

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxxУДК 510.67, 519.151
MSC 03C48, 05B35ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД
РАЗЛИЧНЫМИ КЛАССАМИ КОНЕЧНЫХ МАТРОИДОВ

А.В. ИЛЬЕВ

ABSTRACT. In the paper, it is proved that the problem of checking compatibility of a finite system of equations over a matroid of rank not exceeding k is \mathcal{NP} -complete for $k \geq 2$. Moreover, it is proved that the problem of checking compatibility of a finite system of equations over a k -uniform matroid is also \mathcal{NP} -complete for $k \geq 2$, and the problem of checking compatibility of a finite system of equations over a partition matroid of rank not exceeding k is polynomially solvable for $k = 2$ and \mathcal{NP} -complete for $k \geq 3$.

Keywords: graph, matroid, system of equations, computational complexity.

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение систем уравнений над вещественными, комплексными, рациональными и целыми числами является традиционным направлением исследований в алгебраической геометрии, которому посвящены многочисленные теоретические и практические исследования. Алгоритмические проблемы, связанные с решением систем уравнений, чаще всего оказываются либо неразрешимыми, либо разрешимыми, но вычислительно трудными. Из наиболее известных неразрешимых проблем можно выделить проблему решения полиномиальных уравнений над кольцом целых чисел [1]. К числу разрешимых проблем, имеющих экспоненциальную сложность, относится арифметика Пресбургера [2], проблема решения систем полиномиальных уравнений над полями комплексных и вещественных чисел [3] и проблема решения систем полиномиальных

ILEV, A.V., STUDY OF SYSTEMS OF EQUATIONS OVER VARIOUS CLASSES OF FINITE MATROIDS.
© 2022 Ильев А.В..

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН, проект FWNF-2022-0003.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

уравнений над конечными полями, которая эквивалентна \mathcal{NP} -полной проблеме выполнимости булевых формул [4].

В последние годы в алгебраической геометрии активно изучаются системы уравнений над произвольными алгебраическими системами, где уравнениями являются атомарные формулы языка алгебраической системы [5]. И в рамках этого направления исследований также естественным образом возникают вопросы разрешимости и вычислительной сложности алгоритмических проблем. Например, было доказано, что проблема совместности систем уравнений над конечными частично упорядоченными множествами является \mathcal{NP} -полной в том случае, когда проверяется существование решения, состоящего из попарно различных элементов частично упорядоченного множества [6], или что экзистенциальная теория класса всех конечных полей является \mathcal{NP} -трудной, а универсальная теория этого класса является со- \mathcal{NP} -трудной [7].

Кроме того, ряд результатов был получен и для обыкновенных графов и матроидов. Вопросы разрешимости универсальных теорий различных классов графов, которые имеют тесную связь с решением систем уравнений над конечными графами, подробно рассматривались А. В. Ильевым в статье [8]. Затем совместно с В. Н. Ремесленниковым [9] предлагался алгоритм решения системы уравнений над произвольным конечным графом, который находил её общее решение — координатный граф. В работе [10] совместно с В. П. Ильевым была подсчитана вычислительная сложность этого алгоритма и доказывалось, что задача проверки совместности конечной системы уравнений над обыкновенным графом является \mathcal{NP} -полной. Для различных классов матроидов вопросы аксиоматизируемости и разрешимости их универсальных теорий были рассмотрены А. В. Ильевым [11] и совместно с В. П. Ильевым в статьях [12] и [13].

В настоящей работе исследуются конечные системы уравнений над графами и матроидами. Доказано, что распознавательный вариант задачи о p -раскраске графа полиномиально сводится к задаче проверки совместности системы уравнений над конечным полным p -дольным графом, откуда следует её \mathcal{NP} -полнота при $p \geq 3$. В свою очередь, эта задача полиномиально сводится к частному случаю задачи проверки совместности системы уравнений над конечным матроидом ранга, не превосходящего k , которая, таким образом, тоже является \mathcal{NP} -полной задачей при $k \geq 2$. Помимо этого, показано, что задача проверки совместности системы уравнений над конечным k -однородным матроидом также \mathcal{NP} -полна при $k \geq 2$, а задача проверки совместности системы уравнений над конечным матроидом разбиения ранга, не превосходящего k , полиномиально разрешима при $k = 2$ и \mathcal{NP} -полна при $k \geq 3$.

2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Поскольку в данной работе рассматриваются только алгебраические системы, языки которых не содержат функциональных символов, то здесь и далее все определения адаптированы под предикатный случай.

Множество $T_L(X)$ термов языка L от переменных из множества X состоит из всех переменных $x \in X$ и всех констант $c \in C$ языка L . Множество $At_L(X)$ атомарных формул языка L от переменных из множества X состоит из всех формул вида $t_i = t_j$ и $R(t_1, t_2, \dots, t_k)$, где $t_1, t_2, \dots, t_k \in T_L(X)$, а $R(x_1, x_2, \dots, x_k)$ —

предикат языка L . Атомарные формулы называются *уравнениями*, а произвольные подмножества $S \subseteq At_L(X)$ — *системами уравнений* языка L .

Для обыкновенных графов и матроидов мы сначала вспомним их традиционные определения, а затем зададим эти объекты как бесконечные алгебраические системы.

Граф — это пара $G = (V, E)$, где V — непустое множество элементов, называемых *вершинами*, а E — множество неупорядоченных пар различных элементов из V , называемых *рёбрами*. Если $(u, v) \in E$, то вершины u и v называются *смежными*.

Граф — это алгебраическая система $G = \langle V, L_E \rangle$, носитель которой V — непустое не более чем счётное множество, а язык $L_E = \langle E, = \rangle$ состоит из бинарного предиката смежности вершин и предиката равенства, причём предикат смежности является *иррефлексивным и симметричным*, т. е. удовлетворяет условиям:

- 1) $\forall x \neg E(x, x)$ (иррефлексивность);
- 2) $\forall x \forall y (E(x, y) \rightarrow E(y, x))$ (симметричность).

Понятие матроида впервые было введено Уитни в статье [14] и охватывало только конечный случай.

Матроид — это пара $M = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое конечное множество, \mathcal{I} — непустое семейство его подмножеств (называемых *независимыми*), обладающее свойствами:

- (I1) если $I \in \mathcal{I}$, $J \subseteq I$, то $J \in \mathcal{I}$ (наследственность);
- (I2) для любых $I, J \in \mathcal{I}$ таких, что $|J| = |I| + 1$, существует элемент $j \in J \setminus I$, для которого $I \cup \{j\} \in \mathcal{I}$ (пополнение).

Максимальные независимые подмножества множества $A \subseteq U$ называются *базами* множества A . Максимальные независимые подмножества множества U называются *базами матроида* M . Напомним, что в матроиде все базы любого множества равномощны. *Рангом* $r(A)$ множества A называется мощность любой базы A . Число $r(M) = r(U)$ называется *рангом матроида* M .

В литературе наряду с конечными рассматриваются также бесконечные матроиды. Пусть $k \in \mathbb{N}$ — фиксированное число. В общем случае *матроид ранга, не превосходящего k* , — это пара $M = (U, \mathcal{I})$, где U — непустое (возможно, бесконечное) множество, \mathcal{I} — непустое семейство его независимых подмножеств, обладающее свойствами наследственности, пополнения, а также свойством (I3):

- (I3) $|I| \leq k$ для всех $I \in \mathcal{I}$.

Чтобы определить класс *матроидов фиксированного ранга $k \in \mathbb{N}$* , в приведённом выше определении условие (I3) нужно заменить на условие (I3'):

- (I3') $r(M) = k$.

Матроид ранга, не превосходящего k , — это алгебраическая система $M = \langle U, L_{I_k} \rangle$, где U — непустое не более чем счётное множество, а язык $L_{I_k} = \langle I_0, I_1, \dots, I_k, = \rangle$ состоит из $k+1$ предиката независимости, местность каждого из которых совпадает с его порядковым номером, и предиката равенства, причём предикаты независимости удовлетворяют условиям *неупорядоченности и неповторения элементов, наследственности и пополнения*:

- $\forall x_1 \dots \forall x_n [I_n(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigwedge_{\pi} I_n(\pi(x_1), \dots, \pi(x_n))]$, где π пробегает по всем перестановкам элементов x_1, \dots, x_n , $n \in \{1, \dots, k\}$;

- $\forall x_1 \dots \forall x_n [I_n(x_1, \dots, x_n) \rightarrow \bigwedge_{i \neq j} (x_i \neq x_j)]$, $n \in \{1, \dots, k\}$;
- $\forall x_1 \dots \forall x_n [(I_n(x_1, \dots, x_n) \rightarrow I_{n-1}(x_2, \dots, x_n) \wedge I_{n-1}(x_1, x_3, \dots, x_n) \wedge \dots \wedge I_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1})) \wedge I_0]$, $n \in \{2, \dots, k\}$;
- $\forall x_1 \dots \forall x_n \forall y_1 \dots \forall y_{n+1} [I_n(x_1, \dots, x_n) \wedge I_{n+1}(y_1, \dots, y_{n+1}) \rightarrow \bigvee_{i \in \{1, \dots, n+1\}} I_{n+1}(x_1, \dots, x_n, y_i)]$, $n \in \{1, \dots, k-1\}$.

Чтобы определить *матроид фиксированного ранга k* , в приведённое выше определение нужно добавить ещё одну аксиому:

- $\exists x_1 \dots \exists x_k I_k(x_1, \dots, x_k)$.

В дальнейшем в работе будут использоваться следующие обозначения систем уравнений.

S_G — система уравнений языка L_E над графом G . Каждая такая система состоит из уравнений вида $E(x_i, x_j)$, $E(x_i, v_j)$, $E(v_i, v_j)$, $x_i = x_j$, $x_i = v_j$, $v_i = v_j$.

$S_{M,k}$ — система уравнений языка L_{I_k} над матроидом M . Каждая такая система состоит из уравнений вида I_0 , $I_1(x_i)$, $I_1(u_j)$, $I_2(x_i, x_j)$, $I_2(x_i, u_j)$, $I_2(u_i, u_j)$, ..., $I_k(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})$, $I_k(x_{i_1}, \dots, x_{i_{k-1}}, u_{j_1})$, ..., $I_k(x_{i_1}, u_{j_1}, \dots, u_{j_{k-1}})$, $I_k(u_{j_1}, u_{j_2}, \dots, u_{j_k})$, $x_i = x_j$, $x_i = u_j$, $u_i = u_j$.

Отметим, что при $k_1 < k_2$ для любой системы уравнений S_{M,k_1} существует система уравнений S_{M,k_2} такая, что S_{M,k_1} совпадает с S_{M,k_2} .

Мы будем рассматривать только конечные системы уравнений *диофантовых языков*, т. е. таких языков, в которых множество констант совпадает с множеством элементов алгебраической системы.

3. СОВМЕСТНОСТЬ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД ПОЛНЫМИ МНОГОДОЛЬНЫМИ ГРАФАМИ

Граф G называется *p -дольным*, если множество его вершин можно разбить на p непересекающихся подмножеств — долей так, что каждое ребро в G соединяет какую-нибудь вершину одной доли с какой-либо вершиной другой доли. Граф G называется *полным p -дольным*, если он является p -дольным графом и любые его две вершины из разных долей смежны.

Мы будем называть *графом системы уравнений S_G* , состоящей из уравнений вида $E(x_i, x_j)$, граф $H = (V_X, E_X)$, в котором множество вершин V_X взаимно однозначно соответствует множеству переменных X , а множество рёбер E_X определяется уравнениями системы S_G .

Теорема 1. Система S_G , состоящая из уравнений вида $E(x_i, x_j)$, совместна над полным p -дольным графом G тогда и только тогда, когда $p \geq q$, где q — минимальное количество долей, на которые можно распределить вершины графа системы S_G .

Доказательство. 1) Необходимость. Как и в случае произвольного графа G , переменные $\{x_i\}$ системы уравнений S_G , принимающие попарно различные значения на графе G , и уравнения $E(x_i, x_j)$ образуют граф, изоморфный какому-то подграфу графа G . При этом переменные $\{x_j\}$, принимающие одинаковые значения на графе G , попадают в одну долю графа системы S_G . Следовательно, $p \geq q$.

2) Достаточность. Положим, что переменные $\{x_i\}$, попавшие в одну долю графа системы уравнений S_G , принимают одинаковые значения на графе G . Тогда достаточным условием совместности системы S_G над графом G будет

наличие в нём клики размера q . Так как G — полный p -дольный граф, то такая клика очевидным образом существует при $p \geq q$. \square

Минимальное количество долей, на которые можно распределить вершины произвольного графа, равно минимальному числу цветов, в которое можно раскрасить вершины графа так, чтобы любые две его смежные вершины имели разные цвета. Данная раскраска вершин графа называется *правильной*. Т. е. при определении совместности системы уравнений над полным p -дольным графом G естественным образом возникает задача о минимальной правильной раскраске графа. Поэтому теорему 1 можно переформулировать следующим образом.

Теорема 2. Система S_G , состоящая из уравнений вида $E(x_i, x_j)$, совместна над полным p -дольным графом G тогда и только тогда, когда граф системы S_G может быть правильно раскрашен не более, чем в p различных цветов.

Теорема 3. Задача проверки совместности произвольной системы уравнений S_G над конечным полным p -дольным графом G является \mathcal{NP} -полной задачей при $p \geq 3$.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что к задаче проверки совместности системы уравнений S_G над конечным полным p -дольным графом G полиномиально сводится какая-нибудь другая \mathcal{NP} -полная задача распознавания [15], например, распознавательный вариант задачи о p -раскраске графа при $p \geq 3$.

Задача о p -раскраске графа. Дан n -вершинный граф $H = (V, E)$ и натуральное число $p \leq n$. Можно ли правильно раскрасить граф H в p различных цветов?

По теореме 2 для ответа на вопрос задачи о p -раскраске графа H нужно определить, совместна ли над произвольным полным p -дольным графом G , например кликой K_p , система уравнений вида $S_G = \{E(x_i, x_j)\}$ такая, что граф системы S_G изоморфен графу H .

Таким образом, задача проверки совместности системы уравнений S_G над конечным полным p -дольным графом G является \mathcal{NP} -полной. \square

4. СОВМЕШНОСТЬ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД МАТРОИДАМИ РАНГА, НЕ ПРЕВОСХОДЯЩЕГО k

Прежде всего рассмотрим класс матроидов ранга 2. Для него существует девять видов уравнений из множества систем уравнений $\{S_{M,2}\}: I_0, I_1(x_i), I_1(u_j), I_2(x_i, x_j), I_2(x_i, u_j), I_2(u_i, u_j), x_i = x_j, x_i = u_j, u_i = u_j$.

Произвольному матроиду ранга 2 можно поставить в соответствие граф, рёбра которого соответствуют 2-элементным базам матроида, а изолированные вершины — 1-элементным зависимым множествам матроида. Рассмотрим матроид M ранга 2, все 1-элементные множества которого независимы и которому соответствует граф G без изолированных вершин.

Предложение 1. В графе G любая вершина смежна хотя бы с одним концом любого ребра.

Доказательство. Справедливость этого утверждения следует непосредственно из аксиомы пополнения матроида. \square

Теорема 4. *Существует взаимно однозначно соответствие между классом матроидов ранга 2, все 1-элементные множества которых независимы, и классом полных p -дольных графов.*

Доказательство. 1) Докажем, что граф G , соответствующий матроиду M ранга 2, все 1-элементные множества которого независимы, является полным p -дольным графом.

В силу предложения 1 любой граф, соответствующий матроиду M , является связным. Поэтому вершины этого графа можно распределить на некоторое наименьшее количество долей, каждая из которых будет соединена с другими долями хотя бы одним ребром — иначе эту долю необходимо было бы объединить с какой-то другой.

Рассмотрим две произвольные доли графа G и соединяющее их ребро. Будем считать, что обе доли имеют не меньше двух попарно различных вершин графа. Обозначим их u_1, u_2 и v_1, v_2 соответственно, а существующее ребро — (u_1, v_1) .

Тогда по предложению 1 вершины u_2 и v_2 должны быть смежны хотя бы с одним концом ребра (u_1, v_1) , следовательно, существуют рёбра (u_2, v_1) и (u_1, v_2) . Но тогда вершина u_2 должна быть смежна хотя бы с одним концом ребра (u_1, v_2) , а вершина v_2 — хотя бы с одним концом ребра (u_2, v_1) . Значит, существует также ребро (u_2, v_2) (см. рис. 1).

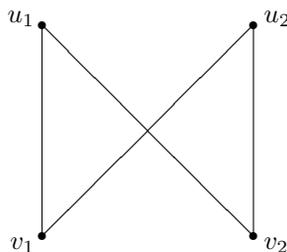


Рис. 1.

Существование необходимых рёбер в случае, когда одна из рассматриваемых долей графа G содержит ровно одну вершину, доказывается аналогично. Таким образом, каждая вершина любой из долей графа G смежна с каждой вершиной любой другой его доли, т. е. граф G является полным p -дольным графом.

2) Доказательство того, что полному p -дольному графу G соответствует матроид M ранга 2, все 1-элементные множества которого независимы, следует непосредственно из предложения 1. Фактически, это утверждение является иной формулировкой аксиомы пополнения (I2). \square

Теорема 5. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным матроидом M ранга 2 является \mathcal{NP} -полной задачей.*

Доказательство. К задаче проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным матроидом M ранга 2 полиномиально сводится задача проверки совместности системы уравнений S_G над конечным полным p -дольным графом G , которая \mathcal{NP} -полна по теореме 3.

В силу теоремы 4 существует взаимно однозначно соответствие между классом матроидов ранга 2, все 1-элементные множества которых независимы,

и классом полных p -дольных графов. Поэтому для определения совместности над графом G произвольной системы S_G , состоящей из уравнений вида $E(x_i, x_j)$, $E(x_i, v_j)$, $E(v_i, v_j)$, $x_i = x_j$, $x_i = v_j$, $v_i = v_j$, достаточно определить, совместна ли над соответствующим ему матроидом M система $S_{M,2}$, состоящая из уравнений вида $I_2(x_i, x_j)$, $I_2(x_i, v_j)$, $I_2(v_i, v_j)$, $x_i = x_j$, $x_i = v_j$, $v_i = v_j$, в которой уравнения $I_2(t_i, t_j)$ и $t_i = t_j$ имеют место тогда и только тогда, когда соответствующие им уравнения $E(t_i, t_j)$ и $t_i = t_j$ содержатся в системе S_G .

Таким образом, задача проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным матроидом M ранга 2 является \mathcal{NP} -полной. \square

Поскольку задача проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным матроидом ранга 2 является частным случаем задачи проверки совместности системы уравнений $S_{M,k}$ над конечным матроидом ранга, не превосходящего k , то имеет место следствие из теоремы 5.

Следствие 1. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,k}$ над конечным матроидом ранга, не превосходящего k , является \mathcal{NP} -полной задачей при $k \geq 2$.*

5. СОВМЕШНОСТЬ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ НАД ОДНОРОДНЫМИ МАТРОИДАМИ И МАТРОИДАМИ РАЗБИЕНИЙ

Определим вычислительную сложность некоторых частных случаев задачи проверки совместности произвольной системы уравнений над конечными матроидами. Рассмотрим наиболее простой класс матроидов — класс однородных матроидов. Матроид называется k -однородным, если его базами являются все подмножества, содержащие ровно k элементов. Одним из подклассов класса конечных k -однородных матроидов является класс конечных 2-однородных матроидов. Легко заметить, что всякому 2-однородному матроиду на n элементах соответствует клика K_n . Таким образом, существует взаимно однозначное соответствие между классом 2-однородных матроидов и классом всех клик.

Теорема 6. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным 2-однородным матроидом M является \mathcal{NP} -полной задачей.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 5. К задаче проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным 2-однородным матроидом M полиномиально сводится задача проверки совместности системы уравнений S_G над конечным полным p -дольным графом G — в данном случае кликой K_n , для которой $p = n$. Эта задача является \mathcal{NP} -полной по теореме 3. \square

Поскольку задача проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным 2-однородным матроидом является частным случаем задачи проверки совместности системы уравнений $S_{M,k}$ над конечным k -однородным матроидом, то имеет место следствие из теоремы 6.

Следствие 2. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,k}$ над конечным k -однородным матроидом является \mathcal{NP} -полной задачей при $k \geq 2$.*

В качестве ещё одного примера рассмотрим класс матроидов разбиения ранга, не превосходящего k . Пусть $P = \{U_1, U_2, \dots, U_k\}$ — разбиение множества U ,

т. е. $\bigcup_{i=1}^k U_i = U$ и $U_i \cap U_j = \emptyset$ для любых $i \neq j$. Множество $I \subseteq U$ содержится в \mathcal{I}_P тогда и только тогда, когда $|I \cap U_i| \leq 1$ для всех $i \in \{1, \dots, k\}$. Тогда пара $M = (U, \mathcal{I}_P)$ является матроидом, который называется *матроидом разбиения* множества U , а \mathcal{I}_P — семейство его независимых подмножеств.

Теорема 7. *Конечным матроидом ранга 2, все 1-элементные множества которых независимы, взаимно однозначно соответствуют конечные матроиды разбиений.*

Доказательство. По теореме 4 конечные матроиды ранга 2, все 1-элементные множества которых независимы, взаимно однозначно соответствуют конечным полным многодольным графам, у которых две вершины соединены ребром тогда и только тогда, когда соответствующее им 2-элементное множество матроида независимо. При этом полным многодольным графам взаимно однозначно соответствуют их дополнения — матроидные графы, которые в свою очередь взаимно однозначно соответствуют матроидам разбиений. \square

Предложение 2. *Множество $\{u_1, u_2\}$ независимо в матроиде разбиения тогда и только тогда, когда оно будет независимо в соответствующем ему матроиде ранга 2, все 1-элементные множества которого независимы.*

Предложение 3. *Любое k -элементное независимое множество матроида разбиения может быть получено из его 2-элементных независимых множеств по следующему правилу:*

$$I_k(u_1, u_2, \dots, u_k) \longleftrightarrow I_2(u_1, u_2) \wedge I_2(u_1, u_3) \wedge \dots \wedge I_2(u_{k-1}, u_k).$$

Теорема 8. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,k}$ над конечным матроидом разбиения M ранга, не превосходящего k , является \mathcal{NP} -полной задачей при $k \geq 3$.*

Доказательство. Очевидно, что частным случаем этой задачи является задача проверки совместности системы уравнений $S_{M,2}$ над соответствующим матроиду разбиения M матроидом ранга 2, все 1-элементные множества которого независимы, поскольку всякая система уравнений $S_{M,2}$ совпадает с какой-то системой $S_{M,k}$ при $k \geq 3$. А такая задача является \mathcal{NP} -полной в силу теоремы 5. \square

Отдельно рассмотрим случай, когда матроид разбиения имеет ранг $k = 2$.

Теорема 9. *Задача проверки совместности произвольной системы уравнений $S_{M,2}$ над конечным матроидом разбиения M ранга 2 является полиномиально разрешимой задачей.*

Доказательство. Заметим, что каждому матроиду разбиения M ранга 2 соответствует полный двудольный граф G . При этом в работе [10] доказано, что существует полиномиальная процедура проверки совместности произвольной системы уравнений S_G над конечным полным двудольным графом.

Таким образом, для произвольной системы уравнений $S_{M,2}$ можно за полиномиальное время проверить, будет ли над матроидом M совместна её подсистема, состоящая из всех уравнений вида $I_2(x_i, x_j)$, $I_2(x_i, u_j)$, $I_2(u_i, u_j)$, $x_i = x_j$, $x_i = u_j$, $u_i = u_j$. Оставшиеся уравнения системы $S_{M,2}$ имеют вид I_0 , $I_1(x_i)$, $I_1(u_j)$ и в совокупности совместны над любым матроидом разбиений M по определению. \square

REFERENCES

- [1] Y.V. Matiyasevich, *Diophantineity of enumerable sets*, Doklady Akademii Nauk USSR, **191:2** (1970), 279–282 (in Russian).
- [2] M.J. Fischer, M.O. Rabin, *Super-exponential complexity of Presburger arithmetic*, Proceedings of the SIAM-AMS Symposium in Applied Mathematics, **7** (1974), 27–41.
- [3] E.W. Mayr, A.R. Meyer, *The complexity of the word problems for commutative semigroups and polynomial ideals*, Advances in Mathematics, **46:3** (1982), 305–329.
- [4] S.A. Cook, *The complexity of theorem proving procedures*, Proceedings of the 3rd Annual ACM Symposium on Theory of Computing, (1971), 151–158.
- [5] E.Y. Daniyarova, A.G. Myasnikov, V.N. Remeslennikov, *Algebraic Geometry over Algebraic Structures*, SB RAS Publishing House, Novosibirsk, 2016 (in Russian).
- [6] A.Y. Nikitin, A.N. Rybalov, *On complexity of the satisfiability problem of systems over finite posets*, Prikladnaya Diskretnaya Matematika, **39** (2018), 94–98 (in Russian).
- [7] A.N. Rybalov, *On complexity of the existential and universal theories of finite fields*, Prikladnaya Diskretnaya Matematika, **45** (2019), 85–89 (in Russian).
- [8] A.V. Ilev, *Decidability of universal theories and axiomatizability of hereditary classes of graphs*, Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN, **22:1** (2016), 100–111 (in Russian).
- [9] A.V. Ilev, V.N. Remeslennikov, *Study of the compatibility of systems of equations over graphs and finding their general solutions*, Vestnik Omskogo Universiteta, **4(86)** (2017), 26–32 (in Russian).
- [10] A.V. Il'ev, V.P. Il'ev, *Algorithms for solving systems of equations over various classes of finite graphs*, Prikladnaya Diskretnaya Matematika, **53** (2021), 89–102 (in Russian).
- [11] A.V. Ilev, *On axiomatizability of hereditary classes of graphs and matroids*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **13** (2016), 137–147.
- [12] A.V. Il'ev, V.P. Il'ev, *On axiomatizability and decidability of universal theories of hereditary classes of matroids*, Journal of Physics: Conference Series, **1210** (2019), 012056.
- [13] A.V. Il'ev, V.P. Il'ev, *On axiomatizability of the class of finitary matroids and decidability of their universal theory*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 1730–1740.
- [14] H. Whitney, *On the abstract properties of linear dependence*, American Journal of Mathematics, **57** (1935), 509–533.
- [15] M.R. Garey, D.S. Johnson, *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, W.H. Freeman and Co, San Francisco, 1979.

ARTYOM VICTOROVICH ILEV
 SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
 PEVTSOVA STR., 13,
 644043, OMSK, RUSSIA
E-mail address: artyom_iljev@mail.ru