S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 1094–1102 (2022) УДК 510.67, 519.151
DOI 10.33048/semi.2022.19.088 MSC 03C48, 05B35

ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД РАЗЛИЧНЫМИ КЛАССАМИ КОНЕЧНЫХ МАТРОИДОВ

А.В. ИЛЬЕВ

Abstract. In the paper, it is proved that the problem of checking compatibility of a finite system of equations over a matroid of rank not exeeding k is $\mathcal{NP}$-complete for $k \geqslant 2$. Moreover, it is proved that the problem of checking compatibility of a finite system of equations over a k-uniform matroid is also $\mathcal{NP}$-complete for $k \geqslant 2$, and the problem of checking compatibility of a finite system of equations over a partition matroid of rank not exeeding k is polynomially solvable for $k = 2$ and $\mathcal{NP}$-complete for $k \geqslant 3$.

Keywords: graph, matroid, system of equations, computational complexity.

1. Введение

Решение систем уравнений над вещественными, комплексными, рациональными и целыми числами является традиционным направлением исследований в алгебраической геометрии, которому посвящены многочисленные теоретические и практические исследования. Алгоритмические проблемы, связанные с решением систем уравнений, чаще всего оказываются либо неразрешимыми, либо разрешимыми, но вычислительно трудными. Из наиболее известных неразрешимых проблем можно выделить проблему решения полиномиальных уравнений над кольцом целых чисел [1]. К числу разрешимых проблем, имеющих экспоненциальную сложность, относится проблема решения систем полиномиальных уравнений над полями комплексных и вещественных чисел [2]

Ilev, A.V., Study of systems of equations over various classes of finite matroids.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

Поступила 5 ноября 2022 г., опубликована 29 декабря 2022 г.

и проблема решения систем полиномиальных уравнений над конечными полями, которая эквивалентна $\mathcal{NP}$-полной проблеме выполнимости булевых формул [3].

В последние годы в алгебраической геометрии активно изучаются системы уравнений над произвольными алгебраическими системами, где уравнениями являются атомарные формулы языка алгебраической системы [4]. И в рамках этого направления исследований также естественным образом возникают вопросы разрешимости и вычислительной сложности алгоритмических проблем. Например, было доказано, что проблема совместности систем уравнений над конечными частично упорядоченными множествами является $\mathcal{NP}$-полной в том случае, когда проверяется существование решения, состоящего из попарно различных элементов частично упорядоченного множества [5], или что экзистенциальная теория класса всех конечных полей является $\mathcal{NP}$-трудной, а универсальная теория этого класса является co-$\mathcal{NP}$-трудной [6].

Кроме того, ряд результатов был получен и для обыкновенных графов и матроидов. Вопросы разрешимости универсальных теорий различных классов графов, которые имеют тесную связь с решением систем уравнений над конечными графами, подробно рассматривались в [7]. Затем предлагался алгоритм решения системы уравнений над произвольным конечным графом, который находил её общее решение — координатный граф [8]. В дальнейшем была подсчитана вычислительная сложность этого алгоритма и доказывалось, что задача проверки совместности конечной системы уравнений над обыкновенным графом является $\mathcal{NP}$-полной [9]. Для различных классов матроидов вопросы аксиоматизируемости и разрешимости их универсальных теорий были рассмотрены в [10, 11, 12].

В настоящей работе исследуются конечные системы уравнений над графами и матроидами. Доказано, что распознавательный вариант задачи о p-раскраске графа полиномиально сводится к задаче проверки совместности системы уравнений над конечным полным p-дольным графом, откуда следует её $\mathcal{NP}$-полнота при $p \geqslant 3$. В свою очередь, эта задача полиномиально сводится к частному случаю задачи проверки совместности системы уравнений над конечным матроидом ранга, не превосходящего k, которая, таким образом, тоже является $\mathcal{NP}$-полной задачей при $k \geqslant 2$. Помимо этого, показано, что задача проверки совместности системы уравнений над конечным k-однородным матроидом также $\mathcal{NP}$-полна при $k \geqslant 2$, а задача проверки совместности системы уравнений над конечным матроидом разбиения ранга, не превосходящего k, полиномиально разрешима при $k = 2$ и $\mathcal{NP}$-полна при $k \geqslant 3$.

2. Предварительные сведения

Поскольку в данной работе рассматриваются только алгебраические системы, языки которых не содержат функциональных символов, то здесь и далее все определения адаптированы под предикатный случай.

Множество $T_{\mathrm{L}}(X)$ *термов* языка L от переменных из множества X состоит из всех переменных $x \in X$ и всех констант $c \in \mathrm{C}$ языка L. Множество $At_{\mathrm{L}}(X)$ *атомарных формул* языка L от переменных из множества X состоит из всех формул вида $t_i = t_j$ и $R(t_1, t_2, ..., t_k)$, где $t_1, t_2, ..., t_k \in T_{\mathrm{L}}(X)$, а $R(x_1, x_2, ..., x_k)$ — предикат языка L. Атомарные формулы называются *уравнениями*, а произвольные подмножества $S \subseteq At_{\mathrm{L}}(X)$ — *системами уравнений* языка L.

Для обыкновенных графов и матроидов мы сначала вспомним их традиционные определения, а затем зададим эти объекты как бесконечные алгебраические системы.

Граф — это пара $G = (V, E)$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V, называемых *рёбрами*. Если $(u, v) \in E$, то вершины u и v называются *смежными*.

Граф — это алгебраическая система $G = \langle V, \mathrm{L}_E \rangle$, носитель которой V — непустое не более чем счётное множество, а язык $\mathrm{L}_E = \langle E, = \rangle$ состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причём предикат смежности является *иррефлексивным и симметричным*, т. е. удовлетворяет условиям:

1) $\forall x\ \neg E(x, x)$ (иррефлексивность);

2) $\forall x \forall y\ (E(x, y) \to E(y, x))$ (симметричность).

Понятие матроида впервые было введено в [13] и охватывало только конечный случай.

Матроид — это пара $M = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое конечное множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его подмножеств (называемых *независимыми*), обладающее свойствами:

(I1) если $I \in \mathcal{I},\ J \subseteq I$, то $J \in \mathcal{I}$ (наследственность);

(I2) для любых $I, J \in \mathcal{I}$ таких, что $|J| = |I| + 1$, существует элемент $j \in J \setminus I$, для которого $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$ (пополнение).

Максимальные независимые подмножества множества $A \subseteq U$ называются *базами* множества A. Максимальные независимые подмножества множества U называются *базами матроида* M. Напомним, что в матроиде все базы любого множества равномощны. *Рангом* $r(A)$ множества A называется мощность любой базы A. Число $r(M) = r(U)$ называется *рангом матроида* M.

В литературе наряду с конечными рассматриваются также бесконечные матроиды. Пусть $k \in \mathbb{N}$ — фиксированное число. В общем случае *матроид ранга, не превосходящего* k, — это пара $M = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое (возможно, бесконечное) множество, $\mathcal{I}$ — непустое семейство его независимых подмножеств, обладающее свойствами наследственности, пополнения, а также свойством (I3):

(I3) $|I| \leqslant k$ для всех $I \in \mathcal{I}$.

Чтобы определить класс *матроидов фиксированного ранга* $k \in \mathbb{N}$, в приведённом выше определении условие (I3) нужно заменить на условие (I3$'$):

(I3$'$) $r(M) = k$.

Матроид ранга, не превосходящего k, — это алгебраическая система $M = \langle U, \mathrm{L}_{I_k} \rangle$, где U — непустое не более чем счётное множество, а язык $\mathrm{L}_{I_k} = \langle I_0, I_1, ..., I_k, = \rangle$ состоит из $k+1$ предиката независимости, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства, причём предикаты независимости удовлетворяют условиям *неупорядоченности* и *неповторения элементов*, *наследственности* и *пополнения*:

• $\forall x_1\ ...\ \forall x_n\ [I_n(x_1, ..., x_n) \to \bigwedge\limits_{\pi} I_n(\pi(x_1), ..., \pi(x_n))]$, где π пробегает по всем перестановкам элементов $x_1, ..., x_n$, $n \in \{1, ..., k\}$;

• $\forall x_1\ ...\ \forall x_n\ [I_n(x_1, ..., x_n) \to \bigwedge\limits_{i \neq j} (x_i \neq x_j)]$, $n \in \{1, ..., k\}$;

• $\forall x_1 \dots \forall x_n\ [(I_n(x_1,\dots,x_n) \to I_{n-1}(x_2,\dots,x_n) \wedge\ I_{n-1}(x_1,x_3,\dots,x_n) \wedge\ \dots\ \wedge I_{n-1}(x_1,\dots,x_{n-1}))\ \wedge\ I_0],\ \ n \in \{2,\dots,k\}$;

• $\forall x_1\ \dots\ \forall x_n\ \ \forall y_1\ \dots\ \forall y_{n+1}\ \ [\ I_n(x_1,\dots,x_n)\ \wedge\ I_{n+1}(y_1,\dots,y_{n+1}) \to \bigvee\limits_{i\in\{1,\dots,n+1\}} I_{n+1}(x_1,\dots,x_n,y_i)\ ],\ \ n \in \{1,\dots,k-1\}$.

Чтобы определить *матроид фиксированного ранга* k, в приведённое выше определение нужно добавить ещё одну аксиому:

• $\exists x_1 \dots \exists x_k\ I_k(x_1,\dots,x_k)$.

В дальнейшем в работе будут использоваться следующие обозначения систем уравнений.

S_G — система уравнений языка L_E над графом G. Каждая такая система состоит из уравнений вида $E(x_i,x_j)$, $E(x_i,v_j)$, $E(v_i,v_j)$, $x_i = x_j$, $x_i = v_j$, $v_i = v_j$.

$S_{M,k}$ — система уравнений языка L_{I_k} над матроидом M. Каждая такая система состоит из уравнений вида I_0, $I_1(x_i)$, $I_1(u_j)$, $I_2(x_i,x_j)$, $I_2(x_i,u_j)$, $I_2(u_i,u_j)$, $\dots$, $I_k(x_{i_1},x_{i_2},\dots,x_{i_k})$, $I_k(x_{i_1},\dots,x_{i_{k-1}},u_{j_1})$, $\dots$, $I_k(x_{i_1},u_{j_1},\dots,u_{j_{k-1}})$, $I_k(u_{j_1},u_{j_2},\dots,u_{j_k})$, $x_i = x_j$, $x_i = u_j$, $u_i = u_j$.

Отметим, что при $k_1 < k_2$ для любой системы уравнений S_{M,k_1} существует система уравнений S_{M,k_2} такая, что S_{M,k_1} совпадает с S_{M,k_2}.

Мы будем рассматривать только конечные системы уравнений *диофантовых языков*, т. е. таких языков, в которых множество констант совпадает с множеством элементов алгебраической системы.

3. Совместность систем уравнений над полными многодольными графами

Граф G называется *p-дольным*, если множество его вершин можно разбить на p непересекающихся подмножеств — долей так, что каждое ребро в G соединяет какую-нибудь вершину одной доли с какой-либо вершиной другой доли. Граф G называется *полным p-дольным*, если он является p-дольным графом и любые его две вершины из разных долей смежны.

Мы будем называть *графом системы уравнений* S_G, состоящей из уравнений вида $E(x_i,x_j)$, граф $H = (V_X, E_X)$, в котором множество вершин V_X взаимно однозначно соответствует множеству переменных X, а множество рёбер E_X определяется уравнениями системы S_G.

Лемма 1. *Система S_G, состоящая из уравнений вида $E(x_i,x_j)$, совместна над полным p-дольным графом G тогда и только тогда, когда $p \geqslant q$, где q — минимальное количество долей, на которые можно распределить вершины графа системы S_G.*

Доказательство. 1) Необходимость. Как и в случае произвольного графа G, переменные $\{x_i\}$ системы уравнений S_G, принимающие попарно различные значения на графе G, и уравнения $E(x_i,x_j)$ образуют граф, изоморфный какому-то подграфу графа G. При этом переменные $\{x_j\}$, принимающие одинаковые значения на графе G, попадают в одну долю графа системы S_G. Следовательно, $p \geqslant q$.

2) Достаточность. Положим, что переменные $\{x_i\}$, попавшие в одну долю графа системы уравнений S_G, принимают одинаковые значения на графе G. Тогда достаточным условием совместности системы S_G над графом G будет наличие в нём клики размера q. Так как G — полный p-дольный граф, то такая клика очевидным образом существует при $p \geqslant q$. $\square$

Минимальное количество долей, на которые можно распределить вершины произвольного графа, равно минимальному числу цветов, в которое можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две его смежные вершины имели разные цвета. Данная раскраска вершин графа называется *правильной*. Т. е. при определении совместности системы уравнений над полным p-дольным графом G естественным образом возникает задача о минимальной правильной раскраске графа. Поэтому лемму 1 можно переформулировать следующим образом.

Лемма 2. *Система S_G, состоящая из уравнений вида $E(x_i, x_j)$, совместна над полным p-дольным графом G тогда и только тогда, когда граф системы S_G может быть правильно раскрашен не более, чем в p различных цветов.*

Теорема 1. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений S_G над конечным полным p-дольным графом G является $\mathcal{NP}$-полной задачей при $p \geqslant 3$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что к задаче проверки совместности системы уравнений S_G над конечным полным p-дольным графом G полиномиально сводится какая-нибудь другая $\mathcal{NP}$-полная задача распознавания [14], например, распознавательный вариант задачи о p-раскраске графа при $p \geqslant 3$.

Задача о p-раскраске графа. Дан n-вершинный граф $H = (V, E)$ и натуральное число $p \leqslant n$. Можно ли правильно раскрасить граф H в p различных цветов?

По лемме 2 для ответа на вопрос задачи о p-раскраске графа H нужно определить, совместна ли над произвольным полным p-дольным графом G, например кликой K_p, система уравнений вида $S_G = \big\{E(x_i, x_j)\big\}$ такая, что граф системы S_G изоморфен графу H.

Таким образом, задача проверки совместности системы уравнений S_G над конечным полным p-дольным графом G является $\mathcal{NP}$-полной. □

Отметим, что задача проверки совместности произвольной системы уравнений S_G над конечным полным двудольным графом G является полиномиально разрешимой [9].

4. Совместность систем уравнений над матроидами ранга, не превосходящего k

Прежде всего рассмотрим класс матроидов ранга 2. Для него существует девять видов уравнений из множества систем уравнений $\{S_{M,2}\}$: I_0, $I_1(x_i)$, $I_1(u_j)$, $I_2(x_i, x_j)$, $I_2(x_i, u_j)$, $I_2(u_i, u_j)$, $x_i = x_j$, $x_i = u_j$, $u_i = u_j$.

Произвольному матроиду ранга 2 можно поставить в соответствие граф, рёбра которого соответствуют 2-элементным базам матроида, а изолированные вершины — 1-элементным зависимым множествам матроида. Рассмотрим матроид M ранга 2, все 1-элементные множества которого независимы и которому соответствует граф G без изолированных вершин.

Предложение 1. *В графе G любая вершина смежна хотя бы с одним концом любого ребра.*

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует непосредственно из аксиомы пополнения матроида. □

Лемма 3. *Существует взаимно однозначное соответствие между классом матроидов ранга 2, все 1-элементные множества которых независимы, и классом полных p-дольных графов.*

Доказательство. 1) Докажем, что граф G, соответствующий матроиду M ранга 2, все 1-элементные множества которого независимы, является полным p-дольным графом.

В силу предложения 1 любой граф, соответствующий матроиду M, является связным. Поэтому вершины этого графа можно распределить на некоторое наименьшее количество долей, каждая из которых будет соединена с другими долями хотя бы одним ребром — иначе эту долю необходимо было бы объединить с какой-то другой.

Рассмотрим две произвольные доли графа G и соединяющее их ребро. Будем считать, что обе доли имеют не меньше двух попарно различных вершин графа. Обозначим их u_1, u_2 и v_1, v_2 соответственно, а существующее ребро — (u_1, v_1).

Тогда по предложению 1 вершины u_2 и v_2 должны быть смежны хотя бы с одним концом ребра (u_1, v_1), следовательно, существуют рёбра (u_2, v_1) и (u_1, v_2). Но тогда вершина u_2 должна быть смежна хотя бы с одним концом ребра (u_1, v_2), а вершина v_2 — хотя бы с одним концом ребра (u_2, v_1). Значит, существует также ребро (u_2, v_2) (см. рис. 1).

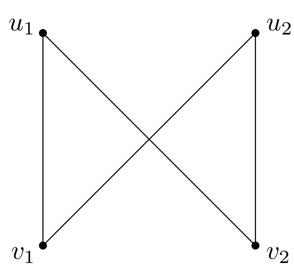

Рис. 1.

Существование необходимых рёбер в случае, когда одна из рассматриваемых долей графа G содержит ровно одну вершину, доказывается аналогично. Таким образом, каждая вершина любой из долей графа G смежна с каждой вершиной любой другой его доли, т. е. граф G является полным p-дольным графом.

2) Доказательство того, что полному p-дольному графу G соответствует матроид M ранга 2, все 1-элементные множества которого независимы, следует непосредственно из предложения 1. Фактически, это утверждение является иной формулировкой аксиомы пополнения (I2). □

Теорема 2. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным матроидом M ранга 2 является $\mathcal{NP}$-полной задачей.*

Доказательство. К задаче проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным матроидом M ранга 2 полиномиально сводится задача проверки совместности системы уравнений S_G над конечным полным p-дольным графом G, которая $\mathcal{NP}$-полна по теореме 1.

В силу леммы 3 существует взаимно однозначно соответствие между классом матроидов ранга 2, все 1-элементные множества которых независимы, и классом полных p-дольных графов. Поэтому для определения совместности над графом G произвольной системы S_G, состоящей из уравнений вида $E(x_i, x_j)$, $E(x_i, v_j)$, $E(v_i, v_j)$, $x_i = x_j$, $x_i = v_j$, $v_i = v_j$, достаточно определить, совместна ли над соответствующим ему матроидом M система $S_{M,2}$, состоящая из уравнений вида $I_2(x_i, x_j)$, $I_2(x_i, v_j)$, $I_2(v_i, v_j)$, $x_i = x_j$, $x_i = v_j$, $v_i = v_j$, в которой уравнения $I_2(t_i, t_j)$ и $t_i = t_j$ имеют место тогда и только тогда, когда соответствующие им уравнения $E(t_i, t_j)$ и $t_i = t_j$ содержатся в системе S_G.

Таким образом, задача проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным матроидом M ранга 2 является $\mathcal{NP}$-полной. □

Поскольку задача проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным матроидом ранга 2 является частным случаем задачи проверки совместности системы уравнений $S_{M,k}$ над конечным матроидом ранга, не превосходящего k, то имеет место следствие из теоремы 2.

Следствие 1. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,k}$ над конечным матроидом ранга, не превосходящего k, является $\mathcal{NP}$-полной задачей при $k \geqslant 2$.*

5. Совместность систем уравнений над однородными матроидами и матроидами разбиений

Определим вычислительную сложность некоторых частных случаев задачи проверки совместности произвольной системы уравнений над конечными матроидами. Рассмотрим наиболее простой класс матроидов — класс однородных матроидов. Матроид называется *k-однородным*, если его базами являются все подмножества, содержащие ровно k элементов. Одним из подклассов класса конечных k-однородных матроидов является класс конечных 2-однородных матроидов. Легко заметить, что всякому 2-однородному матроиду на n элементах соответствует клика K_n. Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между классом 2-однородных матроидов и классом всех клик.

Теорема 3. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным 2-однородным матроидом M является $\mathcal{NP}$-полной задачей.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2. К задаче проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным 2-однородным матроидом M полиномиально сводится задача проверки совместности системы уравнений S_G над конечным полным p-дольным графом G — в данном случае кликой K_n, для которой $p = n$. Эта задача является $\mathcal{NP}$-полной по теореме 1. □

Поскольку задача проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным 2-однородным матроидом является частным случаем задачи проверки совместности системы уравнений $S_{M,k}$ над конечным k-однородным матроидом, то имеет место следствие из теоремы 3.

Следствие 2. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,k}$ над конечным k-однородным матроидом является $\mathcal{NP}$-полной задачей при $k \geqslant 2$.*

В качестве ещё одного примера рассмотрим класс матроидов разбиения ранга, не превосходящего k. Пусть $P = \{U_1, U_2, ..., U_k\}$ — разбиение множества U, т. е. $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i = U$ и $U_i \cap U_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$. Множество $I \subseteq U$ содержится в $\mathcal{I}_P$ тогда и только тогда, когда $|I \cap U_i| \leq 1$ для всех $i \in \{1, ..., k\}$. Тогда пара $M = (U, \mathcal{I}_P)$ является матроидом, который называется *матроидом разбиения* множества U, а $\mathcal{I}_P$ — семейство его независимых подмножеств.

Лемма 4. *Конечным матроидам ранга* 2*, все* 1*-элементные множества которых независимы, взаимно однозначно соответствуют конечные матроиды разбиений.*

Доказательство. По лемме 3 конечные матроиды ранга 2, все 1-элементные множества которых независимы, взаимно однозначно соответствуют конечным полным многодольным графам, у которых две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующее им 2-элементное множество матроида независимо. При этом полным многодольным графам взаимно однозначно соответствуют их дополнения — матроидные графы, которые в свою очередь взаимно однозначно соответствуют матроидам разбиений. □

Предложение 2. *Множество* $\{u_1, u_2\}$ *независимо в матроиде разбиения тогда и только тогда, когда оно будет независимо в соответствующем ему матроиде ранга* 2*, все* 1*-элементные множества которого независимы.*

Предложение 3. *Любое* k*-элементное независимое множество матроида разбиения может быть получено из его* 2*-элементных независимых множеств по следующему правилу:*

$$I_k(u_1, u_2, ..., u_k) \longleftrightarrow I_2(u_1, u_2) \wedge I_2(u_1, u_3) \wedge ... \wedge I_2(u_{k-1}, u_k).$$

Теорема 4. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений* $S_{M,k}$ *над конечным матроидом разбиения* M *ранга, не превосходящего* k*, является* $\mathcal{NP}$*-полной задачей при* $k \geqslant 3$.

Доказательство. Очевидно, что частным случаем этой задачи является задача проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над соответствующим матроиду разбиения M матроидом ранга 2, все 1-элементные множества которого независимы, поскольку всякая система уравнений $S_{M,2}$ совпадает с какой-то системой $S_{M,k}$ при $k \geqslant 3$. А такая задача является $\mathcal{NP}$-полной в силу теоремы 2. □

Отдельно рассмотрим случай, когда матроид разбиения имеет ранг $k = 2$.

Теорема 5. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений* $S_{M,2}$ *над конечным матроидом разбиения* M *ранга* 2 *является полиномиально разрешимой задачей.*

Доказательство. Заметим, что каждому матроиду разбиения M ранга 2 соответствует полный двудольный граф G. При этом ранее было доказано, что существует полиномиальная процедура проверки совместности произвольной системы уравнений S_G над конечным полным двудольным графом [9].

Таким образом, для произвольной системы уравнений $S_{M,2}$ можно за полиномиальное время проверить, совместна ли над матроидом M её подсистема, состоящая из всех уравнений вида $I_2(x_i, x_j)$, $I_2(x_i, u_j)$, $I_2(u_i, u_j)$, $x_i = x_j$,

$x_i = u_j$, $u_i = u_j$. Оставшиеся уравнения системы $S_{M,2}$ имеют вид I_0, $I_1(x_i)$, $I_1(u_j)$ и в совокупности совместны над любым матроидом разбиений M по определению. $\square$

References

[1] Y.V. Matiyasevich, *Enumerable sets are diophantine*, Sov. Math., Dokl., **11** (1970), 354–358. Zbl 0212.33401

[2] E.W. Mayr, A.R. Meyer, *The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals*, Adv. Math., **46**:3 (1982), 305–329. Zbl 0506.03007

[3] S.A. Cook, *The complexity of theorem-proving procedures*, ACM, Proc. 3rd ann. ACM Sympos. Theory Computing, Shaker Heights, Ohio 1971, (1971), 151–158. Zbl 0253.68020

[4] E.Y. Daniyarova, A.G. Myasnikov, V.N. Remeslennikov, *Algebraic geometry over algebraic structures*, Algebra Logic, **57**:6 (2019), 414–428. Zbl 1429.08007

[5] A.Y. Nikitin, A.N. Rybalov, *On complexity of the satisfiability problem of systems over finite posets*, Prikl. Diskretn. Mat., **39** (2018), 94–98. Zbl 7311610

[6] A.N. Rybalov, *On complexity of the existential and universal theories of finite fields*, Prikl. Diskretn. Mat., **45** (2019), 85–89. Zbl 1461.03029

[7] A.V. Ilev, *Decidability of universal theories and axiomatizability of hereditary classes of graphs*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **22**:1 (2016), 100–111.

[8] A.V. Ilev, V.N. Remeslennikov, *Study of the compatibility of systems of equations over graphs and finding their general solutions*, Vestnik Omskogo Universiteta, **2017**:4(86) (2017), 26–32.

[9] A.V. Il'ev, V.P. Il'ev, *Algorithms for solving systems of equations over various classes of finite graphs*, Prikl. Diskretn. Mat., **53** (2021), 89–102. Zbl 7407761

[10] A.V. Iliev, *On axiomatizability of hereditary classes of graphs and matroids*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **13** (2016), 137–147. Zbl 1355.03031

[11] A.V. Il'ev, V.P. Il'ev, *On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids*, J. Physics: Conf. Ser., **1210** (2019), Article ID 012056.

[12] A.V. Il'ev, V.P. Il'ev, *On axiomatizability of the class of finitary matroids and decidability of their universal theory*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **17** (2020), 1730–1740. Zbl 1477.03121

[13] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, Am. J. Math., **57** (1935), 509–533. Zbl 0012.00404

[14] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and intractability. A guide to the theory of NP-completeness*, W.H. Freeman and Co, San Francisco, 1979. Zbl 0411.68039

Artyom Victorovich Ilev
Sobolev Institute of Mathematics,
Pevtsova str., 13,
644043, Omsk, Russia
Email address: artyom_iljev@mail.ru