

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 20, №2, стр. 626–637 (2023)

УДК 517.958, 530.145

DOI 10.33048/semi.2023.20.037

MSC 82B20, 81T25

ШАШКИ ФЕЙНМАНА С ПОГЛОЩЕНИЕМ

М.Д. ДМИТРИЕВ

АБСТРАКТ. We give a new elementary proof of the theorem by Ambainis et al. that for a quantum walk, the probability amplitudes of absorption at the initial point after $4n$ steps are proportional to the Catalan numbers. We also calculate the absorption probabilities at points close to the initial one and prove a relation that connects the probability amplitudes along the diagonal.

Keywords: Feynman checkers, quantum walks, Catalan numbers, reflection method

ВВЕДЕНИЕ

”Шашки Фейнмана”— это наиболее элементарная модель движения электрона. Модель была предложена Ричардом Фейнманом в 1965 году [2]. Она известна также как одномерное квантовое блуждание [1]. Модель наиболее примечательна тем, что она наглядно иллюстрирует многие базовые идеи квантовой теории и является одной из архитектур универсального квантового компьютера [11]. Актуальные обзоры приводятся в [3, 5, 10, 11].

В основу данной работы лег известный результат Амбаиниса и его коллег [1] о том, что вероятность возвращения одномерного квантового блуждания в начальную точку равна $\frac{2}{\pi}$ (теорема 1). Напомним, что для классического случайного блуждания эта вероятность равна 1 (теорема Пойа). Мы приводим новое элементарное доказательство этого результата и обобщаем его на точки, близкие к начальной (теорема 2).

DMITRIEV M.D., FEYNMAN CHECKERS WITH ABSORPTION.

© 2023 DMITRIEV M.D.

Работа поддержана грантом Фонда развития теоретической физики и математики ”Базис” № 21-7-2-19-1. Раздел ”Новое доказательство теоремы Амбаиниса и соавторов” подготовлен в ходе проведения исследования (номер 23-00-002) в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2023 г.

Поступила 7 ноября 2022 г., опубликована ?? июля 2023 г.

5		0		$\frac{1-2i}{4}$	$\frac{i}{4}$			
4	$\frac{1}{2\sqrt{2}}$		$\frac{1-i}{2\sqrt{2}}$		$\frac{i}{2\sqrt{2}}$			
3		$\frac{1}{2}$		$\frac{i}{2}$				
2	$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$\frac{i}{\sqrt{2}}$					
1		i						
$t=0$								
	$x=0$	1	2	3	4	5		

Рис. 3. Значения $a(x, t | 0)$ при $0 \leq x, t \leq 5$ **Теорема 2.**

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(3, t | 3) = 2 \sum_{t=1}^{\infty} P(-1, t | -1) =$$

$$4 \sum_{t=1}^{\infty} P(2, t | 2) - 2 = \frac{8}{\pi} - 2.$$

Основной интерес представляет первое равенство, так как второе и третье легко следуют из теоремы 1 и лемм 2 и 3. Похожие числа возникают для простого случайного блуждания на \mathbb{Z}^2 [8, таблица 2].

НОВОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ АМБАИНИСА И СОАВТОРОВ

Для нового доказательства теоремы 1 нам потребуется следующая лемма, аналогичная известному рекуррентному соотношению для чисел Каталана.

Лемма 1. Для любого целого $n > 2$ выполнено:

$$a(0, 2n | 0) = \frac{-1}{\sqrt{2}} \sum_{j=2}^{n-2} a(0, 2(n-j) | 0) a(0, 2j | 0).$$

Доказательство. См. рис. 4. Рассмотрим путь p шашки из точки $(0, 0)$ в точку $(0, 2n)$, который не имеет других точек пересечения с прямой $x = 0$. Заметим, что при $n > 1$ такой путь пересекает прямую $x = 2$ в точке $(2, 2)$. Так как p заканчивается на прямой $x = 0$, то он пересекает прямую $x = 1$ в еще хотя бы одной точке $(1, 2j + 1)$, отличной от $(1, 1)$. Здесь j может принимать значения от 1 до $n - 1$. Выберем среди этих j наименьшее. Рассмотрим отображение, которое каждому пути p сопоставляет пару путей (m, l) , стартующих из $(0, 0)$, где путь l повторяет все ходы пути p со второго и до $(2j + 1)$ -го, а путь m

начинается с хода вправо-вверх, а затем повторяет ходы пути p с $(2j+2)$ -го до последнего.

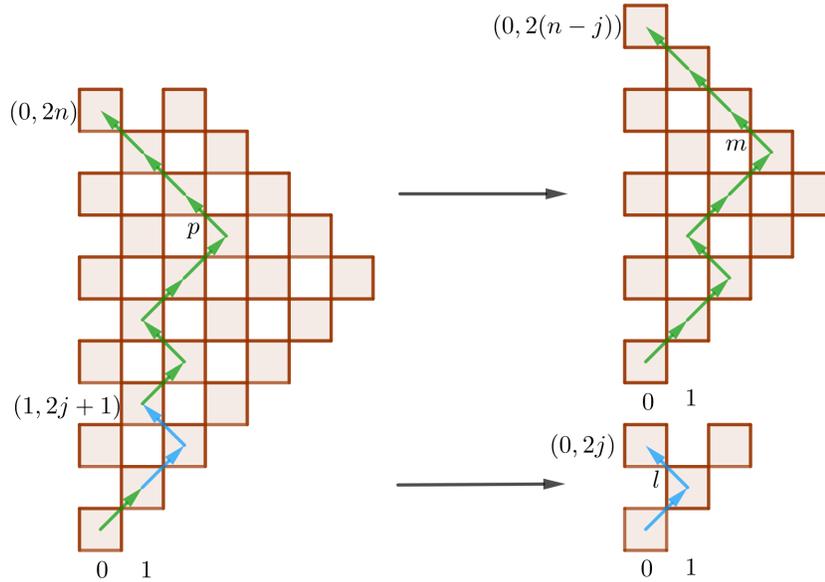


Рис. 4. Отображение путей (см. лемму 1)

Покажем, что это отображение — биекция между множеством путей, дающими вклад в $a(0, 2n | 0)$, и объединением множеств пар путей, дающих вклад в $a(0, 2(n-j) | 0)$ и $a(0, 2j | 0)$ соответственно, по всем j от 1 до $n-1$. Для этого построим обратное отображение, т.е. по любой паре (m, l) восстановим путь p . Сделаем из точки $(0, 0)$ сначала ход вправо-вверх, затем все ходы пути l , а затем ходы пути m , кроме первого. Легко видеть, что построенный путь приходит в точку $(0, 2n)$ и он впервые пересекает прямую $x = 1$ в точке $(1, 2j+1)$. Ясно, что построенное отображение обратное исходному, а значит, они оба — биекции.

Тогда при $j < n-1$ имеем

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} a(p) &= -i(-i)^{\text{turns}(p)} 2^{1-n} = \\ &= i(-i)^{\text{turns}(m)} 2^{1/2-n+j} i(-i)^{\text{turns}(l)} 2^{1/2-j} = a(m)a(l), \end{aligned}$$

так как путь p имеет такую же длину и на один поворот больше, чем l и m в сумме.

Если же $j = n-1$, то $\sqrt{2} a(p) = a(l)a(m)$, так как путь p имеет такую же длину и на один поворот меньше, чем l и m в сумме.

Тогда, суммируя по всем путям p , получаем:

$$\begin{aligned} -\sqrt{2} a(0, 2n | 0) &= \sum_{j=1}^{n-2} a(0, 2(n-j) | 0) a(0, 2j | 0) - \\ &\quad - a(0, 2(n-1) | 0) a(0, 2 | 0) \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=2}^{n-2} a(0, 2(n-j) | 0) a(0, 2j | 0).$$

□

Теперь мы можем легко доказать теорему 1.

Первое доказательство теоремы 1. Достаточно доказать утверждение для четного $t = 2n$. Сделаем это по индукции.

Базу индукции ($n = 1$ и 2) легко проверить из определений. Докажем переход.

Если n — четное больше двух, то

$$\begin{aligned} a(0, 2n | 0) &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \sum_{j=2}^{n-2} a(0, 2(n-j) | 0) a(0, 2j | 0) = \\ &= \frac{-1}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ четное}}}^{n-2} \frac{(-1)^{(n-j)/2-1} \binom{n-j-2}{(n-j)/2-1}}{((n-j)/2) 2^{n-j-1/2}} \cdot \frac{(-1)^{j/2-1} \binom{j-2}{j/2-1}}{(j/2) 2^{j-1/2}} = \\ &= \frac{(-1)^{n/2-1} \binom{n-2}{n/2-1}}{(n/2) 2^{n-1/2}}. \end{aligned}$$

Здесь первое равенство следует из леммы 1, второе — из предположения индукции, а последнее — из рекуррентной формулы для чисел Каталана.

Если же n — нечетное больше двух, то

$$\begin{aligned} a(0, 2n | 0) &= \frac{-2}{\sqrt{2}} \sum_{j=2}^{n-2} a(0, 2(n-j) | 0) a(0, 2j | 0) = \\ &= \frac{-2}{\sqrt{2}} \sum_{\substack{j=2 \\ j \text{ четное}}}^{n-2} 0 \cdot \frac{(-1)^{j/2-1} \binom{j-2}{j/2-1}}{(j/2) 2^{j-1/2}} = 0. \end{aligned}$$

Равенство $\sum_{t=1}^{\infty} P(0, t | 0) = \frac{2}{\pi}$ доказывается так же, как в [1, доказательство теоремы 8]. □

Приведем также другое доказательство теоремы 1, которое показывает, откуда берется формула.

Второе доказательство теоремы 1. Введем производящую функцию $A(q) = \sum_{n=1}^{\infty} a(0, 2n | 0) q^n$. Тогда из леммы 1 легко получить следующее соотношение для $A(q)$:

$$A(q) = \frac{-1}{\sqrt{2}} A(q)^2 + q A(q) + \frac{q}{\sqrt{2}}.$$

Решая полученное уравнение относительно $A(q)$, получаем:

$$A(q) = \frac{q-1 \pm \sqrt{1+q^2}}{\sqrt{2}}.$$

Заметим, что нам подходит $A(q) = \frac{q-1+\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{2}}$, так как $A(0) = 0$.

Раскладывая $A(q)$, получаем искомое равенство. □

Замечание 1. В статье [1, (19)] использовалось более сложное соотношение $f(z) = z - z(zf(z) + zf(z)^2 + zf(z)^3 + \dots)$, где $f(z) = \frac{-A(-2z^2)}{\sqrt{2z}}$. Для его получения использовалась похожая идея, но рассматривались все точки пересечения с вертикалью $x = 1$ и путь разбивался на k меньших путей, где k - число точек пересечения. Для нахождения $f(z)$ из соотношения требовались дополнительные шаги, которые в нашей ситуации не понадобились.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА

Теперь докажем основной результат работы — теорему 2. Нам потребуется несколько лемм.

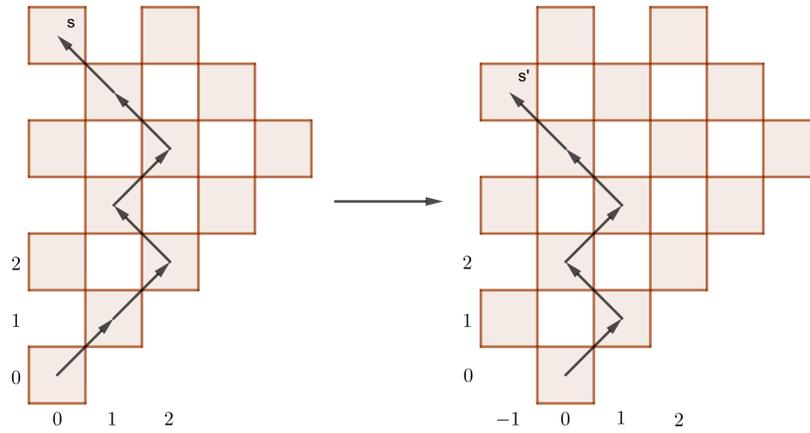


Рис. 5. Отображение путей (см. лемму 2)

Лемма 2. При $t > 2$ верно равенство $a(-1, t | -1) = \sqrt{2} a(0, t + 1 | 0)$.

Доказательство. Построим биекцию между путями, дающими вклад в $a(0, t + 1 | 0)$, и путями, дающими вклад в $a(-1, t | -1)$. Рассмотрим путь s , дающий вклад в $a(0, t + 1 | 0)$, и построим по нему путь s' , дающий вклад в $a(-1, t | -1)$, сдвинув s на вектор $(-1, -1)$ и удалив первый ход (как на рис. 5). Заметим, что для $t > 2$ построенное отображение $s \mapsto s'$ — биекция, так как если бы построенный путь s' начинался с хода влево-вверх, то s проходил бы через точку $(0, 2)$ и не мог бы давать вклад в $a(0, t + 1 | 0)$. Из того, что путь s' короче на один шаг, следует равенство $\sqrt{2}a(s) = a(s')$. Суммируя по всем путям, получаем утверждение леммы. \square

Лемма 3. При $t > 2$ верно равенство $a(2, t | 2) = -i a(0, t | 0)$.

Доказательство. Построим биекцию между путями, дающими вклад в $a(0, t | 0)$, и путями, дающими вклад в $a(2, t | 2)$. Рассмотрим путь s , дающий вклад в $a(0, t | 0)$, и построим по нему путь s' , дающий вклад в $a(2, t | 2)$, получающийся из s отражением относительно прямой $x = 1$, начиная со второго хода (как на рис. 6).

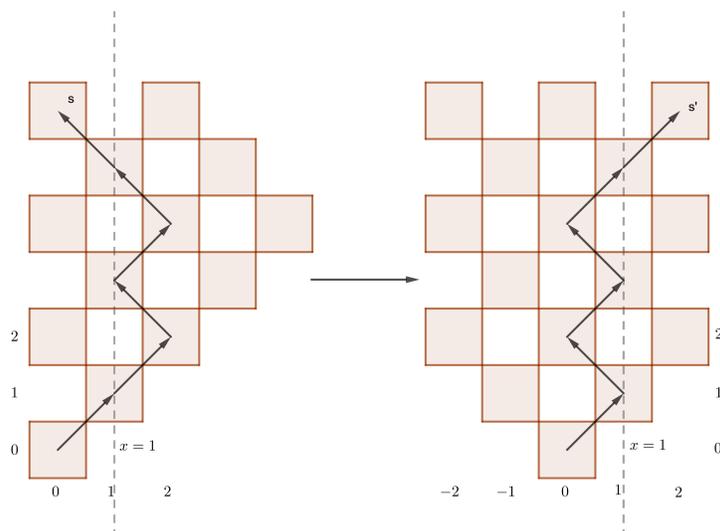


Рис. 6. Отображение путей (см. лемму 3)

Очевидно, что это биекция. Более того, верно $-i a(s) = a(s')$, если s и s' не заканчивались на горизонтали $t = 2$. Суммирование по путям s и s' завершает доказательство леммы. \square

Лемма 4. При $t > 3$ верно равенство

$$a(3, t | 3) = \sqrt{2} a(2, t - 1 | 2) - i a(-1, t | -1).$$

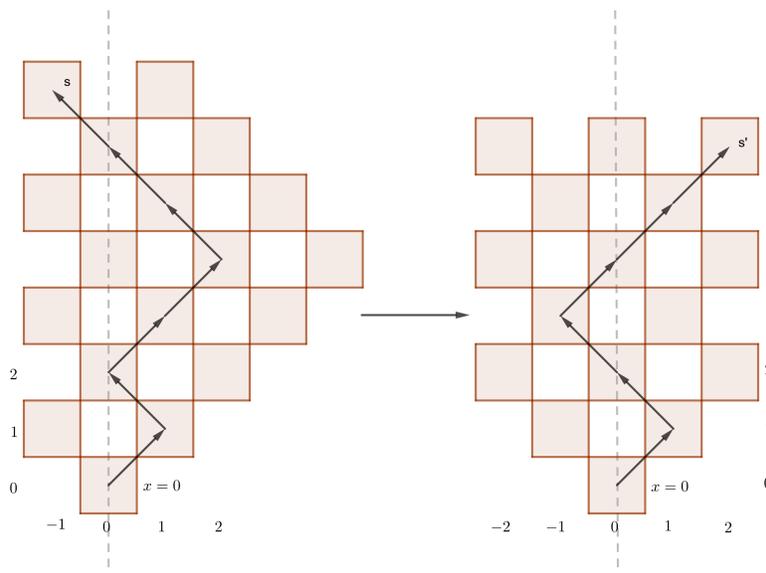


Рис. 7. Отображение путей (см. лемму 4)

Доказательство. Разобьем пути, дающие вклад в $a(3, t | 3)$, на два множества:

R — множество путей, которые начинаются с двух ходов вправо-вверх;

L — множество путей, которые начинаются с хода вправо-вверх, а затем идет ход влево-вверх.

Посторим биекцию множества R и множества путей, дающих вклад в $a(2, t - 1 | 2)$, убирая первый ход и сдвигая путь на вектор $(-1, -1)$.

Суммируя по всем таким путям, получаем

$$\sum_{s \in R} a(s) = \frac{a(2, t - 1 | 2)}{\sqrt{2}}.$$

Построим биекцию множества L и множества путей, начинающихся двумя ходами вправо-вверх и дающими вклад в $a(-1, t | -1)$. Для этого отразим путь из L , начиная со второго хода, относительно прямой $x = 1$ (Это отображение обатно изображенному на рис. 6). Для вычисления $\sum_{s \in L} a(s)$ остается посчитать сумму по путям, которые дают вклад в $a(-1, t | -1)$ и начинаются с хода вправо-вверх, а затем идет ход влево-вверх. Эти пути мы отобразим в пути, которые дают вклад в $a(2, t - 1 | 2)$, убрав первый ход и сделав сдвиг на вектор $(-1, -1)$, а затем отражение относительно прямой $x = 0$ (как на рис. 7). В результате получаем

$$\sum_{s \in L} a(s) = -i a(-1, t | -1) + \frac{1}{\sqrt{2}} a(2, t - 1 | 2).$$

Прибавляя вычисленную ранее сумму по $s \in R$, получаем требуемое утверждение. \square

Предложение 1. При $t > 3$ верно следующее равенство

$$a(3, t | 3) = -i \sqrt{2} a(0, t + 1 | 0) - i \sqrt{2} a(0, t - 1 | 0).$$

Доказательство. По леммам 2 – 4 имеем

$$\begin{aligned} a(3, t | 3) &= \sqrt{2} a(2, t - 1 | 2) - i a(-1, t | -1) = \\ &= -i \sqrt{2} a(0, t + 1 | 0) - i \sqrt{2} a(0, t - 1 | 0). \end{aligned}$$

\square

Доказательство теоремы 2. Из теоремы 1 получаем, что $a(0, 4k + 4 | 0) = \frac{(-1)^k \binom{2k}{k}}{(k+1)2^{2k+3/2}}$, а $a(0, 4k + 2 | 0) = 0$ при целых $k > 0$. Тогда из предложения 1 получаем

$$P(3, 4k + 1 | 3) = 2|a(0, 4k | 0)|^2$$

, а

$$P(3, 4k + 3 | 3) = 2|a(0, 4(k + 1) | 0)|^2.$$

Так как

$$\sum_{t=1}^{\infty} P(0, t | 0) = \frac{2}{\pi}$$

по теореме 1, то

$$\begin{aligned} &\sum_{t \in \mathbb{Z}} P(3, t | 3) = \\ &= \sum_{t > 3} 2|a(0, t + 1 | 0)|^2 + \sum_{t > 3} 2|a(0, t - 1 | 0)|^2 + P(3, 3 | 3) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2 \left(\sum_{t=1}^{\infty} P(0, t | 0) - P(0, 2 | 0) - P(0, 4 | 0) \right) + \\
&+ 2 \left(\sum_{t=1}^{\infty} P(0, t | 0) - P(0, 2 | 0) \right) + P(3, 3 | 3) = \\
&= 2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8} \right) + 2 \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} = \frac{8}{\pi} - 2.
\end{aligned}$$

Остальные равенства в теореме прямо следуют из теоремы 1 и лемм 2 и 3. \square

ВАРИАЦИИ

В заключение докажем еще одну рекуррентную формулу.

Теорема 3. Для любых целых $x_0 \leq 0$ и $n > \max\{1 - x_0, 2\}$ выполнено

$$\begin{aligned}
a(x_0, 2n + x_0 | x_0) &= \sum_{x=2}^n 2^{-x/2} \operatorname{Im} a(x_0 + x, 2n - x + x_0 | x_0) = \\
&= - \sum_{x=2}^{n-1} 2^{-x/2-1} \operatorname{Re} a(x_0 + x, 2n - 2 - x + x_0 | x_0).
\end{aligned}$$

Замечание 2. Для модели без поглощения (см. начало раздела "Определение модели") численный эксперимент подсказывает похожее равенство, отличающееся лишь степенью двойки во второй сумме и пределами суммирования:

$$a(0, 2n) = \sum_{x=2}^n 2^{-x/2} \operatorname{Im} a(x, 2n - x) = - \sum_{x=2}^{n-1} 2^{-x/2} \operatorname{Re} a(x, 2n - 2 - x).$$

Это показывает, что теорема 3 не может быть напрямую выведена из рекуррентного соотношения [10, Предложение 5], так как это соотношения одинаково для моделей без поглощения и с поглощением. Здесь первое равенство доказывается аналогично лемме 5, а второе мы не умеем доказывать.

Первое равенство теоремы 3 почти очевидно.

Лемма 5. Для любого $x_0 \leq 0$ и $n > -x_0$ выполнено

$$a(x_0, 2n + x_0 | x_0) = \sum_{x=2}^n 2^{-x/2} \operatorname{Im} a(x_0 + x, 2n - x + x_0 | x_0).$$

Доказательство. Назовём *главной диагональю* множество точек, из которых можно попасть в точку $(x_0, 2n + x_0)$, двигаясь все время влево-вверх, то есть множество точек с координатами $(x_0 + x, 2n - x + x_0)$, где x пробегает целые неотрицательные числа. Для доказательства достаточно заметить, что путь шашки, дающий вклад в $a(x_0, 2n + x_0 | x_0)$ приходит в точку $(x_0, 2n + x_0)$ справа-снизу, а значит он обязан проходить по главной диагонали. Легко видеть, что как только путь попадает на главную диагональ, он движется в точку $(x_0, 2n + x_0)$ в одном направлении. При этом очевидно, что в точку $(x_0 + 1, 2n + x_0 - 1)$ описанный путь прийти слева-снизу не может, так как в таком случае он проходит через точку $(x_0, 2n + x_0 - 2)$. Остается заметить, что при $x > n$ путей через точку $(x_0 + x, 2n - x + x_0)$ не существует, а при $x \leq n$ и $n > -x_0$ все слагаемые в правой части определены. \square

Для доказательства второго равенства в теореме 3 нам потребуется несколько новых обозначений. Каждому пути s шашки мы сопоставим последовательность из нулей и единиц, записывая "1" после каждого хода вправо-вверх и "0" после хода влево-вверх. Назовем сопоставленную пути s последовательность его *двоичной записью*.

Обозначим через $M(x, t)$ множество путей шашки, начинающихся в точке $(0, 0)$ с хода вправо-вверх, заканчивающихся в точке (x, t) и не пересекающих прямую $x = x_0$, кроме быть может, начальной и конечной точки, двоичная запись которых не содержит подпоследовательностей 11000 или 10100.

Лемма 6. При любых $x, t > 0$ и $x_0 \leq 0$ верно, что $a(x, t | x_0) = \sum_{s \in M(x, t)} a(s)$.

Доказательство. Обозначим через A_1 множество путей шашки, начинающихся в точке $(0, 0)$ с хода вправо-вверх, заканчивающихся в точке (x, t) и не пересекающих прямую $x = x_0$, кроме быть может, начальной и конечной точки, в двоичной записи которых встречается подпоследовательность 11000, причём впервые она встречается не позже 10100, если читать слева направо. Аналогично обозначим через A_0 множество путей, в двоичной записи которых встречается подпоследовательность 10100, причём впервые она встречается не позже 11000.

Построим биекцию множества A_1 и множества A_0 . Пусть путь $s \in A_1$ имеет двоичную запись $a_1 \dots a_i 11000 a_{i+6} \dots a_t$, и последовательность $a_1 \dots a_i$ не содержит подпоследовательности 11000 или 10100. Тогда отобразим s в путь s' , имеющий запись $a_1 \dots a_i 10100 a_{i+6} \dots a_t$. Легко понять, что $s' \in A_0$. Покажем, что это сопоставление — биекция. Предположим, что пути s_1 с записью $a_1 \dots a_i 11000 a_{i+6} \dots a_t$ и s_2 с записью $b_1 \dots b_k 11000 b_{k+6} \dots b_t$ отобразились в один путь s' , причём $i < k$. Тогда в записи пути s' есть две пересекающихся подпоследовательности 10100, иначе $b_1 \dots b_k$ содержит 11000, что противоречит построению. Однако очевидно, что две подпоследовательности 10100 в одной двоичной записи пересекаться не могут. Также из того что $x_0 < 0$ очевидно, что в каждый путь содержащий 10100 переходит какой-либо путь содержащий 11000. Значит, полученное сопоставление — биекция. Для доказательства леммы остается заметить, что $a(s) = -a(s')$, так как s' содержит на два поворота больше, а значит,

$$a(x, t, |, x_0) = \sum_{s \in M(x, t)} a(s) + \sum_{s \in A_1} a(s) + \sum_{s \in A_0} a(s) = \sum_{s \in M(x, t)} a(s).$$

□

Лемма 7. Для любого $x_0 > 0$ и $n > 1 - x_0$ или $n > 2$ при $x_0 = 0$ двоичная запись любого пути из множества $M(x_0, 2n + x_0)$ заканчивается последовательностью 0010...0, в конце которой два или больше нулей.

Доказательство. Заметим, что если путь пришел в точку $(x_0, 2n + x_0)$, то, так как $x_0 < 0$, он пришел справа, а значит имеет конец 0..0 содержащий хотя бы два 0, иначе путь проходил бы через точку $(x_0, 2n + x_0 - 2)$. Если путь заканчивается хотя бы тремя 0 и при этом лежит в $M(x_0, 2n + x_0)$, то его конец имеет вид 0010...0, иначе он содержал бы 11000 или 10100, что противоречило бы построению множества $M(x_0, 2n + x_0)$, или имел бы вид 10...0, но тогда $n = 1 - x_0$, что противоречило бы условию леммы. Остается рассмотреть случай, когда путь заканчивается двумя 0. Тогда его конец не может иметь вид 1100, так как в таком случае путь проходит через точку $(x_0, 2n + x_0 - 4)$. Также путь

не может заканчиваться 10100, а значит, заканчивается 00100. Мы полагаем, что все рассматриваемые выше точки отличны от $(0, 0)$, что верно при $x_0 \neq 0$ или $n > 2$. \square

Доказательство теоремы 3. По лемме 6 имеем

$$a(x_0, 2n + x_0 | x_0) = \sum_{s \in M(x_0, 2n + x_0)} a(s),$$

а по лемме 7 двоичная запись любого пути из $M(x_0, 2n + x_0)$ заканчивается последовательностью 0010...0. Тогда пути $s \in M(x_0, 2n + x_0)$ с двоичной записью $a_1 \dots a_{2n-x_0-x-3} 0010 \dots 0$ сопоставим путь $s' \in M(x_0 + x, 2n - x_0 - x - 2)$ с двоичной записью $a_1 \dots a_{2n-x_0-x-3} 0$. Суммируя по всем путям, получаем второе равенство из теоремы. Первое равенство следует из леммы 5. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Ambainis, E. Bach, A. Nayak, A. Vishwanath, J. Watrous, *One-dimensional quantum walks*, Proc. of the 33rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, STOC 2001, ACM Press, New York, 2001, 37–49. Zbl 1323.81021
- [2] R.P. Feynman, A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals*, McGraw-Hill, Maidenhead, Berksh., 1965. Zbl 0176.54902
- [3] J. Kempe, *Quantum random walks: an introductory overview*, Contemp. Phys., **50**:1 (2009), 339–359.
- [4] F. Kuyanov, A. Slizkov, *Feynman checkers: number-theoretic properties*, Rev. Math. Phys., Article ID 2350022 DOI: 10.1142/S0129055X23500228.
- [5] C. Liu, N. Petulante, *Weak limits for quantum walks on the half-line*, Int. J. Quantum Inf., **11**:6 (2013), Article ID 1350054. Zbl 1287.81071
- [6] I. Novikov, *Feynman checkers: the probability to find an electron vanishes nowhere inside the light cone*, Rev. Math. Phys., **34**:7 (2022), Article ID 2250020. Zbl 7585105
- [7] F. Ozhegov, *Feynman checkers: external electromagnetic field and asymptotic properties*, submitted 2022, arXiv:2209.00938.
- [8] M. Skopenkov, A. Pakharev, A. Ustinov, *Through the resisting net*, Mat. Prosv. 3rd ser., **18** (2014), 33–65.
- [9] M. Skopenkov, A. Ustinov, *Feynman checkers: Minkowskian lattice quantum field theory*, submitted 2022, arXiv:2208.14247.
- [10] M. Skopenkov, A. Ustinov, *Feynman checkers: towards algorithmic quantum theory*, Russian Math. Surveys, **77**:3(465) (2022), 73–160.
- [11] S.E. Venegas-Andraca, *Quantum walks: a comprehensive review*, Quantum Inf. Process., **11**:5 (2012), 1015–1106. Zbl 1283.81040

MIKHAIL DMITRIEVICH DMITRIEV
 NATIONAL RESEARCH UNIVERSITY HIGHER SCHOOL OF ECONOMICS,
 USACHEVA 6,
 119048, MOSCOW, RUSSIA
Email address: mddmitriev@edu.hse.ru