S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.233

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 62F03

Стабильность и нестабильность систем случайного множественного доступа с механизмом накопления и потери энергии

А.В. РЕЗЛЕР, М.Г. ЧЕБУНИН

Abstract. We study a generalisation of the model of the classical synchronised multiple access system with a single transmission channel controlled by a randomised transmission protocol (ALOHA) and additionally equipped with an energy harvesting mechanism as well as self-discharge mechanism and suppose that message batteries may receive an unlimited amount of energy.

Keywords: Markov chains, ALOHA algorithm, energy harvesting, self-discharge, generalised Foster criterion, ergodicity, transience.

1. Введение

Использование энергетической подпитки (energy harvesting) позволяет устройствам непрерывно получать энергию из различных источников окружающей среды, таких как, например, свет, тепло, вибрация и множество других. Несмотря на то, что количество энергии, получаемое таким образом, сравнительно невелико, данная технология находит широкое применение, например, среди устройств с низким потреблением энергии (Low-Power Systems). Снабжение устройств механизмом энергетической подпитки позволяет использовать их в тех места, где классические источники энергии недоступны. В силу того, что заряд батарей непрерывно восполняется, то продолжительность "жизни" используемых устройств может быть продлена. Например, в работе [1] приведен пример устройства, использующего микроэлектромеханические (MEMS)

A. Rezler, M. Chebunin, Stability and instability of a random multiple access system with an energy harvesting and self-discharge mechanism.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда, грант №22-19-00305 "Пространственно-временные стохастические модели беспроводных сетей с большим числом абонентов".

системы для извлечения энергии из вибраций окружающей среды. Механизм энергетической подпитки также имеет широкое применение среди систем множественного доступа. Например, сенсорные сети, оснащенные перезаряжающимися батареями, которые "подпитываются" энергией из окружающей среды, могут существенно продлить срок ее службы (см. [2]). Другой пример использования данного механизма был предложен в работе Xun Zhou, Rui Zhang и Chin Keong Ho (см. [3]), где авторы рассмотрели многопользовательскую систему с базовой станцией, использующей технологию «OFDM» (orthogonal frequency division multiplexing) и беспроводной канал для передачи информации и энергии пользователям.

Основная задача при использовании механизма энергетической подпитки в системах случайного множественного доступа состоит, в частности, в нахождении пропускных способностей систем. Например, в работе J. Jeon и A. Ephremides (см. [4]) рассматривался случай системы с ограниченным количеством пользователей, децентрализованным механизмом энергетической подпитки и протоколом передачи данных типа ALOHA. В работе была найдена пропускная способность данной системы, а также был продемонстрирован эффект ее уменьшения, при ограничении вместимости у механизма для хранения энергии, которым снабжен каждый пользователь системы. Изучению энергоэффективности протоколов разрешения конфликтов посвящена работа A. Bergman и M. Sidi (см. [5]). Как известно, традиционные (в частности, не использующие механизм энергетической подпитки) системы множественного доступа (см. например [6], [7]) с бесконечным числом пользователей в известном смысле нестабильны ни при каких значениях управляемых параметров (см. [8]) и метастабильны при малых значениях входного потока и вероятности передачи сообщений (см. [9]). Однако, как было показано в работах С.Г. Фосса, Д.К. Кима и А.М. Тюрликова [10] и [11], ограничения на поступление энергии и входной поток в систему с бесконечным числом пользователей может стабилизировать ее, то есть количество сообщений в накопителе системы не будет неограниченно расти. В работе [10] была найдена пропускная способность модели для классической синхронизированной системы случайного множественного доступа с одним передающим прибором, управляемой протоколом передачи типа ALOHA, снабженной централизованным механизмом энергетической подпитки. Однако, как отмечают авторы, рассмотренная модель далека от практики. Тем не менее, рассмотренная в работе [11] модель для децентрализованного механизма энергетической подпитки, в которой каждый пользователь системы снабжен индивидуальным механизмом для хранения энергии, имеет практические аналоги. В упомянутой работе, при определении конкретного вида функции вероятности подзарядки сообщений на каждом шаге, обратно пропорциональной общему количеству сообщений, присутствующих в системе, была найдена пропускная способность модели. В работе [12] изучалось обобщение предыдущей модели. Главное отличие состояло в том, что сообщения могут принимать более одной единицы энергии. Одной из причин изучения обобщенной модели являлся эффект, продемонстрированный в работе [4], возникающий при увеличении емкости накопителя энергии у пользователей и, как следствие, приводящий к увеличению области стабильности системы. Однако результаты, полученные в работе [12], показывают, что максимальная пропускная способность системы не меняется при заданной интенсивности подзарядки.

Любая система, использующая механизм энергетической подпитки, помимо "сборщика" энергии, снабжена аккумулятором, который имеет свойство саморазрядки, то есть потери энергии в период простоя. Будет логичным учитывать данное свойство в моделях, соответствующих описываемым системам. В данной работе мы обобщаем результаты, полученные в работе [12], на случай, учитывающий эффект саморазрядки. Главное отличие от предыдущих результатов состоит в изменении пропускной способности системы при заданной интенсивности подзарядки. При том максимальная пропускная способность остается прежней.

Работа состоит из 5 параграфов и приложения. Во втором параграфе описывается математическая модель и формулируется основной результат, в третьем параграфе проводится доказательство для частного случая описанной модели, когда каждая батарея имеет только одну ячейку для хранения энергии. В четвертом параграфе проводится доказательство основной теоремы. В пятом параграфе рассматривается случай, когда каждая батарея имеет произвольное ограниченное количество ячеек для хранения энергии. В приложении приводятся формулировки утверждений, используемых при доказательстве теорем.

2. Описание модели и основные результаты

Аналогично работе [12] приведем математическое описание исследуемой модели. Мы рассматриваем систему с одним передающим прибором, которая принимает и, при успешной передаче, отправляет сообщения. Время слотировано. Пусть ξ_n — случайная величина, определяющая количество сообщений, поступивших в накопитель системы в течении интервала времени $[n-1, n)$. Далее предполагаем, что $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ образует последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) неотрицательных целочисленных случайных величин с конечным математическим ожиданием λ. Каждое сообщение снабжено батареей с неограниченным количеством ячеек для хранения энергии и прибывает в накопитель системы с пустой батареей, ожидая энергетической подпитки. Полный цикл работы системы в каждый временной слот может быть описан следующим образом. Каждое сообщение, имеющее в начале временного слота батарею, заряженную на i ячеек, где $i \geq 1$, будет передано на передающий прибор с вероятностью $1-p^i$ или останется в системе с вероятностью p^i, для некоторого фиксированного $p \in (0,1)$. Случай $p=0$ мы не рассматриваем, так как он эквивалентен стандартному централизованному протоколу ALOHA. После передачи на передающий прибор, каждое заряженное сообщение, которое не пыталось передаваться, независимо от остальных параметров системы, теряет одну единицу энергии с вероятностью $\widehat{p}$. Далее каждое сообщение (помимо тех сообщений, которые в данном временном слоте потеряли единицу энергии), независимо от остальных параметров системы, получит одну единицу энергии с вероятностью $\mu > 0$. Если в заданном временном интервале на передающий прибор поступило только одно сообщение, то оно покидает систему. Если на передающий прибор поступило два или более сообщений, то происходит наложение сообщений (конфликт) и передававшиеся сообщения возвращаются в систему, но теряют одну единицу энергии.

Пусть ξ_n — новые сообщения, которые только прибыли в накопитель системы к началу $(n+1)$-го временного слота, а q_n — сообщения, которые уже находились в накопителе системы к началу данного временного слота. Обозначим через $v_n^{(i)}$ — количество сообщений, имеющих i единиц энергии, где $i \geq 1$, к началу данного временного слота. Очевидно, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} v_n^{(i)} \leq q_n \text{ п.н.}$$

Определим $\left\{U_{n,i}^{(j)},\ -\infty < n < \infty,\ i \geq 1,\ 1 \leq j \leq \infty\right\}$, $\left\{\widetilde{U}_{n,i}^{(j)},\ -\infty < n < \infty,\ i \geq 1,\ 1 \leq j \leq \infty\right\}$ и $\left\{\widehat{U}_{n,i}^{(j)},\ -\infty < n < \infty, i \geq 1, 1 \leq j \leq \infty\right\}$ независимые семейства независимых одинаково распределенных (н.о.р.) случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0,1]$.

Пусть $I(A)$ — индикаторная функция события A. Введем также некоторую измеримую неотрицательную функцию $\mu : \mathbb{Z}_+ \to [0,1]$, которая будет подчеркивать свойство адаптивности модели. То есть в зависимости от количества сообщений, скажем, в n-ый момент времени q_n, значение $\mu(q_n)$ будет равно вероятности подзарядки каждого сообщения в n-ый момент времени. Пусть $B_n^{(j)}(k,t) = \sum_{i=1}^{k} I\big(U_{n,i}^{(j)} < t\big)$, $\widetilde{B}_n^{(j)}(k,t) = \sum_{i=1}^{k} I\big(\widetilde{U}_{n,i}^{(j)} < t\big)$ и $\widehat{B}_n^{(j)}(k,t) = \sum_{i=1}^{k} I\big(\widehat{U}_{n,i}^{(j)} < t\big)$, где $n \in \mathbb{Z}$, $t \in (0,1)$, $k \geq 0$, $j \geq 1$, три взаимно независимых семейства случайных величин, имеющих биномиальное распределение и независимых от остальных параметров системы. Обозначим через $D_n^{(j)}(k, 1-t) = k - B_n^{(j)}(k,t)$. Очевидно, что случайная величина $D_n^{(j)}(k, 1-t)$ имеет биномиальное распределение с параметрами k, $1-t$. Аналогично определяется и случайная величина $\widehat{D}_n^{(j)}(k, 1-t)$. Пусть

$$I_p^n = I\left(\sum_{i=1}^{\infty} B_n^{(i)}\left(v_n^{(i)}, 1-p^i\right) = 1\right),$$

то есть I_p^n — индикатор события, состоящего в том, что в n-ый момент времени произошла успешная передача сообщения. Таким образом, мы получим следующую рекурсию.

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - I_p^n + \xi_n, \\ \\ v_{n+1}^{(1)} = \widehat{D}_n^{(1)}\left(D_n^{(1)}\left(v_n^{(1)}, p\right), 1-\widehat{p}\right) + \widetilde{B}_n^{(1)}\left(q_n - \sum_{i=1}^{\infty} v_n^{(i)} + \xi_n, \mu(q_n)\right) \\ -\widetilde{B}_n^{(2)}\left(\widehat{D}_n^{(1)}\left(D_n^{(1)}\left(v_n^{(1)}, p\right), 1-\widehat{p}\right), \mu(q_n)\right) + \widehat{B}_n^{(2)}\left(D_n^{(2)}\left(v_n^{(2)}, p^2\right), \widehat{p}\right) \\ +B_n^{(2)}\left(v_n^{(2)}, 1-p^2\right) \cdot \left(1 - I_p^n\right) \\ \ldots \\ v_{n+1}^{(i)} = \widehat{D}_n^{(i)}\left(D_n^{(i)}\left(v_n^{(i)}, p^i\right), 1-\widehat{p}\right) + \widetilde{B}_n^{(i)}\left(\widehat{D}_n^{(i-1)}\left(D_n^{(i-1)}(v_n^{(i-1)}, p^{i-1}), 1-\widehat{p}\right), \mu(q_n)\right) \\ -\widetilde{B}_n^{(i+1)}\left(\widehat{D}_n^{(i)}\left(D_n^{(i)}\left(v_n^{(i)}, 1-p^i\right), 1-\widehat{p}\right), \mu(q_n)\right) + \widehat{B}_n^{(i+1)}\left(D_n^{(i+1)}\left(v_n^{(i+1)}, p^{i+1}\right), \widehat{p}\right) \\ +B_n^{(i+1)}\left(v_n^{(i+1)}, 1-p^{i+1}\right) \cdot \left(1 - I_p^n\right) \\ \ldots \end{cases} \tag{1}$$

В силу громоздкости формулы (1), мы опишем интерпретацию ее слагаемых. Рассмотрим рекурсию для элемента $v_{n+1}^{(i)}$, при $i \geq 2$. Первое слагаемое

$$\widehat{D}_n^{(i)}\left(D_n^{(i)}\left(v_n^{(i)}, p^i\right), 1-\widehat{p}\right)$$

выражает количество сообщений, оставшихся после передачи и саморазрядки в конце $(n+1)$-го временного интервала. Следующие два слагаемых

$$\widetilde{B}_n^{(i)}\left(\widehat{D}_n^{(i-1)}\left(D_n^{(i-1)}\left(v_n^{(i-1)},p^{i-1}\right),1-\widehat{p}\right),\mu(q_n)\right),$$
$$\widetilde{B}_n^{(i+1)}\left(\widehat{D}_n^{(i)}\left(D_n^{(i)}\left(v_n^{(i)},1-p^{i}\right),1-\widehat{p}\right),\mu(q_n)\right)$$

обозначают количество сообщений, заряженных на $i-1$ и i ячеек соответственно, которые получили единицу заряда в течении $(n+1)$-го временного интервала. Для случая $i=1$, в выражении для $v_{n+1}^{(1)}$, соответствующее слагаемое будет иметь следующий вид

$$\widetilde{B}_n^{(1)}\left(q_n-\sum_{i=1}^{\infty}v_n^{(i)}+\xi_n,\mu(q_n)\right),$$

то есть заряд будут получать новые и разряженные сообщения. Четвертое слагаемое

$$\widehat{B}_n^{(i+1)}\left(D_n^{(i+1)}\left(v_n^{(i+1)},p^{i+1}\right),\widehat{p}\right)$$

выражает количество сообщений, заряженных на $i+1$ ячейку, которые потеряли заряд в следствии саморазрядки. Последнее слагаемое

$$B_n^{(i+1)}\left(v_n^{(i+1)},1-p^{i+1}\right)\cdot\left(1-I_p^n\right)$$

выражает количество сообщений, заряженных на $i+1$ ячейку, которые потеряли заряд в следствии передачи на передающий прибор. При этом сообщения остаются в системе только в случае их наложения (конфликта). Вместо двух независимых семейств случайных величин $\{U_{n,i}^{(j)}\}$ и $\{\widehat{U}_{n,i}^{(j)}\}$ мы будем рассматривать семейство независимых равномерно распределенных случайных величин $\{\boldsymbol{U}_{n,i}^{(j)}\}$, принимающих значения в квадрате $[0,1]^2$. Другими словами, мы будем отождествлять потерю заряда при наложении сообщений и при саморазрядке. Определим случайные величины $\boldsymbol{D}_n^{(j)}(k,t_1,t_2)$ и $\boldsymbol{B}_n^{(j)}(k,t_1,t_2)$ следующим образом:

$$\boldsymbol{D}_n^{(j)}(k,t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{k}I\left(\boldsymbol{U}_{n,i}^{(j)}\in[0,\ t_1]\times[0,\ t_2]\right),$$
$$\boldsymbol{B}_n^{(j)}(k,t_1,t_2)=\sum_{i=1}^{k}I\left(\boldsymbol{U}_{n,i}^{(j)}\in[0,\ t_1]\times[1-t_2,\ 1]\right),$$

где $t_1,t_2\in(0,1)$, $k\geq 1$. Ясно, что они имеют биномиальные распределения с параметрами k, t_1t_2 соответственно. Перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n - \boldsymbol{I}_p^n + \xi_n, \\
\\
\boldsymbol{v}_{n+1}^{(1)} = \boldsymbol{D}_n^{(1)} \left(\boldsymbol{v}_n^{(1)}, p, 1-\widehat{p}\right) + \widetilde{B}_n^{(1)} \left(\boldsymbol{q}_n - \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{v}_n^{(i)} + \xi_n, \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) \\
-\widetilde{B}_n^{(2)} \left(\boldsymbol{D}_n^{(1)} \left(\boldsymbol{v}_n^{(1)}, p, 1-\widehat{p}\right), \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) + \boldsymbol{B}_n^{(2)} \left(\boldsymbol{v}_n^{(2)}, p^2, \widehat{p}\right) \\
+\boldsymbol{B}_n^{(2)} \left(\boldsymbol{v}_n^{(2)}, 1-p^2, 1\right) \cdot \left(1 - \boldsymbol{I}_p^n\right) \\
\ldots \\
v_{n+1}^{(i)} = \boldsymbol{D}_n^{(i)} \left(\boldsymbol{v}_n^{(i)}, p^i, 1-\widehat{p}\right) + \widetilde{B}_n^{(i)} \left(\boldsymbol{D}_n^{(i-1)} \left(\boldsymbol{v}_n^{(i-1)}, p^{i-1}, 1-\widehat{p}\right), \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) \\
-\widetilde{B}_n^{(i+1)} \left(\boldsymbol{D}_n^{(i)} \left(\boldsymbol{v}_n^{(i)}, p^i, 1-\widehat{p}\right), \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) + \boldsymbol{B}_n^{(i+1)} \left(\boldsymbol{v}_n^{(i+1)}, p^{i+1}, \widehat{p}\right) \\
+\boldsymbol{B}_n^{(i+1)} \left(\boldsymbol{v}_n^{(i+1)}, 1-p^{i+1}, 1\right) \cdot \left(1 - \boldsymbol{I}_p^n\right) \\
\ldots
\end{cases} \qquad (\boldsymbol{M}_2)
$$

Заметим, что стохастическая последовательность $\boldsymbol{X}_n = \left(\boldsymbol{q}_n, \boldsymbol{v}_n^{(1)}, \boldsymbol{v}_n^{(2)} \ldots\right)$ из польского пространства

$$
\mathfrak{X} = \left\{ \left(q, v^{(1)}, v^{(2)} \ldots\right) \in \mathbb{Z}_+^{\infty} \ : \ \sum_{i=1}^{\infty} v^{(i)} \leq q \right\}, \qquad (2)
$$

образует цепь Маркова. Для простоты изложения, далее будем отождествлять модели и соответствующие им стохастические последовательности. Будем говорить, что система работает стабильно (цепь стабильна), если соответсвующая ей цепь Маркова сходится к своему стационарному распределению в метрике полной вариации, стартуя из любого начального состояния.

Построенная модель $(\boldsymbol{M}_2)$ предполагает наличие у каждого пользователя механизма для хранения неограниченного количества ячеек энергии. В существующих системах с передачей энергии по радиоканалу (см., например, [3]) энергия, передаваемая базовой станцией, накапливается у каждого абонента в своем индивидуальном источнике и далее используется для передачи информации. Однако, каждый индивидуальный источник имеет только одну ячейку для хранения энергии. Таким образом, модель $(\boldsymbol{M}_2)$ отражают работу беспроводных систем, снабженных механизмом энергетической подпитки и саморазрядки, с тем отличием от существующих, что в ней дополнительно предполагается наличие механизма для хранения неограниченного количества ячеек энергии у пользователей сети. Как можно будет увидеть далее, рассматриваемая нами модель является обобщением упомянутых беспроводных систем (см. Замечание об ограниченной вместимости).

Сформулируем основные результаты данной работы. Предположим, что $\lambda < 1$. Как будет видно ниже, данное допущение не ограничивает общность результатов. Следовательно $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) > 0$. То есть цепь Маркова $(\boldsymbol{M}_2)$ за один шаг с положительной вероятностью не меняет состояние. Следовательно, рассматриваемая цепь является апериодичной. Более того, можно заметить, что на каждом шаге с положительной вероятностью из системы уходит и в нее поступают сообщения, а также в системе с положительной вероятностью сообщения подзаряжаются на произвольное количество ячеек энергии за некоторое количество шагов. Таким образом, можно утверждать, что все состояния являются сообщающимися. Следовательно, из эргодической теоремы, для определения пропускной способности системы, достаточно найти компактное положительно возвратное множество для цепи $(\boldsymbol{M}_2)$, чему и посвящена большая часть данной работы.

Перейдем к рассмотрению основной теоремы, доказательство которой основано на утверждениях, сформулированных в Приложении (см. работы [11], [14] и [13]). Всюду далее мы будем использовать следующие обозначения:

$$x = \left(q, v^{(1)}, v^{(2)}, \ldots\right),$$
$$\mathbb{E}_x(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot \mid X_0 = x),$$
$$\mathbb{P}_x(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = x),$$
$$\|x\|_{l_1} = \|x\| = q + \sum_{i=1}^{\infty} v^{(i)}.$$

Теорема 1. *Если, для некоторой константы $c > 0$, $\mu(q)$ имеет вид*

$$\mu(q) = \begin{cases} \min(\widetilde{c}/q, 1), & q \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{0\} \\ 1, & q = 0 \end{cases},$$

где $\widetilde{c} = (1 - p(1 - \widehat{p}))(1 - p)^{-1} c$, тогда стохастическая последовательность, представляемая марковской цепью $(\boldsymbol{M}_2)$, стабильна при входной интенсивности $\lambda < ce^{-c}$ и нестабильна при $\lambda > ce^{-c}$.

Заметим, что, при $c = 1$, мы получим максимально допустимую область стабильности системы $(\lambda < e^{-1})$.

3. Случай единичной вместимости

В работе [11] было показано, что если для некоторой константы $c > 0$

$$\mu(q) = \begin{cases} \min(c/q, 1), & q \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{0\} \\ 1, & q = 0 \end{cases} \tag{3}$$

то двумерная цепь Маркова, описывающая систему, в которой у каждого сообщения аккумулятор имеет только одну ячейку для хранения энергии,

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - I\left(B_n(v_n, 1-p) = 1\right) + \xi_n, \\ v_{n+1} = D_n(v_n, p) + \widetilde{B}_n\left(q_n - v_n + \xi_n, \mu(q_n)\right) \end{cases} \tag{M$_1$}$$

стабильна при входной интенсивности $\lambda < ce^{-c}$ и нестабильна при $\lambda > ce^{-c}$.

Если в модели $(\boldsymbol{M}_2)$ положить $\boldsymbol{v}_n^{(i)} \equiv 0$ для всех $i \geq 2$, $n \geq 0$, тогда получим следующую модель

$$\begin{cases} \boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n - I\left(\boldsymbol{B}_n(\boldsymbol{v}_n^{(1)}, 1-p, 1) = 1\right) + \xi_n, \\ \boldsymbol{v}_{n+1}^{(1)} = \boldsymbol{D}_n^{(1)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(1)}, p, 1-\widehat{p}\right) + \widetilde{B}_n\left(\boldsymbol{q}_n - \boldsymbol{v}_n^{(1)} + \xi_n, \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) \end{cases} \tag{$\boldsymbol{M}_1$}$$

Заметим, что вышеупомянутые двумерные цепи Маркова отличаются только в уравнениях для компонент v_{n+1} и $\boldsymbol{v}_{n+1}^{(1)}$ первым слагаемым, определяющим количество заряженных сообщений, не участвовавших в передаче. Не трудно понять, что стартуя из одного начального состояния, в конце первого временного интервала у цепи $(\boldsymbol{M}_1)$ будет меньше заряженных сообщений, чем у цепи

(M_1), в силу наличия у первой эффекта саморазрядки. Таким образом, используя естественный каплинг, получим следующие соотношения

$$\begin{gathered} \boldsymbol{v}_1^{(1)} \le v_1,\, \boldsymbol{q}_1 = q_1 \text{ п.н.} \\ \boldsymbol{B}_1^{(1)}(\boldsymbol{v}_1^{(1)}, 1-p, 1) = B_1(v_1, 1-p) \text{ п.н.} \end{gathered} \tag{4}$$

В работе [11] для доказательства стабильности цепи (M_1) используется обобщенный критерий Фостера (см. Приложения, утверждение 2). Пусть $x = (q, v)$ и пробная функция $L(x) = q + v$, а функция $g(x)$ – ступенчатая, такая что

$$g(x) = \begin{cases} 1, \; v > R, \\ k, \; v \le R. \end{cases} \tag{5}$$

Значение $R > 0$ выбирают так, чтобы, при $v_0 > R$ и произвольном значении q_0, снос цепи был отрицателен за один шаг. Значение $k \in \mathbb{Z}_+$ выбирают таким, чтобы, при достаточно большом $q_0 > \widetilde{q}$, снос цепи был отрицателен за k шагов. Таким образом, для некоторого достаточно большого K, внутри компактного множества $\{x \mid L(x) \le K\}$ снос цепи ограничен, а вне – отрицателен.

Для доказательства нестабильности цепи (M_1) в работе [11] используется схожий метод (см. Приложения, утверждение 3). Пусть пробная функция Ляпунова $L(x) = q$, а функция $g(x)$ – ступенчатая, такая что

$$g(x) = \begin{cases} 1, \; v > \widetilde{R}, \\ k, \; v \le \widetilde{R}. \end{cases} \tag{6}$$

Значение $\widetilde{R} > 0$ выбирают так, чтобы, при $v_0 > \widetilde{R}$ и произвольном значении q_0, снос цепи был положителен за один шаг. Значение $k \in \mathbb{Z}_+$ выбирают таким, чтобы, при $v_0 \le \widetilde{R}$ и достаточно большом $q_0 > \widetilde{q}$, снос цепи был положительным за k шагов. Таким образом, для некоторого достаточно большого K, вне множества $\{x \mid L(x) \le K\}$ снос цепи (M_1) положителен.

Докажем следующую теорему для цепи $(\boldsymbol{M}_1)$

Теорема 2. *Если, для некоторой константы $c > 0$, $\mu(q)$ имеет вид*

$$\mu(q) = \begin{cases} \min(\widetilde{c}/q, 1), \;\; q \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{0\} \\ 1, \;\; q = 0 \end{cases},$$

где $\widetilde{c} = (1 - p(1-\widehat{p}))(1-p)^{-1}c$, тогда стохастическая последовательность, представляемая марковской цепью $(\boldsymbol{M}_1)$, стабильна при входной интенсивности $\lambda < ce^{-c}$ и нестабильна при $\lambda > ce^{-c}$.

Доказательство. Начнем с доказательства стабильности цепи. Далее в рассуждениях будем использовать обозначения $\boldsymbol{X}_k = (\boldsymbol{q}_k, \boldsymbol{v}_k)$, где $k \ge 0$. Аналогично доказательству стабильности цепи (M_1), выберем ту же пробную функцию $L(x) = q + v$, где $x = (q, v)$, а также будем предполагать, что $g(x)$ удовлетворяет уравнению (5). Учитывая соотношения (4), можно заметить, что $\boldsymbol{R} \le R$. Таким образом, для доказательства стабильности, достаточно найти подходящее значение $k \in \mathbb{Z}_+$. Проведем рассуждение в несколько этапов:

a) Покажем, что последовательность $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n \ge 0}$ мажорируется цепью, имеющей ограниченный снос.

б) Покажем, что последовательность $\{\boldsymbol{v}_n\}_{n\geq 0}$, при достаточно большом значении $\boldsymbol{q}_0$, близка к некоторой вспомогательной цепи, сходящейся в метрике полной вариации к случайной величине, имеющей распределение Пуассона.

в) Подберем k так, чтобы при достаточно большом значении $\boldsymbol{q}_0$, снос цепи стал отрицательным за k шагов.

а) Пусть $\{Y_n\}_{n\geq 0}$ последовательность н.о.р. случайных величин, которые не зависят от ξ_n и имеют следующее распределение

$$\mathbb{P}(Y_n > x) = \sup_{q\geq c} \mathbb{P}(B_1(q, \mu(q)) > x). \tag{7}$$

Используя неравенство Маркова, можно заключить, что для $x > 0$ и для любого $\alpha > 0$, правая часть равенства (7) не превосходит

$$\sup_{q\geq c} \mathbb{E}\, \frac{e^{\alpha B_1(q,c/q)}}{e^{\alpha x}} = \sup_{q\geq c} \Big(1 + (e^{\alpha} - 1)\frac{c}{q}\Big)^q e^{-\alpha x} \equiv C_1 e^{-\alpha x},$$

где C_1 конечна, так как $\left(1 + (e^{\alpha} - 1)\frac{c}{q}\right)^q \to \exp(c(e^{\alpha} - 1)) < \infty$, при $q \to \infty$. Таким образом, распределение Y_1 — собственное, то есть $\mathbb{P}(Y_n < \infty) = 1$ для всех $n \geq 0$ и, более того, имеет конечный экспоненциальный момент.

Теперь рассмотрим вспомогательную последовательность

$$Z_n^{(1)} = Y_n^{(1)} + \xi_n,\;\; W_{n+1}^{(1)} = \boldsymbol{D}_n^{(1)}\left(W_n^{(1)}, p, 1 - \widehat{p}\right) + Z_n^{(1)},\;\; W_0^{(1)} = \boldsymbol{v}_0^{(1)}. \tag{8}$$

Из свойств (IV) и (V) утверждения 1 (см. Приложения)

$$\mathbb{E}\left(\boldsymbol{v}_n^{(1)} \mid \boldsymbol{v}_0^{(1)}\right) \leq \mathbb{E}\left(W_n^{(1)} \mid W_0^{(1)}\right) \leq \boldsymbol{v}_0^{(1)} + C^{(1)}, \tag{9}$$

где

$$C^{(1)} = \frac{E(Y_1 + \xi_1)}{1 - p(\,1 - \widehat{p}\,)} = \frac{EY_1 + \lambda}{1 - p(\,1 - \widehat{p}\,)}.$$

б) Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$\widetilde{V}_{n+1} = \boldsymbol{D}_n\left(\widetilde{V}_n, p, 1 - \widehat{p}\right) + \eta_n, \tag{10}$$

где $\{\eta_n\}_{n\geq 0}$ — семейство н.о.р. случайных величин с распределением Пуассона с параметром $\widetilde{c}$ ($\Pi_{\widetilde{c}}$). Используя (III) и (VI) пункты утверждения 1 (см. Приложения), можем заключить, что последовательность $\widetilde{V}_n$ сходится к π — распределению Пуассона с параметром $\widetilde{c}/(1 - p(1 - \widehat{p})) = c/(1 - p)$ в метрике полной вариации. Тогда, по определению, мы можем выбрать $l \geq 1$ так, что для всех $n \geq l$

$$\sup_{\widetilde{\mathrm{V}}_0 \leq \mathrm{R}} \left|\mathbb{P}_{\,x}\left(\boldsymbol{B}_n^{(1)}\left(\widetilde{V}_n, 1 - p, 1\right) = 1\right) - ce^{-c}\right| < \delta/2. \tag{11}$$

Очевидно, что для любого значения k можно выбрать константу C так, что вероятность события

$$A_1(k, C) = \left\{W_n^{(1)} \leq C \;\text{ для всех }\; 0 \leq n \leq k\right\}$$

будет не меньше, чем $1-\delta/2$. Теперь выберем $\widetilde{q}$ так, что для любого фиксированного n, при $\boldsymbol{q}_n \geq \widetilde{q}$, расстояние между $\widetilde{B}_n^{(1)}\left(\boldsymbol{q}_n - \boldsymbol{v}_n^{(1)} + \xi_n, \mu(\boldsymbol{q}_n)\right)$ и распределением Пуассона с параметром $\widetilde{c}$ не превосходит $\delta/2$ в метрике полной вариации равномерно по $v_n^{(1)} \in (0,1,...,C)$. Так можно сделать по известной теореме Пуассона. Более того, мы можем считать, что

$$\mathbb{P}_x\left(\left\{\widetilde{B}_n^{(1)}\left(\boldsymbol{q}_n - \boldsymbol{v}_n^{(1)} + \xi_n, \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) = \eta_n,\ \forall n \in \{l, l+1, ..., k\}\right\} \cap A_1(k, C)\right) \geq 1 - \delta/2$$

Следовательно

$$\mathbb{P}_x\left(\{\boldsymbol{v}_n^{(1)} = \widetilde{V}_n,\ \forall n \in \{l, l+1, ..., k\}\} \cap A_1(k, C)\right) \geq 1 - \delta/2 \tag{12}$$

в) Выберем $k > l$ так, что

$$\begin{aligned} -\varepsilon &= k\lambda + C^{(1)} - (k-l)(ce^{-c} - \delta) \\ &= k(\lambda - (ce^{-c} - \delta)) + l(ce^{-c} - \delta) + C^{(1)} < 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Также заметим, что, в силу (11) и (12), при всех $n \in \{l, l+1, ..., k\}$, справедливо неравенство

$$\sup_{\mathrm{x} \leq \mathrm{R}} \left|\mathbb{P}_x\left(\boldsymbol{B}_n^{(1)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(1)}, 1-p, 1\right) = 1\right) - ce^{-c}\right| < \delta \tag{14}$$

Наконец, из (13) и (14), получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x(L(\boldsymbol{X}_k) - L(x)) &= \mathbb{E}_x(\boldsymbol{q}_k - \boldsymbol{q}_0) + \mathbb{E}_x(\boldsymbol{v}_k - \boldsymbol{v}_0) \\ &\leq k\lambda - \sum_{i=l+1}^{k} \mathbb{P}_x\left(\boldsymbol{B}_i^{(1)}\left(\boldsymbol{v}_i^{(1)}, 1-p, 1\right) = 1\right) + C^{(1)} \end{aligned}$$

$$< k\lambda - \sum_{i=l+1}^{k}(ce^{-c} - \delta) + C^{(1)} = k\lambda - (k-l)(ce^{-c} - \delta) + C^{(1)} < -\varepsilon.$$

Для доказательства нестабильности цепи $(\boldsymbol{M}_1)$, мы будем использовать утверждение 3, сформулированное в приложении. Пусть n_k — некоторая последовательность натуральных чисел такая, что $n_k \to \infty$, при $k \to \infty$, а также $|n_{k+1} - n_k| \leq C < \infty$ для любого $k \geq 0$. В силу неравенства

$$\boldsymbol{q}_n \geq \boldsymbol{q}_{n_k} - C \ \text{ п.н. для всех } \ n_k \leq n \leq n_{k+1} \ \text{ и } \ k \geq 0, \tag{15}$$

можно утверждать, что, если $\boldsymbol{q}_{n_k} \to \infty$, при $k \to \infty$, то $\boldsymbol{q}_n \to \infty$, при $n \to \infty$. Таким образом, если положить $\widetilde{L}(x) = q$ и

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} 1, & v > \widetilde{\boldsymbol{R}} \\ \widetilde{k}, & v \leq \widetilde{\boldsymbol{R}} \end{cases}$$

где константы $\widetilde{k}$, $\widetilde{\boldsymbol{R}}$ будут заданы далее подходящим образом, то при заданных в условии утверждения 3 ограничениях, достаточно показать, что, во-первых, марковская цепь имеет положительный снос

$$\mathbb{E}_x(\Delta_{\widetilde{g}(x)} I(\Delta_{\widetilde{g}(x)} \leq M)) \geq \widetilde{\varepsilon}, \tag{16}$$

где $\Delta_{\widetilde{g}(x)} = \widetilde{L}(\boldsymbol{X}_{\widetilde{g}(x)}) - \widetilde{L}(x)$. Во-вторых, что следующее семейство случайных величин

$$(\Delta^-_{\widetilde{g}(x)})^2 = (\min(0, \Delta_{\widetilde{g}(x)}))^2 \tag{17}$$

равномерно интегрируемо. Тогда из условий (15), (16), (17) и из соответствующего утверждения, будет следовать

$$\mathbb{P}_x(\widetilde{L}(\boldsymbol{X}_n) \to \infty) = 1.$$

В силу неравенства (15), можно утверждать, что, при выбранных функциях $\widetilde{L}$ и $\widetilde{g}$, верно $0 \geq \Delta^-_{\widetilde{g}(x)} \geq -\widetilde{k}$ п.н. и, таким образом, условие (17) выполнено. В силу того, что $\mathbb{E}\,\xi_1 = \lambda < 1$, условие (16) эквивалентно

$$\mathbb{E}_x(\Delta_{\widetilde{g}(x)}) \geq \varepsilon', \tag{18}$$

для некоторого $\varepsilon' > 0$. Следовательно, для доказательства нестабильности, нужно показать, что выполняется неравенство (18).

Дальнейшие рассуждения проведем аналогично доказательству нестабильности цепи (M_1). В силу (4) и рассуждений проведенных ниже для случая нестабильности цепи (M_1), можно утверждать, что

$$\widetilde{\boldsymbol{R}} = \widetilde{R}$$

Таким образом, при $\boldsymbol{v}_0^{(1)} > \widetilde{\boldsymbol{R}}$

$$\mathbb{E}_x(\boldsymbol{q}_1 - \boldsymbol{q}_0) > 0.$$

Чтобы завершить доказательство нестабильности цепи $(\boldsymbol{M}_1)$, достаточно выбрать некоторый момент времени k, когда снос цепи становится положительным. Для этого сначала заметим, что из рассуждений, проведенных при доказательстве стабильности цепи, можно заключить, что справедливо соотношение (14). Таким образом, у нас, в том числе, есть некоторый момент времени l, когда вспомогательная цепь достаточно близка к своему стационарному распределению. Выберем значение $\widetilde{k}$ так, что выполняется следующее неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \widetilde{k}\lambda - l - (\widetilde{k} - l)(ce^{-c} + \delta) \\ &= \widetilde{k}(\lambda - (ce^{-c} + \delta)) + l(ce^{-c} - \delta) - l > 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где δ такая, что

$$0 < \delta < \lambda - ce^{-c}.$$

Таким образом, при $\boldsymbol{q}_0 > \widetilde{q} + \widetilde{k}$ и $\boldsymbol{v}_0^{(1)} \leq \widetilde{\boldsymbol{R}}$, получим

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_x\Big(\widetilde{L}(\boldsymbol{X}_{\widetilde{k}}) - \widetilde{L}(x)\Big) &\geq \widetilde{k}\lambda - l - \sum_{i=l+1}^{\widetilde{k}} \mathbb{P}_x\Big(\boldsymbol{B}_i^{(1)}\Big(\boldsymbol{v}_i^{(1)}, 1-p, 1\Big) = 1\Big) \\ &> \widetilde{k}\lambda - l - \sum_{i=l+1}^{\widetilde{k}} (ce^{-c} + \delta) \\ &= \widetilde{k}\lambda - l - (\widetilde{k} - l)(ce^{-c} + \delta) > \varepsilon', \end{aligned}$$

где ε' определена в (19). □

4. Случай неограниченной вместимости

Для доказательства теоремы 1 мы будем использовать результаты и рассуждения из работы [12], в которой мы рассматривали следующую марковскую цепь

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - I_p^n + \xi_n, \\ v_{n+1}^{(1)} = v_n^{(1)} - B_n^{(1)}\left(v_n^{(1)}, 1-p\right) + \widetilde{B}_n^{(1)}\left(q_n - \sum_{i=1}^{\infty} v_n^{(i)} + \xi_n, \mu(q_n)\right) \\ -\widetilde{B}_n^{(2)}\left(v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p), \mu(q_n)\right) + B_n^{(2)}\left(v_n^{(2)}, 1-p^2\right)\cdot\left(1 - I_p^n\right) \\ \dots \\ v_{n+1}^{(i)} = v_n^{(i)} - B_n^{(i)}\left(v_n^{(i)}, 1-p^i\right) + \widetilde{B}_n^{(i)}\left(v_n^{(i-1)} - B_n^{(i-1)}\left(v_n^{(i-1)}, 1-p^{i-1}\right), \mu(q_n)\right) \\ -\widetilde{B}_n^{(i+1)}\left(v_n^{(i)} - B_n^{(i)}\left(v_n^{(i)}, 1-p^i\right), \mu(q_n)\right) + B_n^{(i+1)}\left(v_n^{(i+1)}, 1-p^{i+1}\right)\cdot\left(1 - I_p^n\right) \\ \dots \end{cases} \qquad (M_2)$$

и доказали, что ее области стабильности и нестабильности совпадают с соответствующими областями модели (M_1). Для доказательства использовалась следующая пробная функция

$$L(x) = q + \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i/2} v^{(i)}, \quad x = \left(q, v^{(1)}, v^{(2)}, \dots\right). \tag{20}$$

Основная идея заключалась в сведении модели (M_2) к модели (M_1). Мы использовали утверждение 2 (Обобщенный критерий Фостера) и утверждение 3 (см. Приложения) для доказательства стабильности и нестабильности с функцией $g(x)$ следующего вида

$$g(x) = \begin{cases} 1, \ L(x) - q > R \\ k, \ L(x) - q \le R \end{cases} \qquad x = \left(q, v^{(1)}, v^{(2)}, \dots\right),$$

Значение R определяется в процессе доказательства так, что, стартуя из множества

$$\{x \in \mathfrak{X} \mid L(x) - q > R\},$$

снос цепи отрицателен за один шаг. Значение k определяет количество шагов необходимых, чтобы, при достаточно большом значении $q_0 > \widetilde{q}$, в дополнении к упомянутому множеству, снос цепи становился отрицательным. В итоге, для некоторого достаточно большого значения K, мы имеем множество

$$\{x \in \mathfrak{X} \mid L(x) \le K\},$$

внутри которого снос цепи ограничен, а вне — отрицателен. Остальные рассуждения были посвящены сведению рассматриваемой цепи (M_2) к ее двумерному частному случаю (M_1). Во-первых, мы показали, что снос сообщений, заряженных более чем на одну ячейку, стремится к нулю с ростом значения q_0. Во-вторых, мы определили некоторый момент времени, после которого, при достаточно большом значении q_0, упомянутые цепи совпадают с вероятностью, достаточно близкой к 1, на некотором временном отрезке. Таким образом, при достаточно большом значении q_0, на некотором временном отрезке, снос цепи (M_2) определяется сносом цепи (M_1).

Проведем аналогичные рассуждения для цепей ($\boldsymbol{M}_2$) и ($\boldsymbol{M}_1$). Будем использовать ту же пробную функцию (20). Как было упомянуто ранее, основное отличие системы $(\boldsymbol{M}_2)$ от системы (M_2) заключается в наличии в первой эффекта саморазрядки. Таким образом, если системы стартуют из одного начального состояния, то значение функции $L(x)$ для модели $\boldsymbol{M}_2$ в первый момент времени мажорируется значением этой же функции для модели M_2 в первый момент времени. Действительно, в определении функции $L(x)$ сообщения, имеющие больший заряд, имеют больший вес. Поэтому функция $L(x)$ монотонна по имеющимуся заряду в системе. Таким образом, снос цепи $(\boldsymbol{M}_2)$ за один шаг мажорируется сносом цепи (M_2). Следовательно, мы можем положить $\boldsymbol{R} := R$. Таким образом, всюду далее будем считать, что

$$L(\boldsymbol{X}_0) - \boldsymbol{q}_0 \le \boldsymbol{R}, \quad \boldsymbol{X}_0 = \left(\boldsymbol{q}_0, \boldsymbol{v}_0^{(1)}, \boldsymbol{v}_0^{(2)}, \ldots\right).$$

Перейдем к сведению цепи $(\boldsymbol{M}_2)$ к $(\boldsymbol{M}_1)$. Покажем, что

а) снос сообщений, заряженных более чем на одну ячейку, стремится к нулю с ростом значения $\boldsymbol{q}_0$,

б) при достаточно большом значении $\boldsymbol{q}_0$, модели $(\boldsymbol{M}_2)$ и $(\boldsymbol{M}_1)$ совпадают с вероятностью, сколь угодно близкой к 1.

а) Преобразуем рекурсивное выражение, описывающее модель $(\boldsymbol{M}_2)$, оценив $1 - \boldsymbol{I}_p^n$ единицей. Следовательно, получим

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{n+1}^{(i)} \le \boldsymbol{D}_n^{(i)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(i)}, p^i, 1-\widehat{p}\right) + \widetilde{B}_n^{(i)}\left(\boldsymbol{D}_n^{(i-1)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(i)}, p^i, 1-\widehat{p}\right), \mu(\boldsymbol{q}_n)\right)\\ -\widetilde{B}_n^{(i+1)}\left(\boldsymbol{D}_n^{(i)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(i)}, p^i, 1-\widehat{p}\right), \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) + \boldsymbol{B}_n^{(i+1)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(i+1)}, p^{i+1}, \widehat{p}\right)\\ +\boldsymbol{B}_n^{(i+1)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(i+1)}, 1-p^{i+1}, 1\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Рассмотрим снос цепи за n шагов. Воспользуемся неравенством (21)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\left[\sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}(\boldsymbol{v}_n^{(i)} - \boldsymbol{v}_0^{(i)})\right] \le \sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}\Big(\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i)} - (1-p^i(1-\widehat{p}))v_{n-1}^{(i)}\\ +p^{i-1}(1-\widehat{p})\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i-1)}\mu(\boldsymbol{q}_{n-1}) - p^i(1-\widehat{p})\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i)}\mu(\boldsymbol{q}_{n-1})\\ +p^{i+1}\widehat{p}\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i+1)} + (1-p^{i+1})\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i+1)}\Big) - \sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}\boldsymbol{v}_0^{(i)}.\end{aligned}$$

С помощью простых преобразований получим следующее выражение

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\Big[\sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}\left(\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i)} - \boldsymbol{v}_0^{(i)}\right)\\ -\sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}(1-p^i)\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i)} + \sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}(1-p^{i+1})\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i+1)}\\ -\sum_{i=2}^{\infty} p^{i/2}\widehat{p}\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i)} + \sum_{i=2}^{\infty} p^{i/2+1}\widehat{p}\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i+1)}\\ +\sum_{i=2}^{\infty} p^{i/2-1}(1-\widehat{p})\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i-1)}\mu(\boldsymbol{q}_{n-1}) - \sum_{i=2}^{\infty} p^{i/2}(1-\widehat{p})\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i)}\mu(\boldsymbol{q}_{n-1})\Big].\end{aligned}$$

Тогда ясно, что выражение сверху не превышает

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}\left(\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i)}-\boldsymbol{v}_0^{(i)}\right)\right]+\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}_x\boldsymbol{v}_{n-1}^{(i)}\mu(\boldsymbol{q}_{n-1}).$$

Таким образом, получим следующую оценку

$$\mathbb{E}_x\left[\sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}\left(\boldsymbol{v}_{n}^{(i)}-\boldsymbol{v}_0^{(i)}\right)\right]\le\mathbb{E}_x\sum_{l=0}^{n-1}\mu(\boldsymbol{q}_l)\sum_{i=1}^{\infty}\boldsymbol{v}_l^{(i)}. \tag{22}$$

Заметим, что за один временной интервал, скажем $[l,l+1)$, общее количество заряженных сообщений в среднем вырастет не более чем на $\widetilde{c}+\lambda\mu(q_l)$. Так как в начальный момент времени количество заряженных сообщений не превышает $\boldsymbol{R}$, то за n шагов общее количество заряженных сообщений не превысит

$$\boldsymbol{R}+(\widetilde{c}+\lambda\mu(\boldsymbol{q}_0))+(\widetilde{c}+\lambda\mu(\boldsymbol{q}_1))+...+(\widetilde{c}+\lambda\mu(\boldsymbol{q}_{n-1})).$$

В силу того, что за один временной интервал из системы может уйти не более одного сообщения, следовательно $\boldsymbol{q}_l\ge\boldsymbol{q}_{l-1}-1$ п.н. Другими словами, справедлива следующая оценка

$$\mu(\boldsymbol{q}_l)\le\widetilde{c}/(\boldsymbol{q}_0-n+1)\text{ п.н., при }l\le n-1\text{ и }\boldsymbol{q}_0\ge n.$$

Таким образом, неравенство (22) не превосходит

$$\frac{\widetilde{c}n\Big(\boldsymbol{R}+n\big(\widetilde{c}+\lambda\mu(\boldsymbol{q}_0-n+1)\big)\Big)}{\boldsymbol{q}_0-n+1}.$$

Поэтому с ростом значения $\boldsymbol{q}_0$, снос сообщений, заряженных более чем на одну ячейку, стремится к нулю.

б) Введем два множества событий. Пусть

$$\begin{gathered}A_0(n)=\big\{\text{после }(n-1)\text{-ого шага все изначально заряженные сообщения}\\ \text{потеряли весь свой заряд или покинули систему}\big\},\\ A_2(\boldsymbol{q}_0,k)=\Big\{\widetilde{B}_n^{(i)}\Big(\boldsymbol{D}_n^{(i-1)}\Big(\boldsymbol{v}_n^{(i-1)},p^{i-1},1-\widehat{p}\Big),\mu(\boldsymbol{q}_n)\Big)=0\\ \text{для всех }2\le i<\infty\text{ и }0\le n\le k\Big\}.\end{gathered}$$

Заметим, что, при некоторых k и $n_0\le k$, внутри события $A_0(n_0)\cap A_2(\boldsymbol{q}_0,k)$ цепи $(\boldsymbol{M}_2)$ и $(\boldsymbol{M}_1)$ совпадают на временном отрезке $[n_0,k]$, так как начальные сообщения до момента времени n_0 потеряли весь свой заряд и за k шагов не было заряжено на более чем одно деление ни одного сообщения. Следовательно, с момента времени n_0 по момент времени k в системе не было сообщений, заряженных более чем на одно деление. Таким образом, для доказательства данного пункта, необходимо показать, что

$$\mathbb{P}_x\big(A_0(n_0)\cap A_2(\boldsymbol{q}_0,k)\big)\to1,\text{ при }\boldsymbol{q}_0\to\infty. \tag{23}$$

Покажем, что сообщения, заряженные на одну ячейку $\{\boldsymbol{v}_n^{(1)}\}_{n\ge0}$ — собственные случайные величины. Для этого достаточно заметить, что за один временной слот, скажем $[n, n+1)$, условное математическое ожидание количества заряженных сообщений не прирастает больше чем на $\widetilde{c} + \lambda\mu(\boldsymbol{q}_n)$. Таким образом, верна следующая оценка

$$\mathbb{E}_x \boldsymbol{v}_n^{(1)} \leq n\big(\widetilde{c} + \lambda\mu(\boldsymbol{q}_0 - n + 1)\big) + \boldsymbol{R}$$

Следовательно, случайные величины $\{\boldsymbol{v}_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ — собственные. Тогда ясно, что вероятность события $A_1(C,k) = \{\boldsymbol{v}_n^{(1)} \leq C, \text{ при } 0 \leq n \leq k\}$, при любом фиксированном значении k, путем выбора достаточно большого значения C, может быть сколь угодно близкой к 1. Выберем некоторое произвольное значение $0 < \delta < 1$ и параметры k, C такие, что

$$\mathbb{P}_x\big(A_1(C,k)\big) \geq 1 - \delta/4.$$

Заметим, что верна следующая цепочка неравенств

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x\big(A_2(\boldsymbol{q}_0,k) \cap A_1(C,k)\big) &\geq \mathbb{P}_x\big(A_2(\boldsymbol{q}_0,k) \mid A_1(C,k)\big)(1-\delta/4)\\ \geq \mathbb{P}_x\left(\left\{\widetilde{B}_n^{(1)}(\boldsymbol{R}+C, \mu(\boldsymbol{q}_n)) = 0 \text{ для всех } 0 \leq n \leq k\right\}\right)&(1-\delta/4),\end{aligned}$$

где последнее неравенство справедливо в силу того, что в начальном состоянии не более чем $\boldsymbol{R}$ заряженных сообщений, а также вероятность подзарядки одного сообщения в произвольный момент времени не зависит от заряда данного сообщения. Ясно, что выражение сверху больше, чем

$$\big(1 - \mu(\boldsymbol{q}_0 - k)\big)^{(\boldsymbol{R}+C)k}(1-\delta/4).$$

Таким образом, путем выбора достаточно большого значения q_0, получим

$$\mathbb{P}_x\big(A_2(\boldsymbol{q}_0,k) \cap A_1(C,k)\big) \geq 1 - \delta/2.$$

Осталось заметить, что с ростом n_0, вероятность события $A_0(n_0)$ стремится к 1. Пусть n_0 такое, что $\mathbb{P}_x(A_0(n_0)) \geq 1 - \delta/2$. Следовательно, выполняется следующая цепочка неравенств

$$\mathbb{P}_x\big(A_0(n_0) \cap A_2(\boldsymbol{q}_0,k)\big) \geq \mathbb{P}_x\big(A_0(n_0) \cap A_1(C,k) \cap A_2(\boldsymbol{q}_0,k)\big) \geq 1 - \delta.$$

В силу произвольности значения δ, (23) выполнено.

Таким образом, снос цепи $(\boldsymbol{M}_2)$ определяется сносом цепи $(\boldsymbol{M}_1)$. Следовательно, области стабильности и нестабильности цепи $(\boldsymbol{M}_2)$ совпадают с соответствующими областями цепи $(\boldsymbol{M}_1)$.

5. Замечание об ограниченной вместимости

Также интересны модели, в которых у каждого пользователя предполагается наличие батарейки лишь с ограниченным числом ячеек для хранения энергии. При этом, модель $(\boldsymbol{M}_2)$, в случае наличия батарейки с m ячейками, будет выглядить следующим образом:

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{q}_{n+1} = \boldsymbol{q}_n - \boldsymbol{I}_p^n + \xi_n, \\
\\
\boldsymbol{v}_{n+1}^{(1)} = \boldsymbol{D}_n^{(1)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(1)}, p, 1-\widehat{p}\right) + \widetilde{B}_n^{(1)}\left(\boldsymbol{q}_n - \sum_{i=1}^{\infty} \boldsymbol{v}_n^{(i)} + \xi_n, \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) \\
-\widetilde{B}_n^{(2)}\left(\boldsymbol{D}_n^{(1)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(1)}, p, 1-\widehat{p}\right), \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) + \boldsymbol{B}_n^{(2)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(2)}, p^2, \widehat{p}\right) \\
+\boldsymbol{B}_n^{(2)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(2)}, 1-p^2, 1\right) \cdot \left(1 - \boldsymbol{I}_p^n\right) \\
\\
\boldsymbol{v}_{n+1}^{(2)} = \boldsymbol{D}_n^{(2)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(2)}, p^2, 1-\widehat{p}\right) + \widetilde{B}_n^{(2)}\left(\boldsymbol{D}_n^{(1)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(1)}, p, 1-\widehat{p}\right), \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) \\
-\widetilde{B}_n^{(3)}\left(\boldsymbol{D}_n^{(2)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(2)}, p^2, 1-\widehat{p}\right), \mu(\boldsymbol{q}_n)\right) + \boldsymbol{B}_n^{(3)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(3)}, p^3, \widehat{p}\right) \\
+\boldsymbol{B}_n^{(3)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(3)}, 1-p^3, 1\right) \cdot \left(1 - \boldsymbol{I}_p^n\right) \\
\ldots \\
\boldsymbol{v}_{n+1}^{(m)} = \boldsymbol{D}_n^{(m)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(m)}, p^m, 1-\widehat{p}\right) + \widetilde{B}_n^{(m)}\left(\boldsymbol{D}_n^{(m-1)}\left(\boldsymbol{v}_n^{(m-1)}, p^{m-1}, 1-\widehat{p}\right), \mu(\boldsymbol{q}_n)\right)
\end{cases}
\tag{$\boldsymbol{M}_m$}
$$

Заметим, что теорема 1 верна и для данной модели. Действительно, аналогично рассуждениям в доказательстве для цепи $(\boldsymbol{M}_2)$, выберем пробную функцию (20) и покажем, что цепь $(\boldsymbol{M}_m)$ сводится к цепи $(\boldsymbol{M}_2)$. Для этого достаточно "запустить" упомянутые цепи из одного начального состояния и заметить, что из пункта (а) доказательства основной теоремы, снос сообщений, заряженных более чем на m ячеек, стремится к 0 с ростом значения $\boldsymbol{q}_0$ и из пункта (б) вероятность подзарядки заряженных сообщений, путем выбора достаточно большого значения $\boldsymbol{q}_0$, можно сделать сколь угодно близкой к 0. Таким образом, на некотором временном отрезке цепи будут совпадать с вероятностью, близкой к 1, и снос цепи $(\boldsymbol{M}_m)$ будет определяться сносом цепи $(\boldsymbol{M}_2)$.

Авторы выражают благодарность за постановку задачи Фоссу С.Г.

6. Приложения

Сформулируем вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве основной теоремы. Сначала приведем лемму 1 из работы [11]. Мы будем далее использовать следующие обозначения $D_n(k,p) := k - B_n(k, 1-p) = \sum_{i=1}^{k} I(U_{n,i} > 1-p)$, $\widetilde{D}_n(k,p) := k - \widetilde{B}_n(k, 1-p) = \sum_{i=1}^{k} I(\widetilde{U}_{n,i} > 1-p)$. Ясно, что $D_n(k,p)$ и $\widetilde{D}_n(k,p)$ имеют биномиальные распределения с параметрами k и p.

Утверждение 1. *Пусть $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ последовательность н.о.р. неотрицательных целочисленных случайных величин с конечным средним $\mathbb{E}\, Z_0 < \infty$. Предположим, что они не зависят от семейств н.о.р. случайных величин $\{U_{n,i}^{(j)}; -\infty < n < \infty,\ i \geq 1\}$ и $\{\widetilde{U}_{n,i}^{(j)}; -\infty < n < \infty,\ i \geq 1,\ 1 \leq j \leq m\}$, имеющих равномерное распределение на интервале (0, 1).*

(I) Для любого начального значения W_0 и для любого параметра $p \in (0,1)$, последовательность

$$W_{n+1} = W_n - B_n(W_n, 1-p) + Z_n \equiv D_n(W_n, p) + Z_n \tag{24}$$

эргодична.

(II) Для $m \leq n$ определим случайные величины

$$D_{m:n}(k,p) = D_n(D_{n-1}(...(D_{m+1}(D_m(k,p),p)...,p) \tag{25}$$

и заметим, что случайная величина $D_{m:n}(k,p)$ имеет биномиальное распределение с параметрами k и p^{n-m+1}. Тогда стационарная последовательность $W^{(n)}$, определенная следующим образом

$$W^{(n)} = Z_{n-1} + \sum_{j=1}^{+\infty} D_{(n-j):(n-1)}(Z_{n-j-1},p), \tag{26}$$

имеет конечное математическое ожидание $EW^{(n)} = EZ_0/(1-p)$ и образует стационарное решение для рекурсивного уравнения,

$$W^{(n+1)} = D_n(W^{(n)},p) + Z_n. \tag{27}$$

(III) Пусть Q — распределение $W^{(0)}$. Тогда, для любого начального значения W_0

$$\mathbb{P}(W_n = W^{(n)}) = \mathbb{P}(W_l = W^{(l)}, \forall l \geq n) \to 1 \tag{28}$$

и, в частности,

$$\sup_{A \in Z_+} |\,\mathbb{P}(W_n \in A) - Q(A)| \leq \mathbb{P}(W_n \neq W^{(n)}) \to 0, \ \text{при } n \to \infty. \tag{29}$$

В частности, если W_0 и Z_0 имеют конечные экспоненциальные моменты, тогда

$$\mathbb{P}(W_n \neq W^{(n)}) \leq K_1 e^{-K_2 n}, \tag{30}$$

для некоторых $K_1, K_2 > 0$ и для всех $N \geq 0$.
(IV) Для любого $n \geq 0$,

$$W_n \leq W_0 + W^{(n)} \ \text{п.н.} \tag{31}$$

и

$$\mathbb{E}\, W_n \leq \mathbb{E}\, W_0 + \frac{\mathbb{E}\, Z_0}{1-p}. \tag{32}$$

(V) Пусть $\widetilde{Z}_n$ — любая другая последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин, таких что $0 \leq \widetilde{Z}_n \leq Z_n$ п.н., для всех n. Рассмотрим рекурсивное уравнение

$$\widetilde{W}_{n+1} = D_n(\widetilde{W}_n,p) + \widetilde{Z}_n \tag{33}$$

с целочисленным начальным значением $0 \leq \widetilde{W}_0 \leq W_0$. Тогда

$$\widetilde{W}_n \leq W_n \quad \text{п.н., для всех } n \geq 0. \tag{34}$$

(VI) В частности, если Z_0 пуассоновская случайная величина с параметром c, то каждый $W^{(n)}$ имеет пуассоновское распределение с параметром $c/(1-p)$.

Сформулируем второе вспомогательное утверждение из работы [13]. Пусть X_n — однородная по времени цепь Маркова, принимающая значения в некотором польском пространстве $\mathcal{X}$. Пусть $L : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ — некоторая измеримая функция Ляпунова. Пусть $g : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$ и $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ — измеримые функции такие, что:
1) h ограничена снизу: $\underset{x \in \mathcal{X}}{h(x)} > -\infty$;
2) h «в конце» положительна: $\sup\limits_{K>0} \inf\limits_{L(x)>K} h(x) > 0$;

3) g локально ограничена сверху: $\sup\limits_{L(x)\le N} g(x) < \infty$ для всех $N \ge 0$;

4) g «в конце» ограничена функцией h: $\inf\limits_{K>0} \sup\limits_{L(x)>K} \frac{g(x)}{h(x)} < \infty$.

Для измеримого множества $B \subseteq \mathcal{X}$ определим $\tau_B = \inf\{n \ge 1 : X_n \in B\}$. Множество B называется *возвратным*, если $\mathbb{P}_x(\tau_B < \infty) = 1$ и *положительно возвратным*, если $\sup\limits_{x\in\mathcal{X}} \mathbb{E}_x \tau_B < \infty$. Сформулируем утверждение.

Утверждение 2. *(обобщенный критерий Фостера) Предположим, что существуют тестовая функция («функция Ляпунова») $L(x) \ge 0$, и функции g и h, удовлетворяющие условиям $1) - 4)$ такие, что*

$$\mathbb{E}(L(X_{g(X_0)}) - L(X_0)|X_0 = x) \le -h(x). \tag{35}$$

Тогда существует $N_0 \in \mathbb{N}$ такая, что для всех $N > N_0$ и всех $x \in \mathcal{X}$ имеем $\mathbb{E}_x\tau < \infty$ и $\mathop{\mathbb{E}_x\tau}\limits_{L(x)\le N} < \infty$, где $\tau \equiv \tau(N) = \inf\{n \ge 1 : L(x) \le N\}$.

Сформулируем третье вспомогательное утверждение, которое было исследовано в работе С.Г. Фосса и Д.Е. Денисова [14]. Данное утверждение более аккуратно изложено, а также доказано при более общих условиях в работе Д.Е. Денисова [15]. Для простоты изложения мы приведем только частный случай для однородных цепей Маркова. Пусть последовательность $\{X_n\}_{n\ge0}$ образует цепь Маркова такую, что

$$X_{n+1} = f(X_n, \alpha_n)$$

с начальным значением $X_0 = x$, где $\{\alpha_n\}_{n\ge0}$ образует последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин, а f — измеримая функция. Пусть далее $\Delta = L(X_1) - L(X_0)$, где L — измеримая функция. Определим

$$\tau(N) = \inf\{n \ge 0 \ : \ L(X_n) \ge N\}.$$

Также далее полагаем, что $h(t)$ — некоторая вещественная функция такая, что $(h(t))^{-1}$ интегрируема на промежутке $(1, \infty)$.

Утверждение 3. *Пусть существуют такие числа $N > 0$, $\varepsilon > 0$ и такая функция $h(t)$, что*
1) $\tau(N) < \infty$ п.н. для произвольного начального состояния цепи;
2) Для всех $x \in X$ таких, что $L(x) \ge N$, выполняется:

$$\mathbb{E}_x(\Delta \cdot I(\Delta \le M)) \ge \varepsilon;$$

3) Семейство случайных величин $\{h(-min(0, \Delta)),\ X_0 = x,\ L(x) \ge N\}$ равномерно интегрируемо. Тогда для каждого $x \in X$

$$\mathbb{P}_x(\lim_{n\to\infty} L(X_n) = \infty) = 1.$$

References

[1] Harb, Adnan. (2011). Energy harvesting: State-of-the-art. Renewable Energy. 36. 2641-2654. 10.1016/j.renene.2010.06.014.

[2] S. Sudevalayam and P. Kulkarni, "Energy Harvesting Sensor Nodes: Survey and Implications in IEEE Communications Surveys & Tutorials, vol. 13, no. 3, pp. 443-461, Third Quarter 2011, doi: 10.1109/SURV.2011.060710.00094.
[3] Xun Zhou, Rui Zhang, Chin Keong Ho, Wireless Information and Power Transfer in Multiuser OFDM Systems, IEEE Transactions on Wireless Communications, 13:4 (2014), 2282–2294.
[4] J. Jeon and A. Ephremides, The stability region of random multiple access under stochastic energy harvesting, Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), (2011), 1796–1800.
[5] A. Bergman, M. Sidi, Energy efficiency of collision resolution protocols, Computer Communications, 29 (2006), 3397–3415.
[6] N. Abramson, Development of the ALOHANET, IEEE Trans. Info. Theory, 31 (1985), 119– 123. Zbl 0563.94001
[7] G. Fayolle, E. Gelenbe, J. Labetoulle, Stability and optimal control of the packet switching broadcast channel, Journal of the ACM (JACM), 24:3 (1977), 375–386. MR0445639
[8] J. P. Kelly and I. M. McPhee, The Number of Packets Transmitted by Collision Detect Random Access Schemes, Annals of Probability, 15:4 (1987), 1557–1568. MR0905348
[9] N. Vvedenskaya, Yu. Suhov, Multi-access system with many users: Stability and metastability, Problems of Information Transmission, 43:3 (2007), 263–269. MR2360021
[10] D. Kim, A. Turlikov, S. Foss, Random multiple access with common energy harvesting mechanism, Siberian Electronic Mathematical Reports, 11 (2014), 896–905. MR3488468
[11] S. Foss, D. Kim, A. Turlikov, Stability and instability of a random multiple access model with adaptive energy harvesting, Siberian Electronic Mathematical Reports, 13 (2016), 16–25. MR3506879
[12] Rezler A., Chebunin M., Stability and instability of a random multiple access system with an energy harvesting mechanism, Siberian Electronic Mathematical Reports, 19:1 (2022), pp. 1-17.
[13] S. Foss and T. Konstantopoulos, An overview of some stochastic stability methods, Journal of Operation Research Society Japan, 47:4 (2004), 275–303. Zbl 1134.93412
[14] Foss S. G. and Denisov D. E., On transience conditions for Markov chains, Siberian Math. J., 42, No. 2, 364–371 (2001). MR183316
[15] Markov chains and random walks with heavy-tailed increments, PhD thesis, Heriot-Watt University, Edinburgh, 2004

Alexandr Vadimovich Rezler
Novosibirsk State University
2, Pirogova str.
St.-Petersburg University of Aerospace Instrumentation,
Bolshaya Morskaya 67,
190000, St.-Petersburg, Russia.
Email address: rezlers123@gmail.com

Mikhail Georgievich Chebunin
Karlsruhe Institute of Technology,
Institute of Stochastics,
Karlsruhe, 76131, Germany.
Email address: chebuninmikhail@gmail.com