S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.956.8
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35G55, 35Q86

ОБ ИНТЕГРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ СТАЦИОНАРНЫХ МЕР ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ МОДЕЛИ ЛОРЕНЦА БАРОКЛИННОЙ АТМОСФЕРЫ

Ю.Ю. КЛЕВЦОВА

Abstract. The paper is concerned with a nonlinear system of partial differential equations with parameters which describes the two-layer quasi-solenoidal Lorenz model for a baroclinic atmosphere on a rotating two-dimensional sphere. The right-hand side of the system is perturbed by white noise. We give some upper bounds and a lower bound for some moments of these measures in terms of the set of parameters, an external force and numerical characteristics of white noise. These bounds show, in particular, that these moments are finite. We will prove a number of integral equalities, which can be considered as laws of conservation of these stationary measures. Under certain conditions, these estimates and equalities do not depend on the coefficient of kinematic viscosity $\nu > 0$, which leads to the possibility of passing to the limit as $\nu \to 0$ and studing with their help the properties of limiting measures, which will be done in subsequent work. As it is well known, the coefficient of kinematic viscosity ν in practice is extremely small. In addition, these results are obtained for one similar baroclinic atmosphere system and the barotropic atmosphere equation.

Keywords: the two-layer quasi-solenoidal Lorenz model for a baroclinic atmosphere, white noise perturbation, integral properties of stationary measures.

1. Введение

Следуя [1]–[4], в настоящей работе мы продолжаем рассматривать систему уравнений двухслойной квазисоленоидальной модели Лоренца бароклинной

Klevtsova, Yu.Yu., On integral properties of stationary measures for the stochastic system of the Lorenz model describing a baroclinic atmosphere.

Поступила 14 ноября 2022 г., опубликована 2022 г.

атмосферы

$$\frac{\partial}{\partial t}A_1 u + \nu A_2 u + A_3 u + B(u) = g, \qquad t > 0, \tag{1}$$

заданную на вращающейся единичной двумерной сфере S с центром в нуле в сферической системе координат

$$(\lambda, \varphi), \qquad \lambda \in [0, 2\pi), \quad \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \quad \mu = \sin\varphi.$$

Здесь $\nu > 0$ – коэффициент кинематической вязкости, $u(t,x,\omega) = (u_1(t,x,\omega), u_2(t,x,\omega))^{\mathrm{T}}$ – неизвестная и $g(t,x,\omega) = (g_1(t,x,\omega), g_2(t,x,\omega))^{\mathrm{T}}$ – заданная случайные вектор-функции, $x = (\lambda, \mu)$, $\omega \in \Omega$, $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – полное вероятностное пространство. Операторы, входящие в уравнение (1), определены на сфере S и задаются соотношениями

$$A_1 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta + \gamma I \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \Delta^2 & 0 \\ 0 & \Delta^2 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -k_0\Delta & 2k_0\Delta \\ k_0\Delta & -(2k_0 + k_1 + \nu\gamma)\Delta + \rho I \end{pmatrix},$$

$$B(u) = \bigl(J(\Delta u_1 + 2\mu, u_1) + J(\Delta u_2, u_2),\ J(\Delta u_2 - \gamma u_2, u_1) + J(\Delta u_1 + 2\mu, u_2)\bigr)^{\mathrm{T}}.$$

Здесь $\gamma, \rho, k_0, k_1 \ge 0$ – числовые параметры, I – единичный оператор,

$$J(\psi, \theta) = \psi_\lambda \theta_\mu - \psi_\mu \theta_\lambda$$

– якобиан и

$$\Delta\psi = ((1-\mu^2)\psi_\mu)_\mu + (1-\mu^2)^{-1}\psi_{\lambda\lambda}$$

– оператор Лапласа–Бельтрами (см., например, [5, § 1]). В [1] в качестве правой части системы (1) рассматривалась случайная вектор-функция

$$g = f + \eta, \tag{2}$$

где случайная внешняя сила

$$f^\omega(t,x) = \bigl(f_1^\omega(t,x), f_2^\omega(t,x)\bigr)^{\mathrm{T}}$$

почти наверное является локально квадратично суммируемой по t и случайная вектор-функция

$$\eta^\omega(t,x) = \bigl(\eta_1^\omega(t,x), \eta_2^\omega(t,x)\bigr)^{\mathrm{T}}$$

– белый шум по t. Подробнее о модели Лоренца см. в [4, § 2]. Стохастический форсинг очень простым способом моделирует неразрешенные масштабы движения. Для этой системы в [1] было доказано существование единственного решения задачи Коши со случайными начальными данными в некоторых функциональных пространствах и была приведена оценка непрерывной зависимости этого решения от совокупности случайных начальных данных и внешней силы на конечном отрезке изменения переменной t. А в [2] и [3] при некоторых дополнительных ограничениях на параметры и правую часть были получены соответственно существование и единственность стационарной меры для системы (1), (2), когда f не зависит от t и ω. В [4] была получена оценка скорости сходимости распределений всех решений из некоторого класса системы (1), (2) к указанной стационарной мере при $t \to +\infty$ и был несколько усилен результат работы [3]. В настоящей работе будут приведены ряд оценок сверху и одна оценка снизу на некоторые моменты этих мер (предполагается, что достаточные условия единственности меры из [3] и [4] могут быть не выполнены) через совокупность параметров, внешней силы и числовых характеристик белого шума. Эти оценки показывают, в частности, конечность этих моментов. Мы докажем ряд интегральных равенств, которые можно рассматривать в качестве законов сохранения этих стационарных мер. Заметим, что если $f \sim \nu$ и $\eta \sim \sqrt{\nu}$, то эти оценки сверху не зависят от ν, и если дополнительно $k_0, k_1, \rho \sim \nu$, то оценка снизу не зависит от ν. Независимость от коэффициента кинематической вязкости ν приводит к возможности перехода в этих оценках к пределу при $\nu \to 0$ и возможности исследования с помощью них свойств предельных мер. Как хорошо известно, на практике коэффициент кинематической вязкости ν чрезвычайно мал. Вопрос о предельных мерах будет исследоваться в последующих работах. Оценки сверху остаются справедливыми для инвариантных мер в детерминированном случае, когда $\eta = 0$, оценка снизу обращается в нуль и поэтому не имеет смысла в детерминированном случае. В предисловии к книге В. П. Дымникова [6] подробно описывается необходимость исследования вопроса о свойствах стационарных мер у систем уравнений, описывающих динамику атмосферы, для изучения проблемы предсказуемости климата. Дополнительно будет получен аналогичный результат об интегральных свойствах стационарных мер для одной близкой системы бароклинной атмосферы и уравнения баротропной атмосферы (см. § 5).

Благодарности. Автор выражает благодарность В. П. Дымникову и В. Н. Крупчатникову за постановку задачи и поддержку, С. И. Кабанихину, М. А. Шишленину за поддержку, А. Р. Ширикяну, В. В. Нерсесяну за полезные дискуссии, рецензентам за полезные замечания.

2. Предварительные сведения

2.1. **Функциональные пространства.** Везде ниже X – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_X$, $B_X(R)$ – замкнутый шар в пространстве X с центром в нуле радиуса R.

Обозначим через $C(\mathbb{R}_+; X)$ пространство всех непрерывных функций $\psi\colon \mathbb{R}_+ \to X$. Снабженное метрикой

$$d(\psi, \theta) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \frac{\max_{t\in[0,i]} \|\psi(t) - \theta(t)\|_X}{1 + \max_{t\in[0,i]} \|\psi(t) - \theta(t)\|_X}$$

пространство $C(\mathbb{R}_+; X)$ является полным метрическим пространством.

Обозначим через $C_0^\infty(S)$ пространство таких бесконечно гладких функций $\psi\colon S \to \mathbb{R}$, для которых выполнено

$$\int_S \psi\, dS = 0. \tag{3}$$

Введем в пространстве $C_0^\infty(S)$ семейство норм

$$\|\psi\|_p = ((-\Delta)^p \psi, \psi)^{1/2}, \qquad p \in \mathbb{Z},$$

где $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $L_2(S)$. Для каждого $p \in \mathbb{Z}$ обозначим через h^p пространство, полученное пополнением по норме $\|\cdot\|_p$ пространства $C_0^\infty(S)$. Имеют место следующие вложения:

$$\cdots \subset h^2 \subset h^1 \subset h^0 \subset h^{-1} \subset h^{-2} \subset \cdots,$$

где операторы вложения компактны и, следовательно, непрерывны. Заметим, что h^p плотно и компактно вложено в h^q при $q < p$ (см., например, [7, гл. I, § 3, лемма 1.6]).

Положительно определенный оператор $-\Delta$, действующий на пространстве $C^\infty(S)$ со скалярным произведением $(\,\cdot\,,\cdot\,)$, может быть расширен до самосопряженного оператора

$$-\Delta\colon D(-\Delta) = h^{p+2} \subset h^p \to h^p, \qquad p \in \mathbb{Z},$$

где $D(A)$ – область определения оператора A. Тогда

$$\|\psi\|_p = \bigl((-\Delta)^{p/2}\psi, (-\Delta)^{p/2}\psi\bigr)^{1/2} \quad \text{для любого} \ \ \psi \in h^p, \quad p \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что имеет место обобщенное неравенство Коши–Буняковского

$$|(\psi,\theta)| \le \|\psi\|_p \, \|\theta\|_{-p} \quad \text{для любых} \ \ \psi \in h^p, \quad \theta \in h^{-p}, \quad p \in \mathbb{Z}, \tag{4}$$

где скалярное произведение $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ продолжено на $h^p \times h^{-p}$ следующим образом:

$$(\psi,\theta) = \bigl((-\Delta)^{p/2}\psi, (-\Delta)^{-p/2}\theta\bigr), \qquad p \in \mathbb{Z}. \tag{5}$$

Обозначим норму на $H^p := h^p \times h^p$, $p \in \mathbb{Z}$, через

$$|||\psi|||_p = \langle A_0^{p/2}\psi, A_0^{p/2}\psi\rangle^{1/2},$$
$$p \in \mathbb{Z}, \quad A_0 = \begin{pmatrix} -\Delta & 0 \\ 0 & -\Delta \end{pmatrix}, \quad \langle \psi, \theta\rangle = \int_S \langle \psi,\theta\rangle_{\mathbb{R}^2}\, dS,$$

где $\langle \psi,\theta\rangle_{\mathbb{R}^2}$ – скалярное произведение в $\mathbb{R}^2$. Пусть

$$\varkappa := C(\mathbb{R}_+; H^2) \cap L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; H^3).$$

Введем обозначения

$$l_2^+ := \bigl\{\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2 \colon b_i \ge 0,\ i = 1,2,\dots\bigr\}, \qquad \bigcap b := \|\{b_i\}_{i=1}^\infty\|_{l_2} = \biggl(\sum_{i=1}^\infty b_i^2\biggr)^{1/2}. \tag{6}$$

Подробнее о введенных пространствах см. в [3, п. 2.1].

2.2. **Необходимые сведения из теории вероятностей.** Пусть Ω – произвольное множество, F – σ-алгебра подмножеств Ω. Измеримое пространство будем обозначать (Ω, F). Пусть $\mathbb{P}$ – вероятностная мера на измеримом пространстве (Ω, F). В дальнейшем полагаем, что $(\Omega, F, \mathbb{P})$ – полное вероятностное пространство.

Обозначим через $\mathrm{N}_{(\Omega,F,\mathbb{P})}$ семейство таких подмножеств $\mathrm{M}_1 \subset \Omega$, что существует подмножество $\mathrm{M}_2 \subset \Omega$, $\mathrm{M}_2 \in F$, такое, что $\mathrm{M}_1 \subset \mathrm{M}_2$ и $\mathbb{P}(\mathrm{M}_2) = 0$.

Будем говорить, что фильтрация $\{F_t\}_{t\ge 0}$ в $(\Omega, F, \mathbb{P})$ удовлетворяет *обычным условиям*, если $\{F_t\}_{t\ge 0}$ – непрерывная справа фильтрация такая, что все множества $\mathbb{P}$-меры нуль σ-алгебры F содержатся в F_0.

В дальнейшем полагаем, что фильтрация $\{F_t\}_{t\ge 0}$ удовлетворяет обычным условиям.

Рассмотрим два произвольных измеримых пространства (Ω_1, σ_1) и (Ω_2, σ_2). Отображение $\psi\colon (\Omega_1, \sigma_1) \to (\Omega_2, \sigma_2)$ называют *$\sigma_1|\sigma_2$-измеримым*, если полный прообраз множества M при отображении ψ

$$\psi^{-1}(\mathrm{M}) := \{\omega \in \Omega_1 \colon \psi(\omega) \in \mathrm{M}\}$$

принадлежит σ_1 для любого $\mathrm{M} \in \sigma_2$. Иногда, когда ясно, о каком пространстве (Ω_2, σ_2) идет речь, мы будем для удобства изложения говорить, что ψ σ_1-*измеримо*. Пусть $\psi\colon (\Omega_1, \sigma_1) \to (\Omega_2, \sigma_2)$ – σ_1-измеримое отображение. Обозначим через σ(некоторая совокупность множеств из $\Omega_1, \psi) \subset \sigma_1$ наименьшую σ-алгебру, содержащую эту совокупность множеств из Ω_1 и полные прообразы множеств из σ_2 при отображении ψ.

Обозначим через σ_{T} борелевскую σ-алгебру топологического пространства T.

Пусть $\mathrm{P}(X)$ – семейство вероятностных мер на измеримом пространстве (X, σ_X).

Больше подробностей о математических объектах из теории вероятностей, используемых в статье, можно найти в [3, п. 2.2]. Для краткости изложения мы не станем повторять их в настоящей статье.

Пусть $\{u^\omega(t,\vartheta),\, t \geq 0\}_{\vartheta \in X}$ – семейство однородных марковских процессов относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\geq 0}$, обладающих феллеровским свойством, с одним и тем же семейством переходных операторов. Эти процессы имеют область значений в сепарабельном банаховом пространстве X и начальное условие $u^\omega(0,\vartheta) = \vartheta$, $\vartheta \in X$. Заметим, что в [2, § 3] приведены все определения, связанные с такими случайными процессами. Будем полагать, что траектории $u^\omega(t,\vartheta)$, $t \geq 0$, являются непрерывными для почти всех $\omega \in \Omega$ при любом $\vartheta \in X$ и являются на конечном отрезке изменения переменной t непрерывными по $\vartheta \in X$ для почти всех $\omega \in \Omega$. Пусть $P(t,\vartheta,\Gamma)$ – переходная функция:

$$P(t,\vartheta,\Gamma) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega\colon u^\omega(t,\vartheta) \in \Gamma\}, \qquad \vartheta \in X, \quad \Gamma \in \sigma_X, \quad t \geq 0.$$

Рассмотрим полугруппу P_t^*:

$$P_t^* m(\Gamma) = \int_X P(t,\vartheta,\Gamma)\, m(d\vartheta), \qquad m \in \mathrm{P}(X), \quad \Gamma \in \sigma_X, \quad t \geq 0. \tag{7}$$

Меру $m \in \mathrm{P}(X)$ называют *стационарной мерой семейства* $\{u^\omega(t,\vartheta),\, t \geq 0\}_{\vartheta \in X}$, если

$$P_t^* m = m, \qquad t \geq 0. \tag{8}$$

3. Краткий обзор результатов из [1]–[4]

Пусть заданы вектор-функция $f(x) \in H^{-1}$ и F_0-измеримая случайная вектор-функция $u_0^\omega(x)$, где $u_0 \in H^2$ почти наверное. Снабдим систему (1), (2) начальным условием

$$u(0) = u_0. \tag{9}$$

Обозначим через $\{E_i\}_{i=1}^\infty$ ортонормированный базис пространства H^0. В качестве случайной вектор-функции η рассмотрим

$$\eta^\omega(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\zeta^\omega(t,x), \qquad \zeta^\omega(t,x) = \sum_{i=1}^\infty b_i \beta_i^\omega(t) E_i, \tag{10}$$

где $\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$, а $\{\beta_i^\omega(t)\}_{i=1}^\infty$, $t \geq 0$, – последовательность независимых вещественнозначных броуновских движений относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\geq 0}$. Тогда ряд в (10) принадлежит пространству $C(\mathbb{R}_+; H^0)$ для почти всех $\omega \in \Omega$ (см., например, доказательство теоремы 4.3 в [8, ч. I, § 4.1]).

Решение $u^\omega(t,x,u_0)$, $t \geq 0$, задачи Коши (1), (2), (9) определим так же, как в определении 4.1 из [3, § 4].

Определение 1. *Случайный процесс $u^\omega(t,x,u_0)$, $t \geqslant 0$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, со значениями в H^2 будем называть решением задачи Коши* (1), (2), (9), *если он обладает следующими свойствами:*

a) случайный процесс $u(t)$, $t \geqslant 0$, согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ и почти все его траектории принадлежат пространству $\varkappa$;

b) почти все траектории случайного процесса $u(t)$, $t \geqslant 0$, удовлетворяют равенству

$$A_1u(t) + \int_0^t \big(\nu A_2u(s) + A_3u(s) + B(u(s))\big)\,ds = A_1u_0 + tf + \zeta(t), \qquad t \geq 0,$$

которое имеет место в пространстве $C(\mathbb{R}_+; H^{-1})$.

По теореме 2 из [1, § 3] следует, что для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, $f \in H^{-1}$ и F_0-измеримой случайной вектор-функции u_0, где $u_0 \in H^2$ почти наверное, существует единственное решение задачи Коши (1), (2), (9), и оно непрерывно зависит на конечном отрезке изменения переменной t от начального данного u_0 для почти всех $\omega \in \Omega$. По теореме 1 из [2, § 3] следует, что решение задачи Коши (1), (2), (9) является однородным марковским процессом относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\geq 0}$, обладающим феллеровским свойством. При этом при любом начальном данном $u_0 \in H^2$ случайный процесс имеет одно и то же семейство переходных операторов. В [2, § 4] (см. также [3, § 4, формулы (4.4)–(4.6) и лемма 4.1]) было доказано, что если выполнено неравенство на числовые параметры

$$k_0 < \mathfrak{F}(\nu, \gamma, \rho, k_1), \tag{11}$$

где $\mathfrak{F} > 0$ – некоторая вещественнозначная функция аргументов ν, γ, ρ, k_1, то существует стационарная мера семейства $\{u^\omega(t,x,\vartheta),\, t \geq 0\}_{\vartheta\in H^2}$ однородных марковских процессов, обладающих феллеровским свойством, определяемого решениями задачи Коши (1), (2), $u(0) = \vartheta$, $\vartheta \in H^2$. В замечании 2 [2, § 4] было доказано, что если выполнено неравенство (11) и рассматривается частный случай, когда $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \mathbf{0}$ (система (1), (2), (10) детерминирована), то существует инвариантная мера.

В теореме 4.3 из [3, § 4] были сформулированы условия, при которых указанная выше стационарная мера для семейства $\{u^\omega(t,x,\vartheta),\, t \geq 0\}_{\vartheta\in H^2}$ единственна. В теореме 4.1 из [4, § 4] и теореме 6.3 из [4, п. 6.3] были несколько ослаблены условия, при которых имеет место такой результат, а также в теореме 4.1 из [4, § 4] была получена экспоненциальная оценка на скорость сходимости распределений всех решений системы (1), (2) из семейства $\{u^\omega(t,x,\vartheta),\, t \geq 0\}_{\vartheta\in H^2}$ к этой стационарной мере при $t \to +\infty$. Отметим, что эти результаты в [3], [4] были получены при условии (11) на числовые параметры.

Заметим, что диапазон на числовые параметры (11) можно несколько расширить. Имеет место следующая лемма. Отметим, что в ней мы считаем, что f не зависит от ω.

Лемма 1. I. *Пусть выполнены все условия теоремы 3 из* [2, § 4]*, за исключением неравенства* (11)*, вместо него будем использовать неравенство*

$$k_0 < \min_{i=1,2,\dots,i_*} \varsigma(i), \tag{12}$$

где

$$\varsigma(i)=\frac{2}{(j(i)-\gamma)^2}\Bigg(3\nu j^2(i)(j(i)+\gamma)+\chi(j(i))$$

(13)

$$+\sqrt{\left(3\nu j^2(i)(j(i)+\gamma)+\chi(j(i))\right)^2+(j(i)-\gamma)^2\left(\nu^2 j^3(i)(j(i)+\gamma)+\nu j(i)\chi(j(i))\right)}\Bigg),$$

(14) $$\chi(y)=(k_1+\nu\gamma)(y^2+\gamma y)+\rho(\gamma+y),\qquad j(y)=y(y+1),\qquad y\geqslant 0,$$

(15)

$$i_*=\left[\frac{c_*}{(1+\sqrt{2})\nu}\left(\sqrt{1+\frac{2c_*}{(1+\sqrt{2})\nu}}+1\right)^{-1}\right]\geqslant 1,\qquad c_*=\begin{cases}\varsigma(1), & \textit{если } \gamma\neq 2,\\ \varsigma(2), & \textit{если } \gamma=2\end{cases}$$

(здесь и везде ниже будем считать, что $[r]$ *– целая часть вещественного числа* r*, и, что если* $j(p)=\gamma$*,* p *– натуральное число, то* $1/(j(p)-\gamma)^2=+\infty$*), тогда выполнены все утверждения теоремы 3 из* [2, §4] *о существовании стационарной меры.*

II. *Пусть выполнены все условия замечания 2* [2, §4] *для системы* (1), (2), (10)*, за исключением неравенства* (11)*, вместо него будем использовать неравенство* (12)*, тогда выполнены все утверждения замечания 2* [2, §4] *о существовании инвариантной меры для этой системы, когда рассматривается частный случай –* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}=\mathbf{0}$*, т. е. система детерминирована.*

III. *Пусть выполнены все условия теоремы 4.1 из* [4, §4]*, за исключением неравенства* (11)*, вместо него будем использовать неравенство* (12)*, тогда выполнены все утверждения теорем 6.3 и 4.1, предложения 4.1 из* [4] *о единственности стационарной меры и сходимости к ней при* $t\to+\infty$*.*

Доказательство. Доказательство сразу следует из того, что можно рассмотреть вместо неравенства (7.2) из [4, п. 7.1]

(16) $$\langle A_1\psi, A_3\psi\rangle\geq-\alpha_0|||\psi|||_3^2\quad\text{для любого}\quad\psi\in H^3,$$

где $\alpha_0\in[0,\nu)$, неравенство

(17) $$\langle A_1\psi, A_3\psi\rangle\geq-\alpha_0\langle A_1\psi, A_2\psi\rangle\quad\text{для любого}\quad\psi\in H^3,$$

поскольку в силу (17) и очевидного неравенства

$$\langle A_1\psi, A_2\psi\rangle\geq|||\psi|||_3^2\quad\text{для любого}\quad\psi\in H^3$$

будем иметь

(18)

$$\nu\langle A_1u(s), A_2u(s)\rangle+\langle A_1u(s), A_3u(s)\rangle\geq(\nu-\alpha_0)\langle A_1u(s), A_2u(s)\rangle\geq(\nu-\alpha_0)|||u(s)|||_3^2.$$

Последнее неравенство совпадает с тем, которое получается, если мы оцениваем левую часть цепочки неравенств (18), используя (7.2) из [4, п. 7.1] вместо (17), как это было сделано в статье [4]. Поэтому все ранее полученные оценки из [4] будут выполнены, где требовалось это неравенство. А также рассуждая аналогично будут выполнены подобные оценки и в более ранних работах [2]–[3]. Отметим, что основные результаты работ [2]–[4] были основаны на оценках на решения задач Коши для уравнения (1), либо подобных (1), где всегда присутствовала сумма операторов νA_2+A_3. В этих оценках всегда соответствующая этой сумме операторов левая часть цепочки неравенств (18) оценивалась той величиной, которая стоит в правой части этой цепочки неравенств. Поэтому изменение (17) не меняет основные результаты работ [2]–[4]. Указанное изменение лишь влияет на диапазон на числовые параметры, который становится несколько шире.

Заметим, что имеет место следующая лемма.

Лемма 2. *Условие* (17) *эквивалентно следующему условию на константы* ν, γ, ρ, k_0, k_1*:*

$$k_0 \le \inf_{i=1,2,\dots} \frac{2}{(j(i)-\gamma)^2}\Biggl(3\alpha_0 j^2(i)(j(i)+\gamma)+\chi(j(i))$$

$$+\Bigl(\bigl(3\alpha_0 j^2(i)(j(i)+\gamma)+\chi(j(i))\bigr)^2$$

$$+(j(i)-\gamma)^2\bigl(\alpha_0^2 j^3(i)(j(i)+\gamma)+\alpha_0 j(i)\chi(j(i))\bigr)\Bigr)^{\frac{1}{2}}\Biggr). \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\psi\in H^3$. По определению операторов A_1 и A_3 из равенства (5) получим

$$\begin{aligned}\langle A_1\psi, A_3\psi\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} -\Delta\psi_1 \\ -\Delta\psi_2+\gamma\psi_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k_0\Delta\psi_1+2k_0\Delta\psi_2 \\ k_0\Delta\psi_1-(2k_0+k_1+\nu\gamma)\Delta\psi_2+\rho\psi_2\end{pmatrix}\right\rangle \\ &= k_0\|\psi_1\|_2^2-3k_0(\Delta\psi_1,\Delta\psi_2)+\gamma k_0(\Delta\psi_1,\psi_2)+(2k_0+k_1+\nu\gamma)\|\psi_2\|_2^2 \\ &\quad+(\rho+\gamma(2k_0+k_1+\nu\gamma))\|\psi_2\|_1^2+\gamma\rho\|\psi_2\|_0^2. \end{aligned}\tag{20}$$

Разложим функции $\psi_1,\psi_2\in h^3$ по ортонормированному базису $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ гильбертова пространства $h^0\supset h^3$, состоящему из собственных функций оператора Лапласа–Бельтрами (см., например, [9, гл. XIII] и [10, § 31]):

$$\begin{gathered} \psi_1=\sum_{i=1}^\infty c_{1i}e_i, \qquad \|\psi_1\|_3^2=\sum_{i=1}^\infty c_{1i}^2\lambda_i^3<\infty, \\ \psi_2=\sum_{i=1}^\infty c_{2i}e_i, \qquad \|\psi_2\|_3^2=\sum_{i=1}^\infty c_{2i}^2\lambda_i^3<\infty, \\ -\Delta e_i=\lambda_i e_i, \qquad \lambda_i>0, \qquad i=1,2,\dots, \\ (e_i,e_j)=\delta_{ij}, \qquad \delta_{ij} \text{ – символ Кронекера}, \qquad i,j=1,2,\dots. \end{gathered}$$

Здесь $\{\lambda_i\}_{i=1}^\infty$ – неубывающая последовательность собственных значений минус оператора Лапласа–Бельтрами с учетом их кратностей. Если $\alpha_0>0$, то из равенства (20) имеем

$$\begin{aligned}
&\langle A_1\psi, A_3\psi\rangle + \alpha_0\langle A_1\psi, A_2\psi\rangle \\
&\quad= \sum_{i=1}^{\infty} c_{1i}^2\lambda_i^2(k_0+\alpha_0\lambda_i) - 2\sum_{i=1}^{\infty} c_{1i}\lambda_i\sqrt{k_0+\alpha_0\lambda_i}\,c_{2i}\frac{(3\lambda_i+\gamma)k_0}{2\sqrt{k_0+\alpha_0\lambda_i}} \\
&\qquad\quad+ \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}^2\big((\lambda_i^2+\gamma\lambda_i)(2k_0+k_1+\nu\gamma)+\rho(\gamma+\lambda_i)+\alpha_0\lambda_i^2(\gamma+\lambda_i)\big) \\
&\quad= \sum_{i=1}^{\infty}\left(c_{1i}\lambda_i\sqrt{k_0+\alpha_0\lambda_i} - c_{2i}\frac{(3\lambda_i+\gamma)k_0}{2\sqrt{k_0+\alpha_0\lambda_i}}\right)^2 \\
&\qquad+ \sum_{i=1}^{\infty} c_{2i}^2\Bigg((\lambda_i^2+\gamma\lambda_i)(2k_0+k_1+\nu\gamma)+\rho(\gamma+\lambda_i)+\alpha_0\lambda_i^2(\gamma+\lambda_i) \\
&\qquad- \left(\frac{(3\lambda_i+\gamma)k_0}{2\sqrt{k_0+\alpha_0\lambda_i}}\right)^2\Bigg).
\end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности ψ нетрудно получить, что неравенство (17) имеет место тогда и только тогда, когда выполнено

$$(2k_0+k_1+\nu\gamma)(\lambda_i^2+\gamma\lambda_i)+\rho(\gamma+\lambda_i)+\alpha_0\lambda_i^2(\gamma+\lambda_i)-\left(\frac{(3\lambda_i+\gamma)k_0}{2\sqrt{k_0+\alpha_0\lambda_i}}\right)^2 \geq 0, \quad i=1,2,\dots . \tag{21}$$

Заметим, что множество собственных значений минус оператора Лапласа–Бельтрами состоит из неотрицательных целых чисел вида $i(i+1)$, $i=0,1,\dots$ (см., например, [10, § 31]). При этом поскольку для функций из пространства h^0 выполнено (3), то в ортонормированном базисе $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ пространства h^0 нет собственной функции, отвечающей нулевому собственному значению. Поэтому, анализируя квадратное неравенство относительно k_0, получим, что неравенство (21) эквивалентно неравенству (19). Тогда условие (17) эквивалентно условию (19).

Если $\alpha_0=0$, то, рассуждая аналогично, получим, что условие (17) эквивалентно условию (19) при $\alpha_0=0$.

Лемма доказана. □

Докажем еще две леммы, из которых следует, что, если мы рассматриваем диапазон на параметры (12), то, в частности, имеет место теорема 2 об оценке на решение задачи Коши (1), (2) (9) из [2, § 4] в силу рассуждений вначале доказательства леммы 1, и следовательно, выполнена теорема 3 о существовании стационарной меры из [2, § 4] и замечание 2 [2, § 4] о существовании инвариантной меры, когда рассматривается частный случай – $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}=\mathbf{0}$, т. е. система (1), (2), (10) детерминирована. Эти результаты будут использоваться чуть ниже в п. 4.1, где описан основной результат настоящей статьи, и поэтому мы их особо выделили в доказательстве леммы 1. Для других результатов работ [2]–[4] нужно провести аналогичные рассуждения.

Лемма 3. *Если константы ν, γ, ρ, k_0, k_1 удовлетворяют условию*

$$k_0 < \inf_{i=1,2,\dots} \varsigma(i), \tag{22}$$

где $\varsigma(i)$ *определено в* (13)*, то существуют такие вещественные числа* α_0 *и* α_1*, что выполнено*

$$\alpha_0 \in \left[0, \left(1 - \frac{\alpha_1}{2}\right)\nu\right), \qquad \alpha_1 \in (0, 2), \tag{23}$$

и неравенство (17).

Доказательство. Если

$$k_0 \le \inf_{i=1,2,\dots} \frac{4\chi(j(i))}{(j(i)-\gamma)^2}, \tag{24}$$

то положим $\alpha_0 = 0$ и $\alpha_1 = 1$. Тогда такие α_0, α_1 удовлетворяют (23) и в силу леммы 2 будет выполнено (17). Если

$$k_0 > \inf_{i=1,2,\dots} \frac{4\chi(j(i))}{(j(i)-\gamma)^2}$$

и k_0 удовлетворяет неравенству (22), то в силу непрерывности функции

$$\psi(\alpha) = \inf_{i=1,2,\dots} \frac{2}{(j(i)-\gamma)^2}\Bigg(3\alpha j^2(i)(j(i)+\gamma) + \chi(j(i)) \\ +\Big(\big(3\alpha j^2(i)(j(i)+\gamma) + \chi(j(i))\big)^2 \\ +(j(i)-\gamma)^2\big(\alpha^2 j^3(i)(j(i)+\gamma) + \alpha j(i)\chi(j(i))\big)\Big)^{\frac{1}{2}}\Bigg)$$

существует такое α_*, что $k_0 = \psi(\alpha_*)$, $0 < \alpha_* < \nu$. Положим $\alpha_0 = \alpha_*$ и $\alpha_1 = (\nu - \alpha_*)/\nu$. Тогда такие α_0, α_1 удовлетворяют (23) и в силу леммы 2 будет выполнено (17).

Лемма доказана. □

Заметим, что инфинум по бесконечному множеству в (22) равен минимуму по конечному множеству.

Лемма 4. *Имеет место равенство*

$$\inf_{i=1,2,\dots} \varsigma(i) = \min_{i=1,2,\dots,i_*} \varsigma(i), \tag{25}$$

где $\varsigma(i)$ *и* i_* *определены соответственно в* (13) *и* (15).

Доказательство. Нетрудно доказать, что выполнено неравенство

$$\varsigma(i) \geqslant 2(1+\sqrt{2})\nu j(i), \qquad i = 1, 2, \dots, \tag{26}$$

где j определено в (14). Поэтому $i_* \geqslant 1$.

Пусть $\gamma \ne 2$. Тогда, решив квадратное неравенство

$$\varsigma(1) < 2(1+\sqrt{2})\nu j(i) = 2(1+\sqrt{2})\nu i(i+1) \tag{27}$$

относительно i, получим, что минимальное натуральное число i, которое ему удовлетворяет, равно вещественному числу $i_* + 1$, где i_* определено в (15). В силу (26) и того, что j является возрастающей функцией от i, справедливо равенство (25).

Аналогично доказывается равенство (25) в случае, когда $\gamma = 2$, если вместо неравенства (27) рассмотреть неравенство

$$\varsigma(2) < 2(1+\sqrt{2})\nu j(i).$$

Лемма доказана. □

Лемма 1 доказана. □

Для некоторых режимов циркуляции атмосферы выполнено неравенство $k_0 \le 4k_1$ (см., например, [11]). Тогда неравенство (12) можно упростить.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия леммы 1, за исключением неравенства* (12)*, и дополнительно* $k_0 \le 4k_1$.

Если при $\gamma \neq 2$ *вместо* (12) *имеет место неравенство*

$$k_0 < \frac{2}{(2-\gamma)^2}\Big(12\nu(2+\gamma)+\chi+\sqrt{(12\nu(2+\gamma)+\chi)^2+2\nu(2-\gamma)^2(4\nu(2+\gamma)+\chi)}\Big),$$

где $\chi = (2(k_1+\nu\gamma)+\rho)(2+\gamma)$*, то справедливы утверждения леммы 1.*

Если $\gamma = 2$*, то для выполнения утверждений леммы 1 достаточно одного неравенства* $k_0 \le 4k_1$.

Доказательство. Заметим, что в силу $k_0 \le 4k_1$ в неравенстве (21), домноженном на $4(k_0+\alpha_0\lambda_i)$, коэффициенты перед λ_i, λ_i^2, λ_i^3, λ_i^4 будут неотрицательными. Поэтому в (19) и (22) инфинум достигается при $i = 1$. Тогда из леммы 1 сразу получим утверждение следствия 1.

Следствие 1 доказано. □

Для семейства $\{u^\omega(t,x,\vartheta),\, t \ge 0\}_{\vartheta\in H^2}$ мы сохраним все обозначения из п. 2.2, которые вводились для семейства $\{u^\omega(t,\vartheta),\, t\ge 0\}_{\vartheta\in X}$.

4. Интегральные свойства стационарных мер для системы (1), (2)

4.1. **Формулировка основного результата.** Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $\alpha_* \in [0,2)$ *– произвольное вещественное число. Для любых* $\nu > 0$, $\gamma,\rho,k_0,k_1 \ge 0$ *таких, что вместо неравенства* (12) *имеет место более жесткое неравенство*

$$k_0 \le \min\left\{4k_1, \frac{4(2+\gamma)}{(2-\gamma)^2}(2k_1+\rho)\right\}, \tag{28}$$

$\{b_i\}_{i=1}^\infty \in l_2^+$ *и* $f \in H^{-1}$ *любая стационарная мера* $m \in \mathrm{P}(H^2)$ *для системы* (1), (2) *удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{H^2}\langle A_2\vartheta, A_1\vartheta\rangle\, m(d\vartheta) \le \hat{C}, \tag{29}$$

$$\int_{H^2}|||\vartheta|||_2^2\, m(d\vartheta) \le \check{C}, \tag{30}$$

где

$$\hat{C} = \frac{1}{8\nu}\left(\sqrt{4\mathrm{b}^2+\frac{2+\gamma}{\nu}|||f|||_{-1}^2}+\sqrt{\frac{2+\gamma}{\nu}}|||f|||_{-1}\right)^2,$$

$$\check{C} = \frac{1}{4\nu}\left(\sqrt{2\sum_{i=1}^\infty b_i^2\langle A_1^{-1}E_i,E_i\rangle+\frac{1}{\nu}|||f|||_{-2}^2}+\frac{1}{\sqrt{\nu}}|||f|||_{-2}\right)^2,$$

b *определено в* (6)*, удовлетворяет равенствам*

$$\int_{H^2}\langle(\nu A_2+A_3)\vartheta, A_1\vartheta\rangle\, m(d\vartheta) = \frac{\mathrm{b}^2}{2}+\int_{H^2}\langle f, A_1\vartheta\rangle\, m(d\vartheta), \tag{31}$$

$$\int_{H^2} \langle (\nu A_2 + A_3)\vartheta, \vartheta\rangle \, m(d\vartheta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \langle A_1^{-1} E_i, E_i\rangle + \int_{H^2} \langle f, \vartheta\rangle \, m(d\vartheta), \tag{32}$$

при этом

$$\langle A_3\vartheta, A_1\vartheta\rangle \geq 0 \quad \text{и} \quad \langle A_3\vartheta, \vartheta\rangle \geq 0 \quad \text{для любого} \;\; \vartheta \in H^2,$$

и для любого вещественного числа $\kappa_* > 0$ *такого, что*

$$\frac{2+\gamma}{2}\left(\sup_{i\geq 1} b_i\right)^2 \kappa_* \leq \alpha_*, \tag{33}$$

удовлетворяет неравенствам

$$\int_{H^2} \exp\left(\kappa_* \nu |||A_1\vartheta|||_0^2\right) m(d\vartheta) \leq C(\hat{c}(\kappa_*)), \tag{34}$$

$$\int_{H^2} \exp\left(\kappa_* \nu \langle A_1\vartheta, \vartheta\rangle\right) m(d\vartheta) \leq C(\check{c}(\kappa_*)), \tag{35}$$

где

$$C(y) = \frac{(\sqrt{y^2+4y}+y)^2}{4y}\exp\left(\frac{\sqrt{y^2+4y}+y}{2}\right), \qquad y > 0, \quad C(0) = 1, \tag{36}$$

$$\hat{c}(\kappa_*) = \frac{(2+\gamma)\kappa_*}{4(2-\alpha_*)^2}\left(\sqrt{(2-\alpha_*)\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{2\nu}|||f|||_{-1}^2} + \sqrt{\frac{2+\gamma}{2\nu}}|||f|||_{-1}\right)^2,$$

$$\check{c}(\kappa_*) = \frac{(2+\gamma)\kappa_*}{4(2-\alpha_*)^2}\left(\sqrt{(2-\alpha_*)\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle + \frac{1}{\nu}|||f|||_{-2}^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}|||f|||_{-2}\right)^2.$$

Заметим, что в условиях теоремы 1 стационарная мера существует по лемме 1. Из теоремы 1 нетрудно получить следующее неравенство.

Следствие 2. *Для любых* $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ *таких, что выполнено неравенство* (28), $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$ *и* $f \in H^{-1}$ *любая стационарная мера* $m \in \mathrm{P}(H^2)$ *удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{H^2} |||\vartheta|||_1^2 \, m(d\vartheta) \leq \mathrm{c}_0, \tag{37}$$

$$\int_{H^2} |||\vartheta|||_1^2 \, m(d\vartheta) \geq 4\mathrm{c}_1^2\left(\sqrt{\mathrm{c}_2^2 + \frac{4}{\nu}\mathrm{c}_1\mathrm{c}_3} + \mathrm{c}_2\right)^{-2}, \tag{38}$$

где

$$\mathrm{c}_0 = \frac{1}{8\nu}\left(\sqrt{2\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle + \frac{1}{\nu}|||f|||_{-2}^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}|||f|||_{-2}\right)^2,$$

$$\mathrm{c}_1 = \frac{1}{2\nu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle\right),$$

$$\mathrm{c}_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{b}^2}{2\nu} + \left(\sqrt{\frac{2+\gamma}{8}}\frac{1}{\nu}|||f|||_{-1}\right)^2} + \left(1 + \sqrt{\frac{2+\gamma}{8}}\right)\frac{1}{\nu}|||f|||_{-1},$$

$$\mathrm{c}_3 = \frac{1}{2}\left(3k_0 + k_1 + \nu\gamma + \frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(k_0 + k_1 + \nu\gamma + \frac{\rho}{2}\right)^2 + 9k_0^2}\right).$$

В неравенстве (38) *считаем, что* f *и* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ *таковы, что не выполняется одновременно* $f = 0$ *и* $b_i = 0$ *для всех* $i = 1, 2, \ldots$.

Замечание 1. *В условиях теоремы 1 константы в неравенствах* (29), (30), (34) *и* (35) *можно упростить, оценив их сверху, используя очевидные неравенства*

$$(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2) \quad \text{и} \quad \sqrt{a+b} \le \sqrt{a} + \sqrt{b} \tag{39}$$

при $a, b \ge 0$*:*

$$\hat{C} \le \frac{1}{\nu}\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{2\nu^2}|||f|||_{-1}^2,$$

$$\check{C} \le \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle + \frac{1}{\nu^2}|||f|||_{-2}^2,$$

$$C(y) \le (1 + \sqrt{y} + y)\exp\left(\sqrt{y} + y\right), \tag{40}$$

$$\hat{c}(\kappa_*) \le \frac{(2+\gamma)\kappa_*}{2}\left(\frac{1}{2-\alpha_*}\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{(2-\alpha_*)^2\nu}|||f|||_{-1}^2\right),$$

$$\check{c}(\kappa_*) \le \frac{(2+\gamma)\kappa_*}{2}\left(\frac{1}{2-\alpha_*}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle + \frac{2}{(2-\alpha_*)^2\nu}|||f|||_{-2}^2\right).$$

В условиях следствия 2 константы в неравенствах (37) *и* (38) *можно упростить, оценив их сверху, используя неравенства* (39)*:*

$$\mathrm{c}_0 \le \frac{1}{2\nu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle + \frac{1}{\nu}|||f|||_{-2}^2\right),$$

$$\left(\sqrt{\mathrm{c}_2^2 + \frac{4}{\nu}\mathrm{c}_1\mathrm{c}_3} + \mathrm{c}_2\right)^2 \le \frac{4}{\nu}\mathrm{b}^2 + \frac{2}{\nu^2}(7k_0 + 2k_1 + 2\nu\gamma + \rho)\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle + (22+3\gamma)\frac{1}{\nu^2}|||f|||_{-1}^2. \tag{41}$$

Замечание 2. I. *a). Правые части оценок* (29), (30), (34), (35), (37) *не зависят от* ν*, если* $f \sim \nu$ *и* $b_i \sim \sqrt{\nu}$*,* $i = 1, 2, \ldots$.

b). Если дополнительно $k_0, k_1, \rho \sim \nu$*, то правая часть оценки* (38) *не зависит от* ν.

II. *Оценка снизу* (38) *обращается в нуль тогда и только тогда, когда* $b_i = 0$*,* $i = 1, 2, \ldots$ *(т. е. рассматривается невозмущенная белым шумом система).*

III. *Теорема 1 и следствие 2 включает в себя детерминированный случай, когда* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \mathbf{0}$*. В этом случае мы получим оценки и равенства для любой инвариантной меры* $m \in \mathrm{P}(H^2)$*:*

$$m(\{u_0 \in H^2 : u(t,x,u_0) \in \Gamma\}) = m(\Gamma) \quad \text{для любых} \;\; \Gamma \in \sigma_{H^2} \;\; \text{и} \;\; t \ge 0.$$

Заметим, что инвариантная мера существует по лемме 1. А также в детерминированном случае будет выполнено утверждение пункта I*, a), если* $f \sim \nu$*, и оценка снизу* (38) *обратится в нуль.*

Доказательства теоремы 1 и следствия 2 будут приведены несколько позже в п. 4.6 и п. 4.7 соответственно. Заметим, что предлагаемые схемы доказательств являются частично аналогом схем доказательств теоремы 2.5.5 из [12, п. 2.5.2], которая была доказана для уравнения Навье–Стокса, возмущенного белым шумом, по переменным x в двумерной ограниченной области или двумерном торе, и упражнения 2.5.7 из [12, п. 2.5.2], оценки (5.7) из [12, п. 5.1.1], которые были доказаны для уравнения Навье–Стокса, возмущенного белым шумом, по переменным x в двумерном торе, с условием, что решение и правая часть системы представляют собой бездивергентную вектор-функцию по переменным x. В следующем пункте мы сформулируем ряд вспомогательных результатов, в частности, леммы 5 и 7, на которых будут основаны доказательства оценок (34) и (35).

4.2. **Формулировки вспомогательных результатов.** Нам будут необходимы при больших t две оценки сверху на функции

$$E\exp(\kappa\nu|||A_1u(t)|||_0^2)$$

и

$$E\exp(\kappa\nu\langle A_1u(t),u(t)\rangle)$$

от решения задачи Коши (1), (2), (9), (10), где κ – некоторое положительное число.

Лемма 5. *Пусть $\alpha_0,\alpha_1\geq 0$, $\alpha_2>0$ – произвольные вещественные числа такие, что выполнено*

$$\alpha_0\in\left[0,\left(1-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}\right)\nu\right),\qquad \alpha_1+\alpha_2\in(0,2). \tag{42}$$

Тогда для любых $\nu>0$, $\gamma,\rho,k_0,k_1\geq 0$ таких, что выполнено неравенство (17), $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}\in l_2^+$, любого $\kappa\geq 0$ такого, что

$$\frac{2+\gamma}{2}\left(\sup_{i\geq 1}b_i\right)^2\kappa\leq\alpha_1, \tag{43}$$

$f\in H^{-1}$, F_0-измеримой случайной вектор-функции u_0, где $u_0\colon\Omega\to H^2$ – измеримая по Бохнеру и

$$E\exp\left(\kappa\nu|||A_1u_0|||_0^2\right)<\infty$$

(вектор-функции, отличающиеся на множествах $\mathbb{P}$-меры нуль, отождествляются), решение $u(t)$, $t\geq 0$, задачи Коши (1), (2), (9), (10) удовлетворяет неравенству при $t\geq 0$

$$E\exp(\kappa\nu|||A_1u(t)|||_0^2)\leq e^{-\alpha_3t}E\exp(\kappa\nu|||A_1u_0|||_0^2)+\frac{C(\kappa,\alpha_3)}{\alpha_3}, \tag{44}$$

где

$$C(\kappa,\alpha_3)=\kappa\nu\Big(\frac{2+\gamma}{2\alpha_2\nu}|||f|||_{-1}^2+\mathrm{b}^2+\frac{\alpha_3}{\kappa\nu}\Big)\exp\left(\frac{\kappa\nu\Big(\frac{2+\gamma}{2\alpha_2\nu}|||f|||_{-1}^2+\mathrm{b}^2+\frac{\alpha_3}{\kappa\nu}\Big)}{\frac{4}{2+\gamma}(2\nu-2\alpha_0-(\alpha_1+\alpha_2)\nu)}\right), \tag{45}$$

b *определено в (6) и $\alpha_3>0$ – произвольное вещественное число.*

Лемма 6. *Если константы ν, γ, ρ, k_0, k_1 удовлетворяют условию (12), то существуют такие $\alpha_0\geq 0$, $\alpha_1,\alpha_2>0$, что выполнено (42), (17).*

Лемма 6 сразу следует из лемм 3 и 4.

Лемма 7. *Пусть* $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 > 0$ *– произвольные вещественные числа такие, что выполнено* (42).

Тогда для любых $\nu > 0$, $\gamma, \rho, k_0, k_1 \geq 0$ *таких, что выполнено неравенство*

$$\langle A_3\psi, \psi\rangle \geq -\alpha_0 |||\psi|||_2^2 \quad \text{для любого} \quad \psi \in H^2, \tag{46}$$

$\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$, *любого* $\kappa \geq 0$ *такого, что*

$$\frac{1}{2}\left(\sup_{i\geq 1} b_i\right)^2 \kappa \leq \alpha_1,$$

$f \in H^{-1}$, F_0*-измеримой случайной вектор-функции* u_0, *где* $u_0 \colon \Omega \to H^2$ *– измеримая по Бохнеру и*

$$E\exp\left(\kappa\nu\langle A_1 u_0, u_0\rangle\right) < \infty$$

(вектор-функции, отличающиеся на множествах $\mathbb{P}$*-меры нуль, отождествляются), решение* $u(t)$, $t \geq 0$, *задачи Коши* (1), (2), (9), (10) *удовлетворяет неравенству при* $t \geq 0$

$$E\exp(\kappa\nu\langle A_1 u(t), u(t)\rangle) \leq e^{-\alpha_3 t} E\exp(\kappa\nu\langle A_1 u_0, u_0\rangle) + \frac{\widetilde{C}(\kappa, \alpha_3)}{\alpha_3},$$

где

$$\widetilde{C}(\kappa, \alpha_3) = \widetilde{c}(\kappa, \alpha_3)\exp\left(\frac{\widetilde{c}(\kappa, \alpha_3)}{\frac{4}{2+\gamma}(2\nu - 2\alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)\nu)}\right),$$

$$\widetilde{c}(\kappa, \alpha_3) = \kappa\nu\Big(\frac{1}{\alpha_2\nu}|||f|||_{-2}^2 + \sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle + \frac{\alpha_3}{\kappa\nu}\Big),$$

$\alpha_3 > 0$ *– произвольное вещественное число.*

Лемма 8. *Если константы* ν, γ, ρ, k_0, k_1 *удовлетворяют условию*

$$k_0 < \min_{i=1,2,\ldots,\widetilde{i}_*} \widetilde{\varsigma}(i), \tag{47}$$

где

$$\widetilde{\varsigma}(i) = \frac{2}{j(i)}\left(\widetilde{\chi}(j(i)) + \sqrt{\widetilde{\chi}^2(j(i)) + \nu j^2(i)\left(\widetilde{\chi}(j(i)) - 2\nu j^2(i)\right)}\right),$$

$$\widetilde{\chi}(y) = 3\nu y^2 + (k_1 + \nu\gamma)y + \rho, \qquad y \geqslant 0,$$

$$\widetilde{i}_* = \left[\frac{\widetilde{\varsigma}(1)}{(3+\sqrt{10})\nu}\left(\sqrt{1 + \frac{2\widetilde{\varsigma}(1)}{(3+\sqrt{10})\nu}} + 1\right)^{-1}\right] \geqslant 1,$$

j *определено в* (14), *то существуют такие* $\alpha_0 \geq 0$, $\alpha_1, \alpha_2 > 0$, *что выполнено* (42), (46).

Доказательство леммы 8 полностью аналогично доказательству лемм 3 и 4.

4.3. **Предварительные сведения для доказательства лемм 5 и 7.** Введем следующее определение процесса Ито с постоянной диффузией в сепарабельном гильбертовом пространстве из [12, Appendix, § 7, определение A.7.1].

Определение 2. *Случайный процесс $\xi(t)$, $t \geqslant 0$, определенный на вероятностном пространстве $(\Omega, F, \mathbb{P})$, будем называть процессом Ито в сепарабельном гильбертовом пространстве H с постоянной диффузией, если он согласован с фильтрацией $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$ и может быть представлен в виде*

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t h(s)\,ds + \sum_{i=1}^{\infty} \beta_i(t) v_i, \quad t \geqslant 0, \quad \textit{почти наверное},$$

где последовательность $\{v_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ удовлетворяет условию

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|v_i\|_H^2 < \infty$$

и $h(t)$, $t \geqslant 0$, – это H-значный случайный процесс, прогрессивно измеримый по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t\geqslant 0}$, такой, что

$$\mathbb{P}\biggl\{\int_0^T \|h(t)\|_H^2\,dt < \infty \quad \textit{для любого } T > 0\biggr\} = 1.$$

Для доказательства лемм 5 и 7 нам будет необходима следующая теорема о замене переменной в стохастическом дифференциальном уравнении для гильбертовых пространств, формулировка и доказательство которой сразу следует из формулировки и доказательства теоремы A.7.5 из [12, Appendix, § 7].

Теорема 2. *Пусть H, V – сепарабельные гильбертовы пространства, H^* и V^* – сопряженные пространства с пространствами соответственно H и V, V плотно непрерывно вложено[1] в H.*

Пусть $\Phi\colon \mathbb{R}_+ \times H \to \mathbb{R}$ – непрерывно дифференцируемая функция по первой переменной $t \in \mathbb{R}_+$ и дважды непрерывно дифференцируемая по Фреше функция по второй переменной $v \in H$. Будем полагать, что эта функция равномерно непрерывна вместе со своими производными $\Phi_t(t,v)$, $\Phi_v(t,v)$ первого и $\Phi_{vv}(t,v)$ второго порядков на любом ограниченном множестве в $\mathbb{R}_+ \times H$. А также будем полагать, что функция Φ удовлетворяет следующим условиям:

a) *для любого $T > 0$ существует положительная непрерывная функция $\widetilde{C}_T(r)$, $r \geq 0$, такая, что*

$$|\Phi_v(t, v; \upsilon)| \leq \widetilde{C}_T(\|v\|_H)\|v\|_V\|\upsilon\|_{V^*}, \qquad t \in [0,T], \quad v \in V, \quad \upsilon \in H;$$

b) *для любой последовательности $\{v_k\}_{k=1}^{\infty} \subset V$, сходящейся к $v \in V$ при $k \to \infty$ в топологии пространства V, и для любых $t \geq 0$ и $\upsilon \in V^*$ имеет место сходимость[2]*

$$\Phi_v(t, v_k; \upsilon) \to \Phi_v(t, v; \upsilon) \quad \textit{при} \ \ k \to \infty.$$

---

[1] Отождествляя по теореме Ф. Рисса о представлении линейного ограниченного функционала в гильбертовом пространстве (см., например, [13, гл. III, §6]) сопряженное пространство H^* с пространством H, имеем

$$V \subseteq H \subseteq V^*.$$

[2] Заметим, что в силу условия a) линейный непрерывный оператор $\Phi_v(t,v)$, определенный на пространстве H, допускает единственное непрерывное расширение на пространство V^* для любого $v \in V$ и неравенство в условии a) будет выполнено для $\upsilon \in V^*$.

Предположим, что случайный процесс $\xi(t)\colon \Omega \to H$, $t \geq 0$, *удовлетворяет следующим условиям:*

c) *почти все траектории случайного процесса* $\xi(t)$, $t \geq 0$, *принадлежат пространству* $C(\mathbb{R}_+; H) \cap L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+; V)$*;*

d) $\xi(t)$, $t \geq 0$, *– процесс Ито в пространстве* V^* *с постоянной диффузией такой, что в определении 2 последовательность* $\{\upsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$ *лежит в пространстве* H *(а не в* V^**) и*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|\upsilon_i\|_H^2 < \infty.$$

Тогда почти наверное имеет место формула Ито

$$\Phi(t \wedge \tau_n(\xi), \xi(t \wedge \tau_n(\xi))) = \Phi(0, \xi(0)) + \int_0^{t\wedge\tau_n(\xi)} \Theta_0(s)\, ds$$

$$+ \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{t\wedge\tau_n(\xi)} \Theta_i(s)\, d\beta_i(s), \qquad t \geq 0,$$

где

$$\Theta_0(t) = \Phi_t(t, \xi(t)) + \Phi_v(t, \xi(t); h(t)) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_{vv}(t, \xi(t); \upsilon_i),$$

$$\Theta_i(t) = \Phi_v(t, \xi(t); \upsilon_i), \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

$$\tau_n(\xi) = \inf\{t \geq 0 : \|\xi(t)\|_H > n\}, \qquad t \wedge \tau_n(\xi) = \min\{t, \tau_n(\xi)\}, \qquad n = 0, 1, \ldots .$$

В параграфе 3 из [1] была доказана следующая лемма.

Лемма 9. *Пусть выполнено одно из условий:*

$$\theta, \xi \in h^2, \quad \chi \in h^0; \qquad \chi, \theta \in h^2, \quad \xi \in h^0; \qquad \xi, \chi \in h^2, \quad \theta \in h^0;$$
$$\theta, \xi \in h^1, \quad \chi \in h^2; \qquad \chi, \theta \in h^1, \quad \xi \in h^2; \qquad \xi, \chi \in h^1, \quad \theta \in h^2.$$

Тогда якобиан J *обладает следующими свойствами:*

$$(J(\theta, \xi), \chi) = -(J(\xi, \theta), \chi), \qquad (J(\theta, \xi), \chi) = (J(\chi, \theta), \xi) = (J(\xi, \chi), \theta).$$

Если $\theta \in h^2$, $\xi \in h^0$ *или* $\theta \in h^1$, $\xi \in h^2$, *то*

$$(J(\theta, \xi), \theta) = 0.$$

Если $\theta \in h^2$, *то*

$$(J(\theta, \mu), \Delta\theta) = 0.$$

4.4. **Доказательство леммы 5.** Обозначим

$$h(t) = f - (\nu A_2 + A_3)u(t) - B(u(t)), \qquad t \geq 0.$$

В следствии из [1, § 3] показано, что случайный процесс $u(t)$, $t \geq 0$, является прогрессивно измеримым по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t\geq 0}$. Тогда случайный процесс $h(t)$, $t \geq 0$, является H^{-1}-значным прогрессивно измеримым по отношению к фильтрации $\{F_t\}_{t\geq 0}$. Поэтому по определению 2 случайный процесс $A_1 u(t)$, $t \geq 0$, представляет собой процесс Ито в H^{-1} с постоянной диффузией, так как в силу (1), (2), (9), (10) его можно представить в виде

$$A_1 u(t) = A_1 u_0 + \int_0^t h(t)\, dt + \sum_{i=1}^{\infty} b_i \beta_i(t) E_i, \qquad t \geq 0, \quad \text{почти наверное,}$$

причем в силу способа построения решения $u(t)$, $t \geq 0$, и оценок (3.31), (3.32) из [1, § 3] случайный процесс $h(t)$, $t \geq 0$, удовлетворяет соотношению

$$\mathbb{P}\left\{\int_0^T |||h(t)|||_{-1}^2\,dt < \infty \text{ для любого } T > 0\right\} = 1.$$

В теореме 2 рассмотрим пространства $H = H^0$, $V = H^1$, функционал $F(t, v) = e^{\alpha_3 t}\exp(\kappa\nu|||v|||_0^2)$ и в качестве случайного процесса $u(t)$, $t \geq 0$, возьмем процесс Ито с постоянной диффузией $A_1 u(t)$, $t \geq 0$. Нетрудно показать, что в силу леммы 9 выполнено равенство

$$\langle B(\psi), A_1\psi\rangle = 0 \quad \text{для любого} \quad \psi \in H^3.$$

Тогда, учитывая (4) и (5),

$$F_t(t, v) = \alpha_3 F(t, v),$$

$$F_v(t, v; \upsilon) = 2\kappa\nu F(t, v)\langle v, \upsilon\rangle, \quad F_{vv}(t, v; \upsilon) = 2\kappa\nu F(t, v)(|||\upsilon|||_0^2 + 2\kappa\nu\langle v, \upsilon\rangle^2),$$

$v, \upsilon \in H^0$, и включение $u(t) \in \varkappa$ почти наверное, с помощью формулы Ито из теоремы 2 получим почти наверное равенство

$$F(t\wedge\tau_n, A_1 u(t\wedge\tau_n)) = F(0, A_1 u_0) + \int_0^{t\wedge\tau_n}\Theta_0(s)\,ds + M(t\wedge\tau_n),$$

где

$$\Theta_0(t) = 2\kappa\nu F(t, A_1 u(t))\left(\frac{\alpha_3}{2\kappa\nu} - \langle(\nu A_2 + A_3)u(t), A_1 u(t)\rangle + \langle f, A_1 u(t)\rangle + \frac{\mathrm{b}^2}{2}\right.$$
$$\left. + \kappa\nu\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\langle E_i, A_1 u(t)\rangle^2\right),$$

$$M(t) = 2\kappa\nu\sum_{i=1}^{\infty} b_i\int_0^t F(s, A_1 u(s))\langle E_i, A_1 u(s)\rangle\,d\beta_i(s), \qquad t \geq 0,$$

b определено в (6), причем здесь и везде ниже $\tau_n = \tau_n(A_1 u)$. В силу неравенств (4) при $p = 1$ и

$$2ab \leqslant a^2c^2 + b^2c^{-2}, \qquad a, b, c \in \mathbb{R}, \quad c \neq 0,$$

выполнена оценка

$$2|\langle f, A_1 u(s)\rangle| \leq \frac{2\alpha_2\nu}{2+\gamma}|||A_1 u(s)|||_1^2 + \frac{2+\gamma}{2\alpha_2\nu}|||f|||_{-1}^2. \tag{48}$$

Поскольку $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис пространства H^0 и имеет место равенство Парсеваля (см., например, [13, гл. III, § 4, теорема 2]), то

$$\sum_{i=1}^{\infty}\langle E_i, A_1 u(s)\rangle^2 = |||A_1 u(s)|||_0^2.$$

Отсюда следует

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2\langle E_i, A_1 u(s)\rangle^2 \leq \left(\sup_{i\geq 1} b_i\right)^2 |||A_1 u(s)|||_0^2. \tag{49}$$

Тогда из (48), (49), (43), (17) и

$$\|\psi\|_p^2 \leq 2^{-(q-p)}\|\psi\|_q^2 \quad \text{для любого} \quad \psi \in h^q, \quad p, q \in \mathbb{Z}, \quad q > p \tag{50}$$

(см. неравенство (16) в [14]), неравенства

$$\langle A_1\psi,\psi\rangle = |||\psi|||_1^2+\gamma\|\psi_2\|_0^2 \le \frac{2+\gamma}{2}|||\psi|||_1^2$$

для любого $\psi\in H^1$, которое имеют место в силу определения оператора A_1, (5) и (50), будем иметь почти наверное

$$F(t\wedge\tau_n, A_1u(t\wedge\tau_n)) - \kappa\nu\int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1u(s))\Big(\frac{4}{2+\gamma}(2\alpha_0+(\alpha_1+\alpha_2)\nu-2\nu)|||A_1u(s)|||_0^2$$
$$+\frac{2+\gamma}{2\alpha_2\nu}|||f|||_{-1}^2+\mathrm{b}^2+\frac{\alpha_3}{\kappa\nu}\Big)\,ds \le F(0,A_1u_0)+M(t\wedge\tau_n).$$

Взяв от обеих частей этого неравенства математическое ожидание, получим

$$EF(t\wedge\tau_n, A_1u(t\wedge\tau_n)) - \kappa\nu E\int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1u(s))\Big(\frac{4}{2+\gamma}(2\alpha_0+(\alpha_1+\alpha_2)\nu$$

$$-2\nu)|||A_1u(s)|||_0^2+\frac{2+\gamma}{2\alpha_2\nu}|||f|||_{-1}^2+\mathrm{b}^2+\frac{\alpha_3}{\kappa\nu}\Big)\,ds \le EF(0,A_1u_0)+EM(t\wedge\tau_n). \tag{51}$$

Докажем, что

$$EM(t\wedge\tau_n)=0. \tag{52}$$

Напомним определение марковского момента из [15, гл. I, § 5, определение 5.3].

Определение 3. *Отображение* $\tau\colon\Omega\to[0,\infty]$ *назовем марковским моментом относительно фильтрации* $\{F_t\}_{t\ge0}$*, если для каждого* $t\ge0$ *имеет место включение* $\{\omega\in\Omega\colon \tau(\omega)\le t\}\in F_t$.

В примере 5.1 из [15, гл. I, § 5] доказано, что, если $M\subset\mathbb{R}$ – произвольное открытое множество, $\xi(t)\colon\Omega\to\mathbb{R}$, $t\ge0$, – согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t\ge0}$ случайный процесс, имеющий почти наверное непрерывные справа траектории, то случайная величина

$$\inf\{t\ge0:\xi(t)\in M\}$$

является марковским моментом относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\ge0}$. Тогда очевидно, что τ_n – марковский момент относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\ge0}$.

В дальнейшем нам будут необходимы два свойства стохастических интегралов. Пусть $\psi(t)$, $t\ge0$, – действительный измеримый случайный процесс, согласованный с фильтрацией $\{F_t\}_{t\ge0}$, и для любого $T>0$

$$E\Big(\int_0^T\psi^2(s)\,ds\Big)<\infty.$$

Тогда если τ – марковский момент, $\beta(t,\omega)$, $t\ge0$, – действительное броуновское движение, определенное на вероятностном пространстве $(\Omega,F,\mathbb{P})$, относительно фильтрации $\{F_t\}_{t\ge0}$, то выполнены следующие два свойства (см., например, доказательства равенств (1.13) и (1.16) из [15, гл. II, § 1]):

$$E\int_0^{t\wedge\tau}\psi(s)\,d\beta(s)=0, \tag{53}$$

$$E\Big(\int_0^{t\wedge\tau}\psi(s)\,d\beta(s)\Big)^2 = E\int_0^{t\wedge\tau}\psi^2(s)\,ds. \tag{54}$$

Заметим, что в силу теоремы о монотонной сходимости, неравенства Бесселя, равенства (54) при $\tau = \tau_n$, оценки

$$|||A_1 u(s)|||_0 \le n, \qquad 0 \le s \le t \wedge \tau_n,$$

случайная величина

$$\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1 u(s)) \langle E_i, A_1 u(s)\rangle \, d\beta_i(s) \Big)^2$$

имеет конечное математическое ожидание. Значит, в силу неравенства Коши–Буняковского конечное математическое ожидание имеет и величина

$$\bigg(\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1 u(s)) \langle E_i, A_1 u(s)\rangle \, d\beta_i(s) \Big)^2 \bigg)^{1/2}.$$

Поскольку абсолютную величину частичных сумм ряда в (52) можно по неравенству Коши–Буняковского для пространства $\mathbb{R}^N$ оценить интегрируемой случайной величиной

$$\Big| \sum_{i=1}^{N} b_i \int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1 u(s)) \langle E_i, A_1 u(s)\rangle \, d\beta_i(s) \Big|$$
$$\le \mathrm{b} \bigg(\sum_{i=1}^{\infty} \Big(\int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1 u(s)) \langle E_i, A_1 u(s)\rangle \, d\beta_i(s) \Big)^2 \bigg)^{1/2},$$

где $N = 1, 2, \dots$, то по теореме Лебега о мажорируемой сходимости для математических ожиданий справедливо

$$E \sum_{i=1}^{\infty} b_i \int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1 u(s)) \langle E_i, A_1 u(s)\rangle \, d\beta_i(s)$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} b_i E \int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1 u(s)) \langle E_i, A_1 u(s)\rangle \, d\beta_i(s).$$

Учитывая, что в силу (53) при $\tau = \tau_n$ имеем

$$E \int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1 u(s)) \langle E_i, A_1 u(s)\rangle \, d\beta_i(s) = 0, \qquad i = 1, 2, \dots,$$

отсюда получим равенство (52).

Из (51) и (52) будем иметь

$$EF(t\wedge\tau_n, A_1 u(t\wedge\tau_n)) - \kappa\nu E \int_0^{t\wedge\tau_n} F(s, A_1 u(s)) \Big(\frac{4}{2+\gamma} (2\alpha_0 + (\alpha_1+\alpha_2)\nu$$
$$-2\nu) |||A_1 u(s)|||_0^2 + \frac{2+\gamma}{2\alpha_2 \nu} |||f|||_{-1}^2 + \mathrm{b}^2 + \frac{\alpha_3}{\kappa\nu} \Big) \, ds \le EF(0, A_1 u_0). \tag{55}$$

Нетрудно показать, что для любого $s \ge 0$

$$\kappa\nu F(s, A_1 u(s)) \Big(\frac{4}{2+\gamma} (2\alpha_0 + (\alpha_1+\alpha_2)\nu - 2\nu) |||A_1 u(s)|||_0^2 + \frac{2+\gamma}{2\alpha_2\nu} |||f|||_{-1}^2 + \mathrm{b}^2 + \frac{\alpha_3}{\kappa\nu} \Big)$$
$$\le C(\kappa, \alpha_3) e^{\alpha_3 s},$$

где $C(\kappa, \alpha_3)$ определена в (45). Поэтому из (55) имеем

$$EF(t\wedge\tau_n, A_1 u(t\wedge\tau_n)) \le C(\kappa, \alpha_3) E \frac{e^{\alpha_3 (t\wedge\tau_n)} - 1}{\alpha_3} + EF(0, A_1 u_0). \tag{56}$$

Поскольку $u(t) \in C(\mathbb{R}_+; H^2)$ почти наверное, то $\tau_n \to \infty$ при $n \to \infty$ почти наверное. Следовательно, переходя к пределу в неравенстве (56) и используя теорему о монотонной сходимости и лемму Фату (см., например, [16, гл. II, § 6, п. 4, теоремы 1, а) и 2, а)]), получим

$$EF(t, A_1 u(t)) \leq C(\kappa, \alpha_3) \frac{e^{\alpha_3 t} - 1}{\alpha_3} + EF(0, A_1 u_0).$$

Отсюда сразу следует (44).

Лемма 5 доказана.

4.5. **Доказательство леммы 7.** Доказательство леммы 7 полностью аналогично доказательству леммы 5, поэтому мы не будем его приводить. Отметим лишь, что в теореме 2 необходимо рассмотреть пространства $H = H^{-1}$, $V = H^0$, функционал $F(t, v) = e^{\alpha_3 t} \exp(\kappa\nu\langle A_1^{-1} v, v\rangle)$, вместо V^* рассмотреть пространство H^{-2} и в качестве случайного процесса $u(t)$, $t \geq 0$, взять процесс Ито в H^{-2} с постоянной диффузией $A_1 u(t)$, $t \geq 0$. А также при построении доказательства необходимо учесть, что в силу леммы 9 выполнено равенство

$$\langle B(\psi), \psi\rangle = 0 \quad \text{для любого} \quad \psi \in H^2. \tag{57}$$

4.6. **Доказательство теоремы 1.** Докажем, что для любого $\kappa_* > 0$ такого, что имеет место (33), выполнено неравенство (34). Для этого рассмотрим функцию $F_{r,\kappa}\colon H^2 \to \mathbb{R}$ при $r, \kappa > 0$:

$$F_{r,\kappa}(\vartheta) = \begin{cases} \exp\left(\kappa\nu |||A_1\vartheta|||_0^2\right), & |||A_1\vartheta|||_0 \leq r, \\ \exp\left(\kappa\nu r^2\right), & |||A_1\vartheta|||_0 > r. \end{cases}$$

Поскольку m – стационарная мера, то в силу (7) и (8) при любом $t \geq 0$ имеет место равенство

$$\int_{H^2} F_{r,\kappa}(\vartheta)\, m(d\vartheta) = \int_{H^2} F_{r,\kappa}(\vartheta) \left(\int_{H^2} P(t, \upsilon, \Gamma)\, m(d\upsilon) \right)\Bigg|_{\Gamma = d\vartheta}.$$

По доказательству теоремы Фубини из [17, гл. III, § 11, п. 9]

$$\int_{H^2} F_{r,\kappa}(\vartheta)\, m(d\vartheta) = \int_{H^2} \left(\int_{H^2} F_{r,\kappa}(\vartheta) P(t, \upsilon, d\vartheta) \right) m(d\upsilon).$$

Поменяем для удобства изложения переменные интегрирования в правой части равенства ϑ на υ и υ на ϑ:

$$\int_{H^2} F_{r,\kappa}(\vartheta)\, m(d\vartheta) = \int_{H^2} \left(\int_{H^2} F_{r,\kappa}(\upsilon) P(t, \vartheta, d\upsilon) \right) m(d\vartheta). \tag{58}$$

Оценим правую часть этого равенства. По определению математического ожидания

$$\int_{H^2} F_{r,\kappa}(\upsilon) P(t, \vartheta, d\upsilon) \leq E \exp\left(\kappa\nu |||A_1 u^\omega(t, x, \vartheta)|||_0^2\right).$$

Нетрудно показать, что неравенство (12), в котором ν заменено нулем и знак $<$ заменен на $\leq$, равносильно неравенству (28). А также нетрудно показать из доказательства леммы 3, что если выполнено неравенство (24), то существуют $\alpha_0, \alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 > 0$ такие, что выполнено (42), (17), причем можно считать, что

$$\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_1 = \alpha_*,$$

$\alpha_2 > 0$ – произвольное вещественное число такое, что

$$\alpha_1 + \alpha_2 \in (0, 2).$$

В этом случае

$$2\nu - 2\alpha_0 - (\alpha_1 + \alpha_2)\nu = (2 - \alpha_* - \alpha_2)\nu. \tag{59}$$

Заметим, что правая часть неравенства (24) больше или равна правой части неравенства (28). В силу леммы 5 для любого $\kappa_* > 0$ такого, что имеет место (33), выполнено неравенство

$$E \exp\left(\kappa_* \nu |||A_1 u^\omega(t,x,\vartheta)|||_0^2\right) \le e^{-\alpha_3 t} E \exp(\kappa_* \nu |||A_1 \vartheta|||_0^2) + \frac{C(\kappa_*, \alpha_3)}{\alpha_3}, \qquad t \ge 0,$$

где $\alpha_3 > 0$ – произвольное вещественное число. Тогда при таких α_0, α_1, α_2, κ_* и $|||A_1\vartheta|||_0 \le R$

$$\int_{H^2} F_{r,\kappa_*}(\upsilon) P(t,\vartheta,d\upsilon) \le e^{-\alpha_3 t} E \exp(\kappa_* \nu R^2) + \frac{C(\kappa_*, \alpha_3)}{\alpha_3}, \qquad t \ge 0.$$

Отсюда в силу очевидного неравенства

$$F_{r,\kappa}(\vartheta) \le \exp\left(\kappa \nu r^2\right) \quad \text{для любых} \;\; r, \kappa > 0,$$

и того, что m, $P(t,\vartheta,\cdot)$, $t \ge 0$, – вероятностные меры, имеем

$$\int_{H^2} \left(\int_{H^2} F_{r,\kappa_*}(\upsilon) P(t,\vartheta,d\upsilon) \right) m(d\vartheta) \le \exp\left(\kappa_* \nu r^2\right) m(\{\vartheta \in H^2 \colon |||A_1\vartheta|||_0 > R\})$$

$$+ e^{-\alpha_3 t} E \exp(\kappa_* \nu R^2) + \frac{C(\kappa_*, \alpha_3)}{\alpha_3}, \qquad t \ge 0.$$

Правую часть равенства (58) оценили. Из этой оценки, равенства (58) получим, переходя к пределу при $t \to +\infty$, неравенство

$$\int_{H^2} F_{r,\kappa_*}(\vartheta)\, m(d\vartheta) \le \exp\left(\kappa_* \nu r^2\right) m(\{\vartheta \in H^2 \colon |||A_1\vartheta|||_0 > R\}) + \frac{C(\kappa_*, \alpha_3)}{\alpha_3}.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $R \to +\infty$, будем иметь

$$\int_{H^2} F_{r,\kappa_*}(\vartheta)\, m(d\vartheta) \le \frac{C(\kappa_*, \alpha_3)}{\alpha_3}.$$

Очевидно, что можно взять инфинум по α_2 и α_3. Нетрудно показать, что инфинум правой части равен $C(\hat{c}(\kappa_*))$. Переходя к пределу при $r \to +\infty$ по лемме Фату (см., например, [16, гл. II, § 6, п. 4, теорема 2, a)]), получим (34). Доказательство оценки (35) полностью аналогично, в качестве функции $F_{r,\kappa} \colon H^2 \to \mathbb{R}$ при $r, \kappa > 0$ необходимо рассмотреть

$$F_{r,\kappa}(\vartheta) = \begin{cases} \exp\left(\kappa\nu \langle A_1\vartheta, \vartheta\rangle\right), & \langle A_1\vartheta, \vartheta\rangle \le r^2, \\ \exp\left(\kappa \nu r^2\right), & \langle A_1\vartheta, \vartheta\rangle > r^2, \end{cases}$$

воспользоваться леммой 7 и учесть, что неравенство (47), в котором ν заменено нулем и знак $<$ заменен на $\le$, равносильно неравеству $k_0 \le 4k_1$. Заметим, что полностью аналогично можно доказать, что

$$\int_{H^2} |||\vartheta|||_2^2\, m(d\vartheta) < \infty. \tag{60}$$

Здесь в качестве функции $F_{r,\kappa} \colon H^2 \to \mathbb{R}$ при $r, \kappa > 0$ необходимо рассмотреть

$$F_{r,\kappa}(\vartheta) = \begin{cases} |||A_1\vartheta|||_0^2, & |||A_1\vartheta|||_0 \le r, \\ r^2, & |||A_1\vartheta|||_0 > r, \end{cases}$$

воспользоваться леммой 7.4 из [4, п. 7.1], в которой была приведена оценка сверху величины $E|||A_1u(t)|||_0$ при $t \geq 0$, и воспользоваться рассуждениями в доказательстве леммы 1.

Докажем, что выполнена оценка (29). Нетрудно показать из доказательства теоремы 2 из [2, § 4] об оценке на решение задачи Коши (1), (2), (9), (10), рассуждений в доказательстве леммы 1 и при получении равенства (59), что решение задачи Коши (1), (2), (9), (10) удовлетворяет неравенству

$$E|||A_1u(t)|||_0^2 + (2-\beta)\nu E\int_0^t \langle A_2u(s), A_1u(s)\rangle\, ds$$

$$\leq E|||A_1u_0|||_0^2 + t\Big(\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{2\beta\nu}|||f|||_{-1}^2\Big) \tag{61}$$

для любого $\beta \in (0,2)$ и, следовательно, в силу теорем о монотонной и мажорируемой сходимости (см., например, [16, гл. II, § 6, п. 4, теоремы 1, a) и 3]) равенству

$$E|||A_1u(t)|||_0^2 + 2E\int_0^t \langle(\nu A_2 + A_3)u(s), A_1u(s)\rangle\, ds$$

$$= E|||A_1u_0|||_0^2 + 2E\int_0^t \langle f, A_1u(s)\rangle\, ds + t\mathrm{b}^2 \tag{62}$$

при $t \geq 0$, если $u_0 \in L_2(\Omega; H^2) - F_0$-измеримая случайная вектор-функция. Рассмотрим стационарную меру m и выберем такие вероятностное пространство $(\Omega', F', \mathbb{P}')$ и случайный элемент υ, определенный на $(\Omega', F', \mathbb{P}')$ со значениями в H^2, что его распределение равно m (доказательство существования такого вероятностного пространства и случайного элемента см., например, в [18, гл. I, § 4, задача 6]). Пополним F'. Под *пополнением* σ-алгебры F' по вероятностной мере $\mathbb{P}'$ будем понимать наименьшую σ-алгебру, содержащую все множества из $F' \cup \mathrm{N}_{(\Omega', F', \mathbb{P}')}$. Заметим, что наименьшая σ-алгебра, содержащая некоторую совокупность подмножеств Ω', всегда существует (доказательство см., например, [16, гл. II, § 2.1, лемма 1]). Доопределим на пополненной σ-алгебре вероятностную меру $\mathbb{P}'$ по правилу $\mathbb{P}'(\mathrm{M}_1 \cup \mathrm{M}_2) := \mathbb{P}'(\mathrm{M}_1)$, где $\mathrm{M}_1 \in F'$ и $\mathrm{M}_2 \in \mathrm{N}_{(\Omega', F', \mathbb{P}')}$ (корректность определения см., например, в [20, гл. I, § 4] и [19, § I.4, предложение I.4.5]). Оставим за пополненным вероятностным пространством то же обозначение. Очевидно, что на пополненном вероятностном пространстве случайный элемент υ имеет тоже распределение m. Рассмотрим в качестве вероятностного пространства $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\mathbb{P}})$ прямое произведение вероятностных пространств $(\Omega, F, \mathbb{P})$ и $(\Omega', F', \mathbb{P}')$ (см. определение прямого произведения вероятностных пространств, например, в [21, гл. I, § 4, п. 1]). Мы будем считать такое прямое произведение полным пространством. Если это не так, то пополним его аналогично тому, как мы пополнили пространство $(\Omega', F', \mathbb{P}')$. Элементы множества $\boldsymbol{\Omega}$ будем обозначать $\boldsymbol{\omega} = (\omega, \omega')$, где $\omega \in \Omega$, $\omega' \in \Omega'$. Рассмотрим задачу Коши (1), (2), (9), (10) на $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{F}, \boldsymbol{\mathbb{P}})$, где

$$u_0^{\boldsymbol{\omega}} := \upsilon^{\omega'}, \qquad \eta^{\boldsymbol{\omega}}(t,x) := \frac{\partial}{\partial t}\zeta^{\boldsymbol{\omega}}(t,x),$$

$$\zeta^{\boldsymbol{\omega}}(t,x) := \sum_{i=1}^{\infty} b_i\beta_i^{\boldsymbol{\omega}}(t)E_i := \sum_{i=1}^{\infty} b_i\beta_i^{\omega}(t)E_i.$$

Очевидно, что случайный элемент $u_0^{\boldsymbol{\omega}}$ не зависит от случайного элемента $\zeta^{\boldsymbol{\omega}}$ по построению. Рассмотрим следующую фильтрацию на пространстве $(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{F}, \mathbb{P})$:

$$\mathbf{F}_t := \mathrm{N}_{(\boldsymbol{\Omega}, \mathbf{F}, \mathbb{P})} \cup \sigma\bigl(\{\mathrm{M} \times \Omega'\}_{\mathrm{M} \in F_t}, u_0^{\boldsymbol{\omega}}\bigr), \qquad t \geq 0$$

(доказательство того, что $\mathbf{F}_t$ при любом $t \geq 0$ – σ-алгебра см., например, в [19, § I.4, предложение I.4.5]). Тогда все условия теоремы 2 из [1, § 3] о существовании единственного решения задачи Коши выполнены. В силу теоремы 1 из [2, § 3], в частности, решение этой задачи Коши является однородным марковским случайным процессом. Поэтому из теоремы 1 в [22, § 8.2, п. 1], свойства 6 из [23, п. 4.2.2] и (7), (8) следует, что решение этой задачи Коши является стационарным случайным процессом (определение см., например, в [22, § 1.4, п. 3]) с распределением при каждом фиксированном $t \geq 0$ равным вероятностной мере m. Отсюда и из (61), учитывая (60), теоремы Фубини (см., например, [24, гл. V, § 6, п. 4, замечание]) получим, что для почти всех $s \geq 0$ существует $E\langle A_2 u(s), A_1 u(s)\rangle$ и выполнено неравенство

$$\int_0^t E\langle A_2 u(s), A_1 u(s)\rangle\, ds \leq \frac{t}{(2-\beta)\nu}\Bigl(\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{2\beta\nu}|||f|||_{-1}^2\Bigr)$$

для любого $\beta \in (0,2)$. Нетрудно найти инфинум правой части последнего неравенства при всех $\beta \in (0,2)$:

(63)
$$\int_0^t E\langle A_2 u(s), A_1 u(s)\rangle\, ds \leq \frac{t}{8\nu}\left(\sqrt{4\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{\nu}|||f|||_{-1}^2} + \sqrt{\frac{2+\gamma}{\nu}|||f|||_{-1}^2}\right)^2.$$

Заметим, что $\sigma_{\mathbb{R}}$ совпадает с наименьшей σ-алгеброй, содержащей все интервалы вида $(r_1, r_2]$, $r_1 < r_2$ (доказательство см., например, в [16, гл. II, § 2, п. 2]). Докажем, что множество

$$\mathrm{M}_{r_1,r_2} = \{\vartheta \in H^3 \colon r_1 < |||\vartheta|||_3^2 \leq r_2\}$$

при любых r_1, r_2 таких, что $0 \leq r_1 < r_2$, является борелевским в H^2. Поскольку дополнение к открытому множеству является замкнутым множеством и наоборот, в силу определения борелевской σ-алгебры следует, что σ_{H^2} совпадает с наименьшей σ-алгеброй, содержащей все замкнутые множества из H^2. Заметим, что имеет место равенство

$$\mathrm{M}_{r_1,r_2} = \bigl((B_{H^3}(\sqrt{r_2}))^c \cup B_{H^3}(\sqrt{r_1})\bigr)^c, \qquad 0 \leq r_1 < r_2, \tag{64}$$

где $\cdot^c = \mathrm{M} \setminus \cdot$ – дополнение к подмножеству $\cdot$ множества M, в нашем случае $\mathrm{M} = H^2$. Из доказательства леммы 1.6 в [7, гл. I, § 3], теоремы 1 в [23, п. 17.1.1] и [24, гл. III, § 5, п. 2] следует, что $B_{H^3}(R)$ – компактное множество в H^2 при любом $R \geq 0$ и, следовательно, замкнутое, то есть борелевское. Поэтому по определению σ-алгебры из (64) и получим, что M_{r_1,r_2}, $0 \leq r_1 < r_2$, – борелевское множество в H^2. Тогда в силу теоремы 1 из [23, п. 3.1.1] функция $|||\cdot|||_3^2 \colon H^3 \subset H^2 \to \mathbb{R}$ является σ_{H^2}-измеримой и, следовательно, функция $\langle A_2\cdot, A_1\cdot\rangle \colon H^3 \subset H^2 \to \mathbb{R}$ является σ_{H^2}-измеримой. В частности, H^3 является борелевским множеством в H^2. Из существования $E\langle A_2 u(s), A_1 u(s)\rangle$ для почти всех $s \geq 0$, (63) и теоремы 7 из [16, гл. II, § 6, п. 9]

$$\int_{H^3} \langle A_2\vartheta, A_1\vartheta\rangle\, m(d\vartheta) \leq \hat{C}. \tag{65}$$

Из определения распределения и того, что почти все траектории случайного процесса $u(t)$, $t \geq 0$, принадлежат $\varkappa$, нетрудно получить, что $m(H^3) = 1$, и, следовательно,

$$m(H^2 \setminus H^3) = 0. \tag{66}$$

Поэтому из (65) и (66) следует неравенство (29). Рассуждая аналогично, из (62) получим равенство (31). Полностью аналогично доказываются неравенство (30) и равенство (32). Отметим лишь, что в теореме 2 необходимо рассмотреть пространства $H = H^{-1}$, $V = H^0$, функционал $F(t,v) = \langle A_1^{-1}v, v\rangle$, вместо V^* рассмотреть пространство H^{-2} и в качестве случайного процесса $u(t)$, $t \geq 0$, взять процесс Ито в H^{-2} с постоянной диффузией $A_1 u(t)$, $t \geq 0$. А также при построении доказательства необходимо учесть равенство (57).

Теорема 1 доказана.

4.7. **Доказательство следствия 2.** Неравенство (37) сразу следует из неравенств (30) и (50).

Докажем неравенство (38). Заметим, что пространство h^3 является гильбертовым, если в нем ввести скалярное произведение

$$(\psi, \theta)_3 = \big((-\Delta)^{3/2}\psi, (-\Delta)^{3/2}\theta\big).$$

Тогда, разложив ψ по ортонормированному базису

$$e_{3i} = \lambda_i^{-3/2} e_i, \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

пространства h^3, нетрудно получить неравенство

$$\|\psi\|_2^2 \leq \|\psi\|_1 \|\psi\|_3 \quad \text{для любого} \quad \psi \in h^3.$$

Отсюда и неравенства Коши–Буняковского будем иметь

$$\int_{H^2} |||\vartheta|||_2^2 \, m(d\vartheta) \leq \sqrt{\int_{H^2} |||\vartheta|||_1^2 \, m(d\vartheta)} \sqrt{\int_{H^2} |||\vartheta|||_3^2 \, m(d\vartheta)}. \tag{67}$$

В силу (32) имеем

$$\int_{H^2} |||\vartheta|||_2^2 \, m(d\vartheta) = \mathrm{c}_1 + \frac{1}{\nu}\int_{H^2} \langle f, \vartheta\rangle \, m(d\vartheta) - \frac{1}{\nu}\int_{H^2} \langle A_3\vartheta, \vartheta\rangle \, m(d\vartheta). \tag{68}$$

Нетрудно показать из неравенства (50), что

$$\langle A_3\psi, \psi\rangle \leq \mathrm{c}_3 |||\psi|||_1^2 \quad \text{для любого} \quad \psi \in H^1. \tag{69}$$

Из (4) при $p = 1$ и неравенства Коши–Буняковского получим

$$\left|\int_{H^2} \langle f, \vartheta\rangle \, m(d\vartheta)\right| \leq |||f|||_{-1} \sqrt{\int_{H^2} |||\vartheta|||_1^2 \, m(d\vartheta)}. \tag{70}$$

Тогда из (29), (67), (68), (69) и (70) следует

$$\begin{aligned} \mathrm{c}_1 - \frac{1}{\nu}|||f|||_{-1}\sqrt{\int_{H^2} |||\vartheta|||_1^2 \, m(d\vartheta)} - \frac{\mathrm{c}_3}{\nu}\int_{H^2} |||\vartheta|||_1^2 \, m(d\vartheta) \\ \leq \left(\mathrm{c}_2 - \frac{1}{\nu}|||f|||_{-1}\right)\sqrt{\int_{H^2} |||\vartheta|||_1^2 \, m(d\vartheta)}. \end{aligned}$$

Отсюда, решив квадратное неравенство относительно $\sqrt{\int_{H^2} |||\vartheta|||_1^2 \, m(d\vartheta)}$, получим (38).

Следствие 2 доказано.

5. Интегральные свойства стационарных мер для некоторых других моделей атмосферы

Заметим, что в [25, гл. VI, § 1] и [26] рассматривалась немного иная двухслойная модель бароклинной атмосферы на вращающейся единичной двумерной сфере S с центром в нуле. Система уравнений этой модели после обезразмеривания отличается от системы (1) только оператором A_3. А именно, в [25, гл. VI, § 1] и [26] оператор A_3 имел следующий вид:

$$\widehat{A}_3 = \begin{pmatrix} -k_0\Delta & k_0\Delta \\ k_0\Delta & -(k_0+k_1)\Delta + \rho I \end{pmatrix}.$$

Для системы (1), (2), где оператор A_3 заменен на оператор $\widehat{A}_3$, в [2, § 4] было доказано: в теореме 4 – существование стационарной меры, в замечании 2 – существование инвариантной меры, когда мы рассматриваем детерминированный случай. А также, для этой системы в теореме 7.1 из [3, § 7] был доказан результат о единственности стационарной меры. В теореме 11.1 из [4, § 11] этот результат был несколько усилен и была получена экспоненциальная оценка на скорость сходимости распределений всех решений с начальным условием из H^2 указанной системы к стационарной мере при $t \to +\infty$. (При этом решение определялось аналогично определению 1 решения для системы (1), (2).) Заметим, что диапазон на числовые параметры, при которых получены эти результаты, можно несколько расширить. Полностью аналогично доказательству леммы 1 с учетом замечания 3 из [1, § 3], теоремы 4 и замечания 2 из [2, § 4], теоремы 7.1 из [3, § 7], теоремы 11.1 из [4, § 11] и доказательства теоремы 6.3 из [4, п. 6.3] доказывается следующий результат. Отметим, что в нем f не зависит от ω.

Лемма 10. I. *Пусть выполнены все условия теоремы 4 из* [2, § 4]*, за исключением оценки сверху на* k_0*, вместо нее будем использовать оценку сверху*

$$k_0 < \frac{2}{\gamma^2}\Big(\widehat{\chi} + 8\nu(1+\gamma) + \sqrt{(\widehat{\chi} + 8\nu(1+\gamma))^2 + 2\nu\gamma^2(\widehat{\chi} + 4\nu\gamma)}\Big), \tag{71}$$

где $\widehat{\chi} = 2k_1(2+\gamma) + \rho(2+\gamma) + 8\nu$*, тогда выполнены все утверждения теоремы 4 из* [2, § 4] *о существовании стационарной меры.*

II. *Пусть выполнены все условия замечания 2* [2, § 4] *для системы* (1), (2), (10)*, где оператор* A_3 *заменен на оператор* $\widehat{A}_3$*, за исключением оценки сверху на* k_0*, вместо нее будем использовать оценку сверху* (71)*, тогда выполнены все утверждения замечания 2* [2, § 4] *о существовании инвариантной меры для этой системы, когда рассматривается частный случай –* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \mathbf{0}$*, т. е. система детерминирована.*

III. *Пусть выполнены все условия теоремы 11.1 из* [4, § 11]*, за исключением оценки сверху на* k_0*, вместо нее будем использовать оценку сверху* (71)*, тогда выполнены все утверждения теорем 6.3, где вместо оператора* A_3 *рассматриваем оператор* $\widehat{A}_3$*, и 11.1 из* [4] *о единственности стационарной меры и сходимости к ней при* $t \to +\infty$*.*

Полностью аналогично доказательству теоремы 1 и следствия 2 с учетом замечания 3 из [1, § 3], теоремы 4 из [2, § 4] и леммы 10 доказывается следующий результат об интегральных свойствах стационарных мер семейства решений задач Коши для системы (1), (2), где оператор A_3 заменен на оператор $\widehat{A}_3$.

Теорема 3. *Пусть выполнены все условия теоремы 1, за исключением оценок сверху* (12) *и* (28) *на* k_0*, вместо них будем использовать соответственно оценку сверху* (71) *и*

$$k_0 \le \frac{4(2+\gamma)(2k_1+\rho)}{\gamma^2}. \tag{72}$$

Тогда выполнены все утверждения теоремы 1 для семейства решений задач Коши для системы (1), (2)*, где оператор* A_3 *заменен на оператор* $\widehat{A}_3$*.*

Заметим, что в условиях теоремы 3 стационарная мера существует по лемме 10.

Следствие 3. *Для семейства решений задач Коши для системы* (1), (2)*, где оператор* A_3 *заменен на оператор* $\widehat{A}_3$*, выполнены все утверждения следствия 2, если в формулировке следствия 2 вместо неравенства* (28) *использовать неравенство* (72) *и вместо величины* c_3 *величину*

$$\widehat{c}_3 = \frac{1}{2}\left(2k_0 + k_1 + \frac{\rho}{2} + \sqrt{\left(k_1 + \frac{\rho}{2}\right)^2 + 4k_0^2}\right).$$

Замечание 3. *Замечания 1 и 2 выполнены для системы* (1), (2)*, где оператор* A_3 *заменен на оператор* $\widehat{A}_3$*, за исключением неравенства* (41)*. Вместо неравенства* (41) *будем иметь неравенство*

$$\left(\sqrt{c_2^2 + \frac{4}{\nu}c_1\widehat{c}_3} + c_2\right)^2 \le \frac{4}{\nu}b^2 + \frac{2}{\nu^2}(4k_0 + 2k_1 + \rho)\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \langle A_1^{-1}E_i, E_i\rangle$$
$$+(22+3\gamma)\frac{1}{\nu^2}|||f|||_{-1}^2.$$

Заметим, что инвариантная мера существует по лемме 10.

В [25, гл. III], [27] рассматривалось следующее уравнение баротропной атмосферы, заданное на вращающейся двумерной единичной сфере S с центром в нуле:

$$\left(-\frac{\partial}{\partial t}\Delta + \gamma I\right)u + \nu\Delta^2 u - k_0\Delta u + J(\Delta u + 2\mu, u) = g, \qquad t > 0, \tag{73}$$

где u – неизвестная функция и g – внешняя сила. Рассмотрим в качестве правой части (73) случайную функцию

$$g = f + \eta, \tag{74}$$

где детерминированная часть внешней силы $f(x)$ принадлежит пространству h^{-1}, белый шум по t имеет вид

$$\eta^\omega(t,x) = \frac{\partial}{\partial t}\zeta^\omega(t,x), \qquad \zeta^\omega(t,x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i\beta_i^\omega(t)e_i, \tag{75}$$

$\{e_i\}_{i=1}^\infty$ – ортонормированный базис пространства h^0, $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ и $\{\beta_i^\omega(t)\}_{i=1}^\infty$, $t \geqslant 0$, – последовательности из (10). Для уравнения (73), (74) в [2, § 4] при $\gamma = 0$ было доказано: в теореме 5 – существование стационарной меры, в замечании 2 – существование инвариантной меры, когда мы рассматриваем детерминированный случай. В теореме 7.2 из [3, § 7] для уравнения (73), (74) при $\gamma = 0$ был доказан результат о единственности стационарной меры, а в теореме 11.2

из [4, § 11] был немного усилен этот результат и распространен на всю полуось $\gamma \geq 0$, а также была получена экспоненциальная оценка на скорость сходимости распределений всех решений с начальным условием из h^2 указанного уравнения к стационарной мере при $t \to +\infty$. (При этом решение определялось аналогично определению 1 решения для системы (1), (2).) Заметим, что аналог теоремы 6.3 из [4, п. 6.3] выполнен для уравнения (73), (74). Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1 и следствия 2, учитывая теорему 5 из [2, § 4] и замечание 4 из [1, § 3] при $\gamma = 0$ (которые полностью аналогично доказываются при тех же условиях при $\gamma > 0$), получим, что для уравнения (73), (74) справедлив следующий результат об интегральных свойствах стационарных мер.

Теорема 4. *Пусть $\alpha_* \in [0, 2)$ – произвольное вещественное число. Для любых $\nu > 0$, $\gamma, k_0 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$ и $f \in h^{-1}$ существует стационарная мера $m \in \mathrm{P}(h^2)$ для уравнения (73), (74). Кроме того, любая стационарная мера $m \in \mathrm{P}(h^2)$ уравнения (73), (74) удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{h^2} \left(\|\vartheta\|_3^2 + \gamma \|\vartheta\|_2^2\right) m(d\vartheta) \leq \hat{\hat{C}}, \tag{76}$$

$$\int_{h^2} \|\vartheta\|_2^2 \, m(d\vartheta) \leq \check{\check{C}}, \tag{77}$$

где

$$\hat{\hat{C}} = \frac{1}{8\nu} \left(\sqrt{4\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{\nu}\|f\|_{-1}^2} + \sqrt{\frac{2+\gamma}{\nu}}\|f\|_{-1} \right)^2,$$

$$\check{\check{C}} = \frac{1}{4\nu} \left(\sqrt{2\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2((-\Delta + \gamma I)^{-1} e_i, e_i) + \frac{1}{\nu}\|f\|_{-2}^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|f\|_{-2} \right)^2,$$

b *определено в* (6), *удовлетворяет равенствам*

$$\nu \int_{h^2} \left(\|\vartheta\|_3^2 + \gamma \|\vartheta\|_2^2\right) m(d\vartheta) = \frac{\mathrm{b}^2}{2} + \int_{h^2} (f, (-\Delta + \gamma I)\vartheta) \, m(d\vartheta),$$

$$\nu \int_{h^2} \|\vartheta\|_2^2 \, m(d\vartheta) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2((-\Delta + \gamma I)^{-1} e_i, e_i) + \int_{h^2} (f, \vartheta) \, m(d\vartheta),$$

и для любого вещественного числа $\kappa_* > 0$ такого, что

$$\frac{2+\gamma}{2} \left(\sup_{i \geq 1} b_i\right)^2 \kappa_* \leq \alpha_*,$$

удовлетворяет неравенствам

$$\int_{h^2} \exp\left(\kappa_* \nu \|(-\Delta + \gamma I)\vartheta\|_0^2\right) m(d\vartheta) \leq C(\hat{\hat{c}}(\kappa_*)), \tag{78}$$

$$\int_{h^2} \exp\left(\kappa_* \nu ((-\Delta + \gamma I)\vartheta, \vartheta)\right) m(d\vartheta) \leq C(\check{\check{c}}(\kappa_*)), \tag{79}$$

где $C(y)$ определено в (36),

$$\hat{\hat{c}}(\kappa_*) = \frac{(2+\gamma)\kappa_*}{4(2-\alpha_*)^2} \left(\sqrt{(2-\alpha_*)\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{2\nu}\|f\|_{-1}^2} + \sqrt{\frac{2+\gamma}{2\nu}}\|f\|_{-1} \right)^2,$$

$$\check{\check{c}}(\kappa_*) = \frac{(2+\gamma)\kappa_*}{4(2-\alpha_*)^2}\left(\sqrt{(2-\alpha_*)\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2((-\Delta+\gamma I)^{-1}e_i, e_i) + \frac{1}{\nu}\|f\|_{-2}^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|f\|_{-2}\right)^2.$$

Следствие 4. *Для любых $\nu > 0$, $\gamma, k_0 \geq 0$, $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \in l_2^+$ и $f \in h^{-1}$ любая стационарная мера $m \in \mathrm{P}(h^2)$ удовлетворяет неравенствам*

$$\int_{h^2} \|\vartheta\|_1^2\, m(d\vartheta) \leq \check{c}_0, \tag{80}$$

$$\int_{h^2} \|\vartheta\|_1^2\, m(d\vartheta) \geq \left(\frac{\check{c}_1}{\check{c}_2}\right)^2, \tag{81}$$

где

$$\check{c}_0 = \frac{1}{8\nu}\left(\sqrt{2\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2((-\Delta+\gamma I)^{-1}e_i, e_i) + \frac{1}{\nu}\|f\|_{-2}^2} + \frac{1}{\sqrt{\nu}}\|f\|_{-2}\right)^2,$$

$$\check{c}_1 = \frac{1}{2\nu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2((-\Delta+\gamma I)^{-1}e_i, e_i)\right),$$

$$\check{c}_2 = \sqrt{\frac{\mathrm{b}^2}{2\nu} + \left(\sqrt{\frac{2+\gamma}{8}}\frac{1}{\nu}\|f\|_{-1}\right)^2} + \left(1 + \sqrt{\frac{2+\gamma}{8}}\right)\frac{1}{\nu}\|f\|_{-1}.$$

В неравенстве (81) считаем, что f и $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ таковы, что не выполняется одновременно $f = 0$ и $b_i = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots$.

Замечание 4. *В условиях теоремы 4 константы в неравенствах (76), (77), (78) и (79) можно упростить, оценив их сверху, используя неравенства (39):*

$$\hat{\hat{C}} \leq \frac{1}{\nu}\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{2\nu^2}\|f\|_{-1}^2,$$

$$\check{\check{C}} \leq \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2((-\Delta+\gamma I)^{-1}e_i, e_i) + \frac{1}{\nu^2}\|f\|_{-2}^2,$$

$$\hat{\hat{c}}(\kappa_*) \leq \frac{(2+\gamma)\kappa_*}{2}\left(\frac{1}{2-\alpha_*}\mathrm{b}^2 + \frac{2+\gamma}{(2-\alpha_*)^2\nu}\|f\|_{-1}^2\right),$$

$$\check{\check{c}}(\kappa_*) \leq \frac{(2+\gamma)\kappa_*}{2}\left(\frac{1}{2-\alpha_*}\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2((-\Delta+\gamma I)^{-1}e_i, e_i) + \frac{2}{(2-\alpha_*)^2\nu}\|f\|_{-2}^2\right),$$

$C(y)$ была оценена в (40). В условиях следствия 4 константы в неравенствах (80) и (81) можно упростить, оценив их сверху, используя неравенства (39):

$$\check{c}_0 \leq \frac{1}{2\nu}\left(\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2((-\Delta+\gamma I)^{-1}e_i, e_i) + \frac{1}{\nu}\|f\|_{-2}^2\right),$$

$$\check{c}_2^2 \leq \frac{1}{\nu}\mathrm{b}^2 + (6+\gamma)\frac{1}{\nu^2}|||f|||_{-1}^2.$$

Замечание 5. I. *Правые части оценок* (76), (77), (78), (79), (80), (81) *не зависят от* ν, *если* $f \sim \nu$ *и* $b_i \sim \sqrt{\nu}$, $i = 1, 2, \ldots$.

II. *Оценка снизу* (81) *обращается в нуль тогда и только тогда, когда* $b_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots$ *(т. е. рассматривается невозмущенное белым шумом уравнение).*

III. *Теорема 4 и следствие 4 включает в себя детерминированный случай, когда* $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \mathbf{0}$. *В этом случае мы получим оценки и равенства для любой инвариантной меры* $m \in \mathrm{P}(h^2)$:

$$m(\{u_0 \in h^2 : u(t, x, u_0) \in \Gamma\}) = m(\Gamma) \quad \text{для любых} \ \ \Gamma \in \sigma_{h^2} \ \ \text{и} \ \ t \geq 0$$

(здесь $u(t, x, u_0)$ *– решение задачи Коши для детерминированного уравнения* (73), (74) *с начальным условием* $u(0) = u_0 \in h^2$*). А также в детерминированном случае будет выполнено утверждение пункта* I, *если* $f \sim \nu$, *и оценка снизу* (81) *обратится в нуль.*

Замечание 6. *Заметим, что в* [27] *были приведены некоторые оценки (1.3), (1.5) и равенство (1.4) на стационарное решение уравнения вида* (73), *заданном на двумерном торе* $(\mathbb{R}/2\pi L\mathbb{Z}) \times (\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, *где* $L > 0$ *– большое вещественное число. В* [27] $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ *– ортонормированный базис, состоящий из собственных функций оператора Стокса,* $f = 0$ *и предполагалось, что* $B_2 < \infty$ *(в нашем случае это было бы неравенство* $\sum_{i=1}^{\infty} b_i^2 \|e_i\|_2^2 < \infty$, *которое не требуется для выполнения полученных результатов).*

References

[1] Yu.Yu. Klevtsova, *Well-posedness of the Cauchy problem for the stochastic system for the Lorenz model for a baroclinic atmosphere*, Sb. Math., **203**:10 (2012), 1490–1517.

[2] Yu.Yu. Klevtsova, *On the existence of a stationary measure for the stochastic system of the Lorenz model describing a baroclinic atmosphere*, Sb. Math., **204**:9 (2013), 1307–1331.

[3] Yu.Yu. Klevtsova, *The uniqueness of a stationary measure for the stochastic system of the Lorenz model describing a baroclinic atmosphere*, Sb. Math., **206**:3 (2015), 421–469.

[4] Yu.Yu. Klevtsova, *On the rate of convergence as* $t \to +\infty$ *of the distributions of solutions to the stationary measure for the stochastic system of the Lorenz model describing a baroclinic atmosphere*, Sb. Math., **208**:7 (2017), 929–976.

[5] B.V. Pal'tsev, *Spherical functions*, A textbook, Moscow Institute for Physics and Technology, Moscow, 2000. (Russian)

[6] V.P. Dymnikov, *Stability and predictability of large-scale atmospheric processes*, Institute for Numerical Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, 2007. (Russian)

[7] Yu.N. Skiba, *Mathematical problems on the dynamics of viscous barotropic fluid on a rotating sphere*, Indian Institute of Tropical Meteorology, Pune, INDIA, 1990.

[8] G. Da Prato, J. Zabczyk, *Stochastic equations in infinite dimensions*, Encyclopedia Math. Appl., **45**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

[9] S.G. Mikhlin, *Linear partial differential equations*, Vysshaya Shkola, Moscow, 1977. (Russian)

[10] S.G. Mikhlin *Multidimensional singular integrals and integral equations*, Pergamon Press, Oxford–New York–Paris, 1965.

[11] V.N. Krupchatnikov, G.P. Kurbatkin, *Modelling large-scale dynamics of the atmosphere. Methods for diagnosing the general circulation*, Computer Centre, Siberian Branch of the USSR Academy of Sciences, Novosibirsk, 1991. (Russian)

[12] S. Kuksin, A. Shirikyan, *Mathematics of two-dimensional turbulence*, Cambridge Tracts in Math., **194**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[13] K. Yosida, *Functional analysis*, Grundlehren Math. Wiss., **123**, Springer-Verlag, Berlin, Academic Press, Inc., New York, 1965.

[14] Yu.N. Skiba, *Spectral approximation in the numerical stability study of nondivergent viscous flows on a sphere*, Numer. Methods Partial Differential Equations, **14**:2 (1998), 143–157.

[15] N. Ikeda, Sh. Watanabe, *Stochastic differential equations and diffusion processes*, North-Holland Math. Library, **24**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam–New York, Kodansha, Ltd., Tokyo, 1981.
[16] A.N. Shiryaev, *Probability*, third ed., Moscow Center for Continuous Mathematical Education, Moscow, 2004. (Russian)
[17] N. Dunford, J. T. Schwartz *Linear operators,* v. I: *General theory*, Pure Appl. Math., **7**, Interscience Publishers, Inc., New York, Interscience Publishers, Ltd., London, 1958.
[18] P. Billingsley, *Convergence of Probability mesures*, Wiley, New York, 1968.
[19] J. Neveu, *Bases mathématiques du calcul des probabilités*, Masson et Cie, Éditeurs, Paris, 1964.
[20] A.V. Bulinski, A.N. Shiryaev, *Theory of random processes*, Fizmatlit, Moscow, 2005. (Russian)
[21] N.N. Vakhania, V.I. Tarieladze, S.A. Chobanyan, *Probability distributions on Banach spaces*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **14**, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.
[22] A.D. Wentzell, *A course in the theory of stochastic processes* 2nd ed., Nauka, Moscow, 1996. (Russian)
[23] V.M. Kadets, *A course in Functional analysis*, Textbook for students of mechanics and mathematics department, Khar'kovskij Natsional'nyj Universitet Im. V. N. Karazina, Khar'kov, 2006. (Russian)
[24] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Elements of the theory of functions and functional analysis*, 7th ed., Fizmatlit, Moscow, 2004. (Russian)
[25] V.P. Dymnikov, A.N. Filatov, *Mathematics of climate modeling*, Model. Simul. Sci. Eng. Technol., Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1997.
[26] A.S. Gorelov, *Dimension of the attractor for a two-layer baroclinic model*, Dokl. Earth Sci., **345A**:9 (1996), 1–7.
[27] S. Kuksin, A. Maiocchi, *The limit of small Rossby numbers for randomly forced quasi-geostrophic equation on β-plane*, Nonlinearity, **28**:7 (2015), 2319–2341.

Yulia Yur'evna Klevtsova
Siberian State University of Telecommunications and Information Science,
ul. Kirova, 86,
630102, Novosibirsk, Russia
E-mail address: yy_klevtsova@ngs.ru