL_k\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi_1\|_{1,\Omega}+C_6\|k(\varphi_2,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}+$$
$$+\gamma_2'\|\mathbf{u}_0\|_{1,\Omega}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}+\gamma_2'\|\mathbf{w}_2\|_{1,\Omega}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+\gamma_2'\|\varphi_1\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}_1-\mathbf{w}_2\|_{L^4(\Omega)^3}. \tag{31}$$

В силу непрерывности и компактности вложений $H^1(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ и $H^1(\Omega)^3\subset L^p(\Omega)^3$ при $p<6$, неравенство (31) означает непрерывность и компактность оператора $G:W\to W$.

Наряду с (27), рассмотрим операторное уравнение

$$\mathbf{z}_\mu+\mu G(\mathbf{z}_\mu)=0\text{ in }W,\ \ \mu\in(0,1]$$

и вариационное равенство

$$a((\mathbf{w}_\mu,\varphi_\mu),(\mathbf{v},h))+w((\mathbf{u}_0\cdot\nabla)\mathbf{w}_\mu,\mathbf{v})+w((\mathbf{w}_\mu\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{v})+$$
$$+w((\mathbf{w}_\mu\cdot\nabla)\mathbf{w}_\mu,\mathbf{v})-\mu(\beta(\varphi_\mu,\cdot)\,\varphi_\mu\mathbf{G},\mathbf{v})+\mu(k(\varphi_\mu,\cdot)\varphi_\mu,h)+$$
$$+\mu(\mathbf{u}_0\cdot\nabla\varphi_\mu,h)+\mu(\mathbf{w}_\mu\cdot\nabla\varphi_\mu,h)=\mu\langle\mathbf{F},(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H}\ \ \forall(\mathbf{v},h)\in H. \tag{32}$$

Полагая $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ и $h=\varphi_\mu$ в (32) и учитывая (12), приходим к соотношению

$$(\lambda\nabla\varphi_\mu,\nabla\varphi_\mu)+\mu(k(\varphi_\mu,\cdot)\varphi_\mu)=\mu\langle f,\varphi_\mu\rangle. \tag{33}$$

С учетом леммы 1 из (33) выводим оценку

$$\|\varphi_\mu\|_{1,\Omega}\le\mu M_\varphi,\ \ M_\varphi\equiv C_*\|f\|_{-1,\Omega},\ \ \mu\in(0,1]. \tag{34}$$

Полагая $\mathbf{v}=\mathbf{w}_\mu$ и $h=0$ в (32) и учитывая (7), приходим к соотношению

$$(\nabla\mathbf{w}_\mu,\nabla\mathbf{w}_\mu)+\mu((\mathbf{w}_\mu\cdot\nabla)\mathbf{u}_0,\mathbf{w}_\mu)=\mu(\beta(\varphi_\mu,\cdot)\varphi_\mu\mathbf{G},\mathbf{w}_\mu)+\mu\langle\mathbf{f}_1,\mathbf{w}_\mu\rangle. \tag{35}$$

Из (35) с учетом леммы 2 и (19) и свойства (v) получаем неравенство

$$(\delta_*/2)\|\mathbf{w}_\mu\|_{1,\Omega} \le \mu\beta_1(A\|\varphi_\mu\|^t_{1,\Omega} + B)\|\varphi_\mu\|_{1,\Omega} + \mu M_{\mathbf{f}_1}. \tag{36}$$

где параметр $M_{\mathbf{f}_1}$ определен в (23).

С учетом (34) отсюда приходим к оценке

$$\|\mathbf{w}_\mu\|_{1,\Omega} \le \mu M_{\mathbf{w}}, \;\; M_{\mathbf{w}} \equiv (2/\delta_*)[\beta_1(AM^t_\varphi + B)M_\varphi + M_{\mathbf{f}_1}]. \tag{37}$$

Из (37) и (34) выводим

$$\|\mathbf{z}_\mu\|_{1,\Omega} \le \mu(M_{\mathbf{w}} + M_\varphi), \; \mu \in (0,1]. \tag{38}$$

Из оценки (38) вытекает, что

$$\|\mathbf{z}_\mu\|_{1,\Omega} \le M_{\mathbf{w}} + M_\varphi. \tag{39}$$

В таком случае, в силу теоремы Лере–Шаудера существует решение $\mathbf{z} \in W$ операторного уравнения (27), эквивалентного задаче (24), для которого справедлива оценка (39).

Это означает, что существует слабое решение $(\mathbf{u}, \varphi) \in W$ задачи (16)–(18), где $\mathbf{u} = \mathbf{w} + \mathbf{u}_0$ и для него справедливы оценки

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le M_{\mathbf{u}} \equiv M_{\mathbf{w}} + C_{\varepsilon_0}\|\mathbf{g}\|_{1/2,\Gamma}, \tag{40}$$

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \le M_\varphi = C_*\|f\|_{-1,\Omega}. \tag{41}$$

В силу (9), для давления p и для любого (произвольно малого) числа $\delta > 0$ существует функция $\mathbf{v}_0 \in H^1_0(\Omega)^3$, $\mathbf{v}_0 \neq 0$ такая, что

$$-(\operatorname{div}\mathbf{v}_0, p) \ge \beta_3\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|p\|_\Omega, \; \beta_3 = (\beta_2 - \delta) > 0.$$

Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ в (15), с учетом последнего неравенства и леммы 1, получаем, что

$$\beta_3\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|p\|_\Omega \le \nu C_0\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \gamma_1\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} +$$
$$+\beta_1(A\|\varphi\|^t_{1,\Omega} + B)\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}.$$

Разделив на $\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega} \neq 0$ и учитывая оценки (40), (41), отсюда выводим, что

$$\|p\|_\Omega \le M_p = \beta_3^{-1}[(\nu C_0 + \gamma_1 M_{\mathbf{u}})M_{\mathbf{u}} + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} + \beta_1(AM^t_\varphi + B)M_\varphi]. \tag{42}$$

Далее установим достаточные условия единственности решения задачи (15)–(17). Пусть $(\mathbf{u}_i, \varphi_i, p_i) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$, $i = 1, 2$, – решения задачи (15)–(17). Несложно показать, что разности

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in H^1_0(\Omega), \;\; \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in V$$

удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi_1, \cdot)\varphi, h) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\varphi, h) =$$
$$= -((k(\varphi_1, \cdot) - k(\varphi_2, \cdot))\varphi_2, h) - (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi_2, h) \; \forall h \in H^1_0(\Omega), \tag{43}$$

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$$
$$= (((\beta(\varphi_1, \cdot) - \beta(\varphi_2, \cdot))\varphi_2\mathbf{G}, \mathbf{v}) + (\beta(\varphi_1, \cdot)\varphi\mathbf{G}, \mathbf{v}) -$$
$$-((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \;\; \forall \mathbf{v} \in V. \tag{44}$$

Полагая $h = \varphi$ в (43) и $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ в (44), из леммы 1 с учетом (5), приходим к оценкам

$$\lambda_* \|\varphi\|_{1,\Omega} \le \gamma_p L_k M_\varphi \|\varphi\|_{1,\Omega} + \gamma_2 M_\varphi \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}, \tag{45}$$

$$\nu_* \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le \beta_1 L_\beta M_\varphi \|\varphi\|_{1,\Omega} + \beta_1 (A M_\varphi^t + B)\|\varphi\|_{1,\Omega} + \gamma_1 M_{\mathbf{u}} \|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}. \tag{46}$$

Пусть выполняются следующие условия малости:

$$\gamma_2 M_\varphi + \gamma_1 M_{\mathbf{u}} \le \nu_*,$$

$$\gamma_p L_k M_\varphi + \beta_1 L_\beta M_\varphi + \beta_1 (A M_\varphi^t + B) < \lambda_*. \tag{47}$$

Тогда из оценок (45) и (46) вытекает, что $\|\varphi\|_{1,\Omega} = 0$ и $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ в Ω.

Вычитая (15) при $(\mathbf{u}_2, \varphi_2, p_2)$ из (15) при $(\mathbf{u}_1, \varphi_1, p_1)$ и принимая во внимание, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ и $\varphi = 0$, получаем, что разность $p = p_1 - p_2$ удовлетворяет уравнению

$$-(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0 \ \ \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Тогда на основании (9) заключаем, что $p = 0$, т.е. $p_1 = p_2$.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(vi). Тогда существует слабое решение $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ задачи 1, для которого справедливы оценки (40), (41) и (42). Если, к тому же, выполняются условия (47), то слабое решение задачи 1 единственно.*

3 Свойства слабого решения

Применив отличный от [17] математический аппарат, мы доказали глобальную разрешимость задачи 1 без дополнительных требований на ее исходные данные. Однако в случае неоднородного условия Дирихле для концентрации φ подобных требований избежать вряд ли удастся. Например, в [17] дополнительные условия на исходные данные краевой задачи обеспечили справедливость принципа минимума для температуры среды (аналог φ), при этом функция $\beta(t)$ считалась убывающей.

Замечание 1. При выводе априорных оценок из вариационного равенства (32) оценка (34) для φ_μ является ключевой. При неоднородном условии Дирихле для концентрации φ, вместо (34) получается “промежуточная” оценка вида (см. [24, 25]):

$$\|\varphi_\mu\|_{1,\Omega} \le \tilde{C} \|\mathbf{w}_\mu\|_{1,\Omega}$$

и применить условия (v) для оценки L^p-нормы функции $\beta(\varphi, \cdot)$ не удастся. Здесь же отметим, что применяя теорему Шаудера и выполнив соответствующую линеаризацию, мы столкнемся с той же проблемой и в случае однородного граничного условия для φ. Действительно, оценить $\|\beta(c, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}$ для всех $c \in H_0^1(\Omega)$, где $p > 5/3$, в слагаемом $(\beta(c, \cdot)\varphi \mathbf{G}, \mathbf{v})$ без дополнительных условий так же не удастся (см. [17], а так же [23, 25]).

Будем далее считать, что уравнения (1), (2) рассматриваются при следующих граничных условиях:

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}, \quad \varphi = \psi \text{ на } \Gamma, \tag{48}$$

где $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ – заданная функция.

Ниже на задачу (1), (2), (48) при заданных функциях $f, \mathbf{f}, \beta, k$ и $\mathbf{g}, \psi$ будем ссылаться как на задачу 2.

Покажем далее, при каких условиях на исходные данные задачи 2 и, в частности, задачи 1, справедлив принцип максимума и минимума для концентрации вещества.

Пусть выполняется следующее условие:

(vii) $\psi_{\min} \le \psi \le \psi_{\max}$ п.в. на Γ, $f_{\min} \le f \le f_{\max}$, $\lambda_{\min} \le \lambda \le \lambda_{\max}$ п.в. в Ω.

Здесь $\psi_{\min}$, $\psi_{\max}$ и $f_{\min}$, $f_{\max}$ – неотрицательные числа, а $\lambda_{\min}$ и $\lambda_{\max}$ – положительные числа.

Будем так же считать, что

(viii) нелинейность $k(\varphi, \cdot)\varphi$ является монотонной в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2, \cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \ge 0 \ \ \forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega).$$

При этом коэффициент реакции k имеет следующий вид:

(ix) $k(\varphi, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x})k_1(\varphi)$, где $k_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ – непрерывная функция, $0 < a_{\min} \le a(\mathbf{x}) \le a_{\max} < \infty$ п.в. в Ω и функциональное уравнения

$$k_1(s)\, s = f_{\max}/a_{\min} \text{ и } k_1(t)\, t = f_{\min}/a_{\max}, \quad s, t \in (0, +\infty)$$

имеют, по крайней мере, по одному решению s_* и t_*, соответственно.

Из результатов [25] вытекает следующая теорема.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (i)–(ix) и $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда если существует слабое решение $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ задачи 2, то для его компоненты φ справедлив следующий принцип максимума и минимума:*

$$m \le \varphi \le M \ \text{п.в. в } \Omega,$$
$$M = \max\{\psi_{\max}, M_1\}, \ \ m = \min\{\psi_{\min}, m_1\}. \tag{49}$$

Здесь M_1 – минимальный (положительный) корень уравнения $k_1(M_1)M_1 = f_{\max}/a_{\min}$, а m_1 – максимальный (положительный) корень уравнения $k(m_1)m_1 = f_{\min}/a_{\max}$

Замечание 2. Для степенных коэффициентов реакции параметры M_1 и m_1 легко вычисляются. Например, для $k(\varphi) = \varphi^2$ получаем, что $M_1 = f^{1/3}_{\max}$ и $m_1 = f^{1/3}_{\min}$.

Несложно заметить, что из теоремы 2 вытекает следующая

Теорема 3. *Пусть выполняются условия (i)–(ix). Тогда для компоненты φ слабого решения $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$ задачи 1 справедлив следующий принцип максимума и минимума:*

$$0 \le \varphi \le M_1 \ \text{п.в. в } \Omega, \tag{50}$$

Здесь M_1 – минимальный (положительный) корень уравнения $k_1(M_1)M_1 = f_{\max}/a_{\min}$.

Замечание 3. Как видно из теорем 2 и 3, принцип максимум и минимума для концентрации зависит от вида коэффициента реакции. Здесь отметим работу [11], в которой установлен принцип максимума для коэффициентов реакции более общего вида.

Из вышесказанного вытекает, что при неоднородных условиях для концентрации, используя теорему 2 мы можем предполагать, как в [17], что коэффициент массового расширения описывается непрерывной убывающей функцией $\beta_1(t)$, $t \in \mathbb{R}$, с максимумом в точке $t = m$ (см. теорему 3.1), поскольку концентрации не опустится ниже значения m. Либо, наоборот, функция $\beta(t)$ может быть не возрастающей, такой что $\beta_{1\max} = \beta(M)$, поскольку $\varphi \leq M$ п.в. в Ω

Аналогичные рассуждения могут быть применены к коэффициенту массового расширения более общего вида: $\beta(\varphi, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x})\beta_1(\varphi) + b(\mathbf{x})$, который допускают условия (iv), (v).

Наконец, более грубой альтернативой подходу [17], применяемому при неоднородном граничном условии для концентрации или температуры, может быть ограниченность коэффициента $\beta(\varphi, \cdot)$ по соответствующей L^p–норме.

4 Заключение

В настоящей работе доказана глобальная разрешимость и локальная единственность решения краевой задачи для модели массопереноса, обобщающей приближение Буссинеска. Обобщение заключается в том, что коэффициенты массового расширения и реакции в уравнениях модели нелинейно зависят от концентрации вещества. Предложенный метод использует минимальные требования на исходные данные краевой задачи и может быть применен для близких задач, в которых допускается постановка, по крайней мере, на части границы однородного условия Дирихле для концентрации вещества (или температуры жидкости). В случае неоднородного условия Дирихле будут использованы дополнительные свойства концентрации (или температуры), представленные в разд. 3.

References

[1] K. Ito K, K. Kunish, *Estimation of the convection coefficient in elliptic equations*, Inv. Probl. **13** (1997), 995–1013.

[2] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid*, J. Inv. Ill-Posed Probl. **9** (1998), 521–562.

[3] G.V. Alekseev, *Solvability of inverse extremal problems for stationary heat and mass transfer equations*, Sib. Math. J. **42** (2001), 811–827.

[4] P.A. Nguyen, J.-P.Raymond, *Control problems for convection–diffusion–reaction with control localized on manifolds*, ESAIM Control Optim. Calc. Var. **6** (2001), 467–488.

[5] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *Two-parameter extremum problems of boundary control for stationary thermal convection equations*, Comp. Math. Math. Phys. **51**:9 (2011), 1539–1557.

[6] P.A. Nguyen, J.-P. Raymond, *Pointwise control of the Boussinesq system*, Systems Control Lett. **60**:4 (2011) 249–255.

[7] A.I. Korotkii, D.A. Kovtunov, *Optimal boundary control of a system describing thermal convection*, Proc. Steklov Inst. Math. **272** (2011) S74–S100.

[8] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya, A.I. Byrganov, *Multiplicative control problems for nonlinear convection–diffusion–reaction equation*, Sib. El. Math. Rep. **13** (2016) 352–360.

[9] R.V. Brizitskii, V.S. Bystrova, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of boundary value and extremum problems for a nonlinear reaction–diffusion–convection equation*, Diff. Equat. **57**:5 (2021) 615–629.

[10] R.V. Brizitskii, P.A. Maksimov, *Boundary and extremum problems for the nonlinear reaction–diffusion–convection equation under the Dirichlet condition*, Comp. Math. Math. Phys. **61**:6 (2021) 974–986.

[11] E.S. Baranovskii, R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Optimal control problems for the reaction-diffusion-convection equation with variable coefficients*, Nonlinear Analysis: Real World Appl. **75** (2024) 103979.

[12] A.Y. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Diffusion approximation of the radiative-conductive heat transfer model with Fresnel matching conditions*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **57** (2018) 290–298.

[13] A.Y. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, *Problem of radiation heat exchange with boundary conditions of the Cauchy type*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **75** (2019) 262–269.

[14] A.G. Maslovskaya, L.I. Moroz, A.Y. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, *Theoretical and numerical analysis of the Landau–Khalatnikov model of ferroelectric hysteresis*, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. **93** (2021) n.a. 105524.

[15] S.A. Lorca, J.L. Boldrini, *Stationary solutions for generalized Boussinesq models*, J. Dif. Eq. **124** (1996) 389–406.

[16] T. Kim, *Steady Boussinesq system with mixed boundary conditions including friction conditions*, Appl. Math. **67** (2022) 593–613.

[17] A. Bermudez, R. Munoz-Sola, R. Vazquez, *Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating*, J. Math. Anal. Appl. **368** (2010) 444–468.

[18] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, M.A. Artemov, *Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow*, Fluids **4**:3 (2019) Article ID 133.

[19] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, *Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain*, Differ. Equ. **56**:3 (2020) 304–314.

[20] E.S. Baranovskii, E. Lenes, E. Mallea-Zepeda, J. Rodriguez, L. Vasquez, *Control problem related to 2D Stokes equations with variable density and viscosity*, Symmetry **13**:11 (2021) Article ID 2050.

[21] E.S. Baranovskii, *Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids*, J. Optim. Theory Appl. **189** (2021) 623–645.

[22] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, R.R. Kravchuk, *Boundary value and extremum problems for generalized Oberbeck–Boussinesq model*, Sib. El. Math. Rep. **16** (2019) 1215–1232.

[23] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Multiplicative control problems for nonlinear reaction–diffusion–convection model*, J. Dynam. Control Syst. **27**:2 (2021) 379–402.

[24] Z.Y. Saritskaia, *Boundary value problem for nonlinear mass–transfer equations under Dirichlet condition*, Sib. El. Math. Rep. **19** (2022) 360–370.

[25] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaia, *Analysis of inhomogeneous boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer*, J. Dynam. Control Syst. **29**:4 (2023) 1809–1828.

[26] A. Belmiloudi, *Robin–type boundary control problems for the nonlinear Boussinesq type equations*, J. Math. An. Appl. **273** (2002) 428–456.

[27] R. Duan, A. Guo, C. Zhu, *Global strong solution to compressible Navier–Stokes equations with density dependent viscosity and temperature dependent heat conductivity*, J. Differ. Equ. **262** (2017) 4314–4335.

[28] J.L. Boldrini, E. Fernandez-Cara, M.A. Rojas-Medar, *An optimal control problem for a generalized Boussinesq model: The time dependent case*, Rev. Mat. Complut. **20**:2 (2007) 339–366.

[29] Yu. Y, Wu X, Tang Y, *Global well–posedness for the 2D Boussinesq system with variable viscosity and damping*, Math. Meth. Appl. Sci. **41** (2018) 3044–3061.

[30] O.N. Goncharova, *Unique solvability of a two–dimensional nonstationary problem for the convection equations with temperature-dependent viscosity*, Differ. Equ. **38** (2002) 249–258.

[31] S.A. Lorca, J.L. Boldrini, *The initial value problem for a generalized Boussinesq model*, Nonlinear Anal. **36** (1999) 457–480.

[32] G.V. Alekseev, R.V. Brizitskii, *Theoretical analysis of boundary value problems for generalized Boussinesq model of mass transfer with variable coefficients*, Symmetry **14**:12 (2022) Article ID 2580.

[33] E.S. Baranovskii, *Flows of a polymer fluid in domain with impermeable boundaries*, Comput. Math. Math. Phys. **54** (2014) 1589–1596.

[34] E.S. Baranovskii, M.A. Artemov, *Existence of optimal control for a nonlinear-viscous fluid model*, Int. J. Differ. Equ. **2016** (2016) Article ID 9428128.

[35] E.S. Baranovskii, *On flows of Bingham-type fluids with threshold slippage*, Adv. Math. Phys. **2017** (2017) Article ID 7548328.

[36] E.S. Baranovskii, *Strong solutions of the incompressible Navier-Stokes-Voigt model*, Mathematics. **8**:2 (2020) Article ID 181.

[37] M. Ruzicka, V. Shelukhin, M.M. dos Santos, *Steady flows of Cosserat–Bingham fluids*, Math. Meth. Appl. Sc. **40** (2017) 2746–2761.

[38] V.V. Shelukhin, *Thermodynamics of two-phase granular fluids*, J. Non-Newtonian Fluid Mech. **262** (2018) 25–37.

[39] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of unsteady equations of multi–component viscous compressible fluids*, Izv. Math. **821** (2018) 140–185.

[40] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of the three–dimensional motion of two-component viscous compressible heat–conducting fluids*, Izv. Math. **85**:4 (2021) 755–812.

[41] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial–boundary value problem for the equations of one–dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids*, J. Math. Fluid Mech. **21**:9 (2019) 1–9.

[42] E. Mallea-Zepeda, E. Ortega-Torres, *Control problem for a magneto–micropolar flow with mixed boundary conditions for the velocity field*, J. Dyn. Control Syst. **25** (2019) 599–618.

[43] V. Girault, P.A. Raviart, *Finite element methods for Navier-Stokes equations. Theory and algorithms*, Berlin. Springer–Verlag, 1986.

[44] G.V. Alekseev, *Optimization in the stationary problems of the heat–mass transfer and magnetic hydrodynamics*, Nauchiy Mir: Moscow, 2010 (in Russian).

Roman Victorovich Brizitskii
Institute of Applied Mathematics,
str. Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Far Eastern Federal University,
10 Ajax Bay, Russky Island
690922, Vladivostok, Russia
Email address: mlnwizard@mail.ru