S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, стр. 144–144 (2022) УДК 517.95

DOI 10.33048/semi.2022.16.xxx MSC 35A05

ОБОБЩЕННАЯ МОДЕЛЬ БУССИНЕСКА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ МАССОВОГО РАСШИРЕНИЯ

Р.В. Бризицкий

Abstract. Global solvability of a boundary value problem for generalized Boussinesq model of mass-transfer is proved. In the model under consideration the mass-expansion coefficient depends nonlinearly on substance's concentration and depends on spatial variables. The maximum principle for substance's concentration is valid.

Keywords: generalized Boussinesq model, mass-expansion coefficient, global solvability, local uniqueness, Leray-Schauder principle, maximum principle.

1. Введение. Постановка краевой задачи

На протяжении длительного периода не ослабевает интерес к исследованию краевых и экстремальных задач для уравнений тепломассопереноса (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]). Отметим применение оптимизационного подхода к исследованию обратных задач (см. [9, 10, 11]) и задач тепловой маскировки [12, 13].

В настоящей работе рассматривается краевая задача для нелинейных уравнений массопереноса. Предполагается, что коэффициент массового расширения нелинейно зависит от концентрации вещества, а также зависит от пространственных переменных. Здесь отметим работы [14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22], также обобщающие приближение Буссинеска для различных моделей, и статьи [23, 24, 25, 26, 27, 28], по исследованию усложненных моделей гидродинамики.

Brizitskii, R.V., Generalized Boussinesq model with variable mass-expansion coefficient.

Исследование выполнено засчет гранта Российского научного фонда N 22-21-00271).

Поступила 1 января 2022 г., опубликована 31 декабря 2022 г.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается краевая задача:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \beta(\varphi,\cdot)\mathbf{G}\varphi,\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$-\lambda\Delta\varphi + k\,\varphi + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi = f \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0},\ \ \varphi = 0 \text{ на } \Gamma. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор скорости, φ – концентрация загрязняющего вещества, $p = P/\rho$, где P – давление, $\rho = \mathrm{const}$ – плотность жидкости, $\nu = \mathrm{const} > 0$ – постоянная кинематическая вязкость, $\lambda = \mathrm{const} > 0$ – коэффициент диффузии, $\beta = \beta(\varphi, \mathbf{x})$ – коэффициент массового расширения, где $\mathbf{x} \in \Omega$, $\mathbf{G} = -(0,0,G)$ – ускорения свободного падения, $\mathbf{f}$ и f – объемные плотности внешних сил и внешних источников, $k = \mathrm{const} > 0$ – коэффициент реакции. Ниже при заданных функциях $\mathbf{f}, f$ и β на задачу (1)–(3) мы будем ссылаться как на задачу 1.

В данной статье доказывается глобальная разрешимость и локальная единственность решения задачи 1, а так же устанавливается принцип максимума для концентрации φ. Краевая задача с близкой нелинейностью исследована в [16]. С помощью такой нелинейности в [16] моделируется сила плавучести, убывающая с ростом температуры. Глобальная разрешимость рассматриваемой в [16] краевой задачи доказана с помощью теоремы Шаудера и при этом ключевую роль играет установленный принцип минимума для температуры.

В настоящей работе используется принцип Лере–Шаудера, который позволяет доказать глобальную разрешимость задачи 1, не требуя возрастания или убывания коэффициента β от концентрации φ. В данной статье так же устанавливается принцип максимума и минимума для концентрации φ, от которого разрешимость задачи 1 не зависит.

Отметим статью [22], в которой доказана глобальная разрешимость близкой краевой задачи а неоднородным условием Дирихле для концентраиции φ, в которой коэффициент реакции нелинейно зависит от концентрации вещества, а так же зависит от пространтвенных переменных. Применение принципа Лере–Шаудера позволило получить данный результат при условии монотонности нелинейности, порождаемой зависимым от φ коэффициентом реакции.

2. Разрешимость задачи 1

Ниже будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает область Ω или некоторое ее подмножество $Q \subset \Omega$, или границу Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать, соответственно, норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Норму и скалярное произведение в $L^2(Q)$ будем обозначать, соответственно, $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$.

Введем функциональные пространства

$$L^p_+(D) = \{k \in L^p(D) : k \geq 0\},\ \ p \geq 5/3,$$

$$L^2_0(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega) : (h,1) = 0\}$$

и пространство тестовых функций для скорости $\mathbf{u}$:

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3 : \operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}.$$

Будем использовать произведения пространств $H = H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega)$, $W = V \times H_0^1(\Omega)$ и двойственное к H пространство $H^* = H^{-1}(\Omega)^3 \times H^{-1}(\Omega)$.

Пусть выполняются следующие условия:

(i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;

(ii) $\mathbf{f} \in H^{-1}(\Omega)^3$, $f \in H^{-1}(\Omega)$;

(iii) для любой функции $w \in H_0^1(\Omega)$ имеет место вложение $\beta(w,\cdot) \in L_+^p(\Omega)$, где $p \geq 5/3$ и не зависит от w, и на любом шаре $B_r = \{w \in H_0^1(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r справедливо неравенство:

$$\|\beta(w_1,\cdot) - \beta(w_2,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L\|w_1 - w_2\|_{L^4(\Omega)} \ \ \forall w_1, w_2 \in H_0^1(\Omega).$$

Здесь L – константа, зависящая от r, но не зависящая от $w_1, w_2 \in B_r$.

(iv) функция $\beta(\varphi,\cdot)$ является ограниченной в том смысле, что существуют положительные константы A, B, зависящие от β, такие, что

$$\|\beta(\varphi,\cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq A\|\varphi\|_{1,\Omega}^t + B,\ p \geq 3/2,\ t \geq 0. \tag{4}$$

Приведем пример коэффициента $\beta(\varphi,\cdot)$, удовлетворяющего условиям (iii), (iv):

$$\beta = \varphi^2|\varphi| \text{ в } Q \subset \Omega \text{ и } \beta = \beta_0(\mathbf{x}) \in L_+^2(\Omega \setminus Q) \text{ в } \Omega \setminus Q.$$

Напомним, что из теорем вложения Соболева вытекает, что пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$ и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s\|\varphi\|_{1,\Omega} \ \ \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

Справедлива следующая техническая лемма (подробно см. [3, 5, 37]).

Лемма 1. *При выполнении условия (i) $\beta_0(\cdot) \in L_+^p(\Omega), p \geq 5/3$, $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$ с $\operatorname{div}\mathbf{u} = 0$ существуют положительные константы $C_0, C_1, \delta_0, \delta_1, \gamma_1, \gamma_1', \gamma_2, \gamma_2', \gamma_p, \beta_1$, зависящие от Ω или от Ω и p, и константа β_2, с которыми выполняются следующие соотношения:*

$$|(\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{w})| \leq C_0\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega} \ \ \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3,$$

$$|(\beta_0 h\mathbf{G}, \mathbf{v})| \leq \beta_1\|\beta_0\|_{L^p(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \ \ \ \forall \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3,\ h \in H^1(\Omega),$$

$$|((\mathbf{w}\cdot\nabla)\mathbf{h}, \mathbf{z})| \leq \gamma_1'\|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\mathbf{h}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega} \leq$$

$$\leq \gamma_1\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{h}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega} \ \ \ \forall \mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3, \tag{6}$$

$$((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}),$$

$$((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \ \ \ \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3,\ \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3, \tag{7}$$

$$\nu(\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{v}) \geq \nu_*\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2, \ \ \nu_* = \delta_0\nu \ \ \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \tag{8}$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}} -(\operatorname{div}\mathbf{v}, p)/\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \geq \beta_2\|p\|_\Omega \ \ \forall p \in L_0^2(\Omega), \tag{9}$$

$$|(\nabla h, \nabla\eta)| \leq C_1\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega}, \tag{10}$$

$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla h, \eta)| \leq \gamma_2'\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \leq$$

$$\leq \gamma_2\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \ \ \ \forall h, \eta \in H^1(\Omega), \tag{11}$$

$$(\mathbf{u}\cdot\nabla h, h) = 0 \ \ \lambda(\nabla h, \nabla h) \geq \lambda_*\|h\|_{1,\Omega}^2 \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega), \ \ \lambda_* \equiv \delta_1\lambda. \tag{12}$$

Умножим первое уравнение в (1) на функцию $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3$, уравнение (2) на функцию $h \in H_0^1(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω, применяя формулы Грина. В результате приходим к слабой формулировке задачи 1:

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\beta(\varphi, \cdot)\varphi\,\mathbf{G}, \mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3, \tag{13}$$

$$\lambda(\nabla\varphi, \nabla h) + k(\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) = (f, h) \ \ \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{14}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega. \tag{15}$$

Тройку $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, удовлетворяющую (13)–(15), назовем слабым решением задачи 1.

Рассмотрим сужение (13) на пространство V:

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\beta(\varphi, \cdot)\varphi\,\mathbf{G}, \mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v} \in V. \tag{16}$$

Для доказательства существования слабого решения задачи 1 достаточно доказать существование решения $(\mathbf{u}, \varphi) \in H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega)$ задачи (14)–(16). О восстановлении давления p см. в [37, p. 89].

Складывая (14) и (16), приходим к соотношению

$$\begin{gathered} a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, h)) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\beta(\varphi, \cdot)\varphi\mathbf{G}, \mathbf{v}) + k(\varphi, h) + \\ + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) = \langle\mathbf{F}, (\mathbf{v}, h)\rangle_{H^*\times H} \ \ \forall(\mathbf{w}, h) \in W. \end{gathered} \tag{17}$$

Здесь

$$a((\mathbf{u}, \varphi), (\mathbf{v}, h)) = \nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + \lambda(\nabla\varphi, \nabla h),$$
$$\langle\mathbf{F}, (\mathbf{v}, h)\rangle_{H^*\times H} = \langle\mathbf{f}, \mathbf{v}\rangle_{-1,\Omega} + \langle f, h\rangle_{-1,\Omega}.$$

Из леммы 1 вытекает, что билинейная форма a непрерывна и коэрцитивна на пространстве H:

$$a((\mathbf{v}, h), (\mathbf{v}, h)) \geq \delta_*(\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|h\|_{1,\Omega}^2) \ \ \forall(\mathbf{v}, h) \in H, \ \ \delta_* = \min\{\nu_*, \lambda_*\}. \tag{18}$$

Для доказательства разрешимости задачи (17) применим теорему Лере–Шаудера (см. [35]). Положим $\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \varphi) \in W$ и введем нелинейный оператор G по формуле

$$\begin{gathered} a(G(\mathbf{z}), (\mathbf{v}, h)) = \langle\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}), (\mathbf{v}, h)\rangle_{H^*\times H} \equiv \\ \equiv ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (\beta(\varphi, \cdot)\varphi\,\mathbf{G}, \mathbf{v}) + k(\varphi, h) + \\ + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) - \langle\mathbf{F}, (\mathbf{v}, h)\rangle_{H^*\times H} \ \ \forall(\mathbf{w}, h) \in W. \end{gathered} \tag{19}$$

По теореме Лакса–Мильграма из (19) вытекает, что для любой пары $\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \varphi) \in W$ существует единственная пара $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1, s_2) \in W$, с которой справедливо равенство

$$a((\mathbf{s}_1, s_2), (\mathbf{v}, h)) = \langle\tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}), (\mathbf{v}, h)\rangle_{H^*\times H} \ \ \forall(\mathbf{v}, h) \in W.$$

В таком случае, оператор G, определенный формулой (19), действует из W в W и ставит в соответствие каждой паре функций $\mathbf{z} = (\mathbf{u}, \varphi) \in W$ элемент $G(\mathbf{z}) \in W$.

Тогда для доказательства существования решения задачи (17) достаточно доказать существование решения $\mathbf{z} \in W$ операторного уравнения

$$\mathbf{z} + G(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \text{ в } W. \tag{20}$$

Вычтем (19) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}_2 \in W$ из (19) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 \in W$. Будем иметь

$$a(G(\mathbf{z}_1) - G(\mathbf{z}_2), (\mathbf{w}, h)) =$$

$$= ((\mathbf{u}_1\cdot\nabla)(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2),\mathbf{v})+(((\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\cdot\nabla)\mathbf{u}_2,\mathbf{v})-(\beta(\varphi_1,\cdot)(\varphi_1-\varphi_2)\,\mathbf{G},\mathbf{v})-$$
$$-((\beta(\varphi_1,\cdot)-\beta(\varphi_2,\cdot))\varphi_2\,\mathbf{G},\mathbf{v})+$$
$$+k(\varphi,h)+((\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\cdot\nabla\varphi_1,h)+$$
$$+(\mathbf{u}_2\cdot\nabla(\varphi_1-\varphi_2),h)\ \ \forall(\mathbf{v},h)\in H_0^1(\Omega)^3\times H_0^1(\Omega). \tag{21}$$

Используя лемму 1, неравенство Гельдера, свойство (iii) и (5), из (21) приходим к неравенству

$$|a(G(\mathbf{z}_1)-G(\mathbf{z}_2),(\mathbf{v},h))|\le$$
$$\le\gamma_1'(\|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}+\|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega})\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}+$$
$$+\|\beta(\varphi_1,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{L^6(\Omega)^3}+L\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)}\|\mathbf{v}\|_{L^6(\Omega)^3}+$$
$$+k\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}+\gamma_2'\|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}+$$
$$+\gamma_2'\|\varphi_1\|_{1,\Omega}(\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}\ \forall(\mathbf{v},h)\in W. \tag{22}$$

Положим $\mathbf{y}=(\mathbf{v},h)$. Из (22) вытекает неравенство

$$|a(G(\mathbf{z}_1)-G(\mathbf{z}_2),\mathbf{y})|\le$$
$$\le\gamma_1'(\|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}+\|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega})\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+C_6\|\beta(\varphi_1,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}+C_6L\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)}+$$
$$+kC_4\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}+\gamma_2'\|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+\gamma_2'\|\varphi_1\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3})\|\mathbf{y}\|_W\ \ \forall\mathbf{y}\in W. \tag{23}$$

Полагая $\mathbf{y}=G(\mathbf{z}_1)-G(\mathbf{z}_2)$ в (22), приходим к оценке

$$\|G(\mathbf{z}_1)-G(\mathbf{z}_2)\|_H\le$$
$$+\gamma_1'(\|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega}+\|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega})\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+C_6\|\beta(\varphi_1,\cdot)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}+C_6L\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|\varphi_2\|_{L^6(\Omega)}+$$
$$+kC_4\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}+\gamma_2'\|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}\|\varphi_1-\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}+$$
$$+\gamma_2'\|\varphi_1\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3}, \tag{24}$$

из которой в силу компактности вложений $H^1(\Omega)\subset L^p(\Omega)$ и $H^1(\Omega)^3\subset L^p(\Omega)^3$, где $p<6$, вытекает непрерывность и компактность оператора $G:W\to W$.

Наряду с (20) рассмотрим операторное уравнение

$$\mathbf{z}_w+wG(\mathbf{z}_w)=0\ \text{in}\ W,$$

где $w\in(0,1]$, и вариационное равенство

$$a((\mathbf{u}_w,\varphi_w),(\mathbf{v},h))+w((\mathbf{u}_w\cdot\nabla)\mathbf{u}_w,\mathbf{v})-w(\beta(\varphi_w,\cdot)\varphi_w\mathbf{G},\mathbf{v})+$$
$$+wk(\varphi_w,h)+w(\mathbf{u}_w\cdot\nabla\varphi_w,h)=w\langle\mathbf{F},(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H}\ \ \forall(\mathbf{v},h)\in H. \tag{25}$$

Полагая $\mathbf{v}=\mathbf{0}$ и $h=\tilde\varphi_w$ в (25), приходим к соотношению

$$(\nabla\varphi_w,\nabla\varphi_w)+wk(\varphi_w,\varphi_w)=w\langle f,\varphi_w\rangle_{-1,\Omega}. \tag{26}$$

Из (26) с учетом леммы 1, выводим оценку

$$\lambda_*\|\varphi_w\|_{1,\Omega}\le wM_\varphi,\ \ M_\varphi\equiv\|f\|_{-1,\Omega}. \tag{27}$$

Полагая $\mathbf{v}=\mathbf{u}$ и $h=0$ в (25), приходим к соотношению

$$\nu(\nabla\mathbf{u}_w,\nabla\mathbf{u}_w)=w(\beta(\varphi_w,\cdot)\varphi_w,\mathbf{u}_w)+w\langle\mathbf{f},\mathbf{u}_w\rangle_{-1,\Omega}. \tag{28}$$

Из (28) в силу леммы 1 и свойства (iv), приходим к неравенству

$$\nu_*\|\mathbf{u}_w\|_{1,\Omega} \le w(A\|\varphi_w\|^t_{1,\Omega} + B)\|\varphi_w\|_{1,\Omega} + w\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}. \tag{29}$$

Учитывая (27), из (29) получаем, что

$$\nu_*\|\mathbf{u}_w\|_{1,\Omega} \le w^2(wA\|f\|^t_{-1,\Omega} + B)\|f\|_{-1,\Omega} + w\|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} \le$$

$$\le wM_{\mathbf{u}},\ \ M_{\mathbf{u}} \equiv (A\|f\|^t_{-1,\Omega} + B)\|f\|_{-1,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega},\ t \ge 0. \tag{30}$$

Из (27) и (30) приходим к оценке

$$\|\mathbf{z}_w\|_{1,\Omega} \le C_* w(M_{\mathbf{u}} + M_\varphi),\ w \in (0,1], \tag{31}$$

из которой, очевидно, вытекает, что

$$\|\mathbf{z}_w\|_{1,\Omega} \le C_*(M_{\mathbf{u}} + M_\varphi). \tag{32}$$

В таком случае, в силу теоремы Лере–Шаудера существует решение $\mathbf{z} \in W$ задачи (20), для которого справедлива оценка (32).

В силу (9) для давления p и любого (произвольно малого) числа $\delta > 0$ существует функция $\mathbf{v}_0 \in H^1_0(\Omega)^3$, $\mathbf{v}_0 \ne 0$, такая что

$$-(\mathrm{div}\mathbf{v}_0, p) \ge \beta_2\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|p\|_\Omega,\ \beta_2 = (\beta_1 - \delta) > 0.$$

Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ в (13), с учетом неравенств леммы 1 выводим

$$\beta_2\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|p\|_\Omega \le \nu C_0\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \gamma_1\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}\|^2_{1,\Omega} +$$
$$+ (A\|\varphi\|^t_{1,\Omega} + B)\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}.$$

Разделив на $\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega} \ne 0$ и учитывая оценки (27), (30), отсюда выводим, что

$$\|p\|_\Omega \le M_p = \beta_2^{-1}[(\nu C_0 + \gamma_1 M_{\mathbf{u}})M_{\mathbf{u}} + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega} + (AM^t_\varphi + B)M_\varphi]. \tag{33}$$

Далее установим достаточные условия единственности решения задачи (13)–(15). Пусть $(\mathbf{u}_i, \varphi_i, p_i) \in H^1_0(\Omega)^3 \times H^1_0(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$, $i = 1, 2$, – решения задачи (13)–(15). Несложно показать, что раности

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in H^1_0(\Omega),\ \ \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in V$$

удовлетворяют соотношениям

$$\lambda(\nabla\varphi, \nabla h) + k(\varphi, h) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\varphi, h) = -(\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi_2, h)\ \forall h \in H^1_0(\Omega), \tag{34}$$

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) =$$
$$= ((\beta(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - \beta(\varphi_2, \cdot)\varphi_2)\mathbf{G}, \mathbf{v}) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) =$$

$$= ((\beta(\varphi_1, \cdot) - \beta(\varphi_2, \cdot))\varphi_1, \mathbf{G}, \mathbf{v}) + (\beta(\varphi_2, \cdot)\varphi\mathbf{G}, \mathbf{v}) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_2, \mathbf{v})\ \forall \mathbf{v} \in V. \tag{35}$$

Полагая $h = \varphi$ в (34) и $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ в (35), из леммы 1 с учетом (5), приходим к оценкам

$$\lambda_*\|\varphi\|_{1,\Omega} \le \gamma_2 M_\varphi\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}, \tag{36}$$

$$\nu_*\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le \beta_1 L M_\varphi\|\varphi\|_{1,\Omega} + \beta_1(AM^t_\varphi + B)\|\varphi\|_{1,\Omega} + \gamma_1 M_{\mathbf{u}}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}. \tag{37}$$

Пусть выполняются следующие условия малости:

$$\gamma_2 M_\varphi + \gamma_1 M_{\mathbf{u}} \le \nu_*,$$

$$\beta_1 L M_\varphi + \beta_1(AM^t_\varphi + B) < \lambda_*. \tag{38}$$

Тогда из оценок (36) и (37) вытекает, что $\|\varphi\|_{1,\Omega} = 0$ и $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2$ и $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$ в Ω.

Вычитая (13) при $(\mathbf{u}_2, \varphi_2, p_2)$ из (13) при $(\mathbf{u}_1, \varphi_1, p_1)$, учитывая, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ и $\varphi = 0$, получаем, что разность $p = p_1 - p_2$ удовлетворяет уравнению

$$-(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0 \ \ \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Отсюда, в силу (9), заключаем, что $p = 0$ или $p_1 = p_2$.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(iv). Тогда существует слабое решение* $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ *задачи 1 и справедливы оценки*

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \leq M_\varphi \equiv C_* \|f\|_{-1,\Omega}, \ \ C_* = \lambda_*^{-1},$$

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \leq M_{\mathbf{u}} \equiv (A\|f\|_{-1,\Omega}^t + B)\|f\|_{-1,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{-1,\Omega}, \ t \geq 0$$

и оценка (33). Если, к тому же, выполняются условия (38), то слабое решение задачи 1 единственно.

В следующем разделе для концентрации φ будет установлен принцип максимума, который уже не окажет существенного влияния на ее разрешимость.

3. Принцип максимума и возможные приложения

Пусть в дополнение к (i)–(iv) выполняется условие:

(v) $0 \leq f \leq f_{\max}$ п.в. в Ω, при этом $f_{\max} \leq k$ п.в. в Ω.

Здесь $f_{\max}$ – положительное число.

Теорема 2. *При выполнении условий (i)–(v) для компоненты φ решения* $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times H_0^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ *задачи 1 справедлив следующий принцип максимума:*

$$0 \leq \varphi \leq M \ \textit{п.в. в} \ \Omega, \ \ M = f_{\max}/k. \tag{39}$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\varphi \leq M$ п.в. в Ω. С этой целью введем функцию

$$\tilde{\varphi} = \max\{\varphi - M, 0\}.$$

Ясно, что принцип максимума или оценка $\varphi \leq M$ п.в. в Ω выполняется тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi} = 0$ п.в. в Ω.

Через $Q_M \subset \Omega$ обозначим открытое измеримое подмножество Ω, в котором $\varphi > M$. Из [39, с. 152] и [40] вытекает, что $\nabla\tilde{\varphi} = \nabla\varphi$ п.в. в Q_M и $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\nabla\varphi, \nabla\tilde{\varphi}) = (\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi})_{Q_M} = (\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}), \ \ (\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi, \tilde{\varphi}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) = 0.$$

С учетом этого, полагая $h = \tilde{\varphi}$ в (14), получим

$$\lambda(\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + k(\varphi, \tilde{\varphi}) = (f, \tilde{\varphi}). \tag{40}$$

Ясно, что

$$k(\varphi, \tilde{\varphi}) = k(\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M} = k(\tilde{\varphi} + M, \tilde{\varphi})_{Q_M}.$$

С учетом этого, вычитая $k(M, \tilde{\varphi})_{Q_M}$ из обеих частей (40), выводим

$$\lambda(\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + k(\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi})_{Q_M} = (f - kM, \tilde{\varphi})_{Q_M}. \tag{41}$$

В силу леммы 1 из (41) приходим к оценке

$$\lambda_* \|\tilde{\varphi}\|_{1,\Omega}^2 \leq (f - kM, \tilde{\varphi})_{Q_M},$$

из которой вытекает, что если M выбрано из условия (39), то $\tilde{\varphi} = 0$.

Для доказательства неравенства $\varphi \geq 0$ введем функцию

$$\tilde{w} = \min\{\varphi, 0\}.$$

Рассуждая, как для функции $\tilde{\varphi}$, заключаем, что $\tilde{w} \in H_0^1(\Omega)$. Будем предполагать, что в измеримом открытом множестве $Q_m \subset \Omega$ справедливо неравенство $\varphi < 0$. Рассуждая, как и выше, приходим к равенству

$$\lambda(\nabla\tilde{w}, \nabla\tilde{w}) + k(\tilde{w}, \tilde{w})_{Q_m} = (f\tilde{w})_{Q_m},$$

из которого выводим оценку

$$\lambda_* \|\tilde{w}\|_{1,\Omega}^2 \leq (f, \tilde{w})_{Q_m} \leq 0.$$

Из последней оценки вытекает, что $\tilde{w} = 0$. □

Замечание 1. В [16] принцип максимума и минимума играет ключевую роль, обеспечивая ограниченность близкой нелинейности (вместе с предположением о ее убывании) и возможность применить именно теорему Шаудера. В данной статье для конкретного коэффициента β, например, $\beta(\varphi) = \varphi^2$, можно утверждать, что справедлива оценка

$$|\beta(\varphi)\,\varphi| \leq M^3 \text{ п.в. в } \Omega,$$

которая лишь упростит ряд выкладок при доказательстве теоремы 2.1 и априорную оценку для вектора скорости $\mathbf{u}$.

4. Заключение

В настоящей работе доказана глобальная разрешимость и локальная единственность решения краевой задачи для нелинейной модели массопереноса, обобщающей приближение Буссинеска. Предполагается, что коэффициент массового расширения $\beta(\varphi, \mathbf{x})$ нелинейно зависит от концентрации вещества и зависит от пространственных переменных. Для концентрации φ установлен принцип максимума. При этом обобщен ряд результатов работ [2, 3] и [5, 6] по исследованию краевых задач для нелинейных моделей тепломассопереноса в рамках приближения Обербека-Буссинеска и работ [11, 30, 31, 32, 33] по исследованию краевых задач для полулинейных уравнений реакции-диффузии-конвекции. Здесь же отметим работы [34, 35, 36], посвященные близким моделям сложного теплообмена, с зависящими от решения коэффициентами.

References

[1] K. Ito K, K. Kunish, *Estimation of the convection coefficient in elliptic equations*, Inv. Probl., **14** (1997), 995–1013.

[2] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid*, J. Inv. Ill-Posed Probl., **9** (1998), 521–562.

[3] G.V. Alekseev, *Solvability of inverse extremal problems for stationary heat and mass transfer equations*, Sib. Math. J., **42** (2001), 811–827.

[4] P.A. Nguyen, J.-P. Raymond, *Control problems for convection-diffusion-reaction with control localized on manifolds*, ESAIM Control Optim. Calc. Var, **6** (2001), 467–488.

[5] G.V. Alekseev, *Coefficient inverse extremum problems for stationary heat and mass transfer equations*, Comp. Math. Math. Phys., **47**:6 (2007), 1007–1028.

[6] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *Extremum problems of boundary control for steady equations of thermal convection*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **51**:4 (2010), 510–520.

[7] P.A. Nguyen, J.-P. Raymond, *Pointwise control of the Boussinesq system*, Systems Control Lett., **60**:4 (2011), 249–255.

[8] A.I. Korotkii, D.A. Kovtunov, *Optimal boundary control of a system describing thermal convection*, Proc. Steklov Inst. Math., **272** (2011, S74–S100.

[9] G.V. Alekseev, V.G. Romanov, *One class of nonscattering acoustic shells for a model of anisotropic acoustics*, J. Appl. Industr. Math., **6**:1 (2012), 1–5.

[10] G.V. Alekseev, V.A. Levin, *The optimization method in design problems of spherical layered thermal shells*, Doklady Physics. **62**:10 (2017), 465–469.

[11] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation*, J. Inv. Ill-Posed Probl., **9** (2018), 821–834.

[12] V.D. Fachinotti, A.A. Ciarbonetti, I. Peralta, I. Rintoul, *Optimization-based design of easy-to-make devices for heat flux manipulation*, Int. J. Thermal Sciences. **128** (2018), 38–48.

[13] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices*, Int. J. Heat and Mass Transfer., **135** (2019), 1269–1277.

[14] S.A. Lorca, J.L. Boldrini, *Stationary solutions for generalized Boussinesq models*, J. Dif. Eq., **124** (1996), 389–406.

[15] A. Belmiloudi, *Robin–type boundary control problems for the nonlinear Boussinesq type equations*, J. Math. An. Appl., **273** (2002), 428–456.

[16] A. Bermudez, R. Munoz-Sola, R. Vazquez, *Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating*, J. Math. An. Appl., **368** (2010), 444–468.

[17] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, M.A. Artemov, *Optimal boundary control of non-isothermal viscous fluid flow*, Fluids, **4**: 3 (2019), 133, https://doi.org/10.3390/fluids4030133

[18] E.S. Baranovskii, A.A. Domnich, *Model of a nonuniformly heated viscous flow through a bounded domain*, Differ. Equ., **56**:3 (2020), 304–314, https://doi.org/10.1134/S0012266120030039

[19] E.S. Baranovskii, E. Lenes, E. Mallea-Zepeda, J. Rodriguez, L. Vasquez, *Control problem related to 2D Stokes equations with variable density and viscosity*, Symmetry, **13**: 11 (2021), 2050, https://doi.org/10.3390/sym13112050

[20] E.S. Baranovskii, *Optimal boundary control of the Boussinesq approximation for polymeric fluids*, J. Optim. Theory Appl., **189** (2021), 623–645, https://doi.org/10.1007/s10957-021-01849-4

[21] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaia, *Multiplicative control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection model*, J. Dyn. Control Systems. **27**:2 (2021), 379–402.

[22] Zh.Yu. Saritskaia, *Boundary value problem for nonlinear mass-transfer equations under Dirichlet condition*, Sib. Electron. Math. Rep., **19**:1 (2022) 360–370.

[23] M. Ruzicka, V.Shelukhin, M.M. dos Santos, *Steady flows of Cosserat-Bingham fluids*, Math. Meth. Appl. Sc., **40** (2017), 2746–2761.

[24] V.V. Shelukhin, *Thermodynamics of two-phase granular fluids*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., **262** (2018), 25–37.

[25] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of unsteady equations of multi-component viscous compressible fluids*, Izv. Math., **821** (2018), 140–185.

[26] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *One-dimensional multicomponent hemodynamics*, Sib. Electron. Math. Rep., **17** (2020), 1975–1989.

[27] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of the three-dimensional motion of two-omponent viscous compressible heat-conducting fluids*, Izv. Math., **85**:4 (2021), 755–812.

[28] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids*, J. Math. Fluid Mech., **21**:9 (2019), 1–9.

[29] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya *Boundary value and extremal problems for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation* Sib. Electron. Math. Rep., **15** (2015) 447–456.

[30] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, A.I. Byrganov, *Multiplicative control problems for nonlinear convection-diffusion-reaction equation*, Sib. Electron. Math Rep., **13**:1 (2016), 352–360.

[31] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Stability of solutions of control problems for the convection–diffusion–reaction equation with a strong nonlinearity*, Dif. Eq., **53** (2017), 485–496.

[32] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Inverse coefficient problems for a non-linear convection-diffusion-reaction equation*, Izv. Math., **82** (2018), 14–30.

[33] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Boundary control problem for a nonlinear convection–diffusion–reaction equation* Comp. Math. Math. Phys., **58**:12 (2018), 2053–2063.

[34] A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **460**:2 (2018), 737–744.

[35] A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, G.V. Grenkin, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model*, Applied Mathematics and Computation, **289** (2016), 371-–380.

[36] A.Y. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, *Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **51**:6 (2017), 2511–2519.

[37] G.V. Alekseev, *Optimization in the stationary problems of the heat-mass transfer and magnetic hydrodynamics*, Moscow. Nauchiy Mir, 2010 (in Russian).

[38] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Uraltseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, New York-London: Academic Press, 1968.

[39] D. Gilbarg, M. Trudinger *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1998.

[40] H. Berninger, *Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII. Springer, (2009), 169–176.

Roman Victorovich Brizitskii
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
Str. Radio, 7,
690041, Vladivostok, Russia
Email address: mlnwizard@mail.ru