Неполиномиальные интегралы многомерных геодезических потоков и алгебры Ли.

С.В. Агапов [1]

Аннотация. В данной работе мы строим явные локальные примеры многомерных римановых метрик, геодезический поток которых обладает неполиномиальными первыми интегралами и является вполне интегрируемым. Мы опираемся на описанную в недавней работе А.В. Галажинского конструкцию, позволяющую строить подобные примеры при помощи инвариантов Казимира конечномерных алгебр Ли.

Ключевые слова: риманова метрика, геодезический поток, неполиномиальный первый интеграл, алгебра Ли, инвариант Казимира.

1. Введение

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{x}^j = \{x^j, H\}, \qquad \dot{p}_j = \{p_j, H\}, \qquad i,j = 1,\dots,n \tag{1.1}$$

с гамильтонианом и скобкой Пуассона следующего вида:

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(x) p_i p_j, \qquad \{F,H\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i} \right), \qquad i,j = 1,\dots,n.$$

Система (1.1) задает геодезический поток римановой метрики $dl^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ на n-мерном многообразии с координатами $x = (x^1,\dots,x^n)$. Первым интегралом гамильтоновой системы (1.1) называется такая функция $F(x,p)$, что $\dot{F} = \{F,H\} \equiv 0$. Геодезический поток называется вполне интегрируемым, если найдутся n функционально независимых п.в. первых интегралов $F_1 = H, F_2, \dots, F_n$, находящихся попарно в инволюции: $\{F_i, F_j\} = 0$, $i,j = 1,\dots,n$.

Наиболее изученными являются двумерные геодезические потоки. Локальный аспект этой задачи исследовался еще в работах Биркгофа (см. [1]), им же были классифицированы метрики, допускающие линейный или квадратичный по импульсам первый интеграл. В [2], [3] доказано существование двумерных метрик с дополнительным полиномиальным интегралом сколь угодно высокой степени (локально). В [4] построен локальный пример метрики с интегралом четвертой степени. А в [5] классифицированы линейные и квадратичные интегралы на двумерных сфере и торе.

Неполиномиальные интегралы геодезических потоков, *которые только и будут интересовать нас в дальнейшем*, также исследовались во многих работах (см., например, [6] — [16]). Так, например, в [15] построено большое количество явных примеров двумерных римановых метрик с дополнительным интегралом в виде рациональной функции по импульсам.

---

[1]Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-41-00018).

В [16] предложена конструкция, позволяющая по каждой конечномерной вещественной алгебре Ли построить некоторую риманову метрику, геодезический поток которой обладает дополнительными первыми интегралами, соответствующими инвариантам Казимира исходной алгебры Ли. Опишем вкратце эту конструкцию.

Рассмотрим произвольную алгебру Ли размерности n с порождающими e_k и структурными соотношениями:

$$[e_i, e_j] = c^k_{ij} e_k, \qquad c^k_{ij} = -c^k_{ji}.$$

Пусть $x = (x^1, \dots, x^n)$ и $p = (p_1, \dots, p_n)$ — канонические координаты и импульсы. Положим $e_i = c^k_{ij} x^j p_k$ и построим гамильтониан $H = \frac{1}{2}\left(\alpha_1^2 e_1^2 + \dots \alpha_n^2 e_n^2\right)$, где α_j — произвольные вещественные постоянные. Построенный таким образом гамильтониан будет отвечать геодезическому потоку некоторой невырожденной римановой метрики (возможно, после соответствующей редукции по циклическим переменным, если такие возникнут). Предположим теперь, что $L(e)$ — инвариант Казимира исходной алгебры Ли: $[L(e), e_k] = 0$, $k = 1, \dots, n$. Переписав его в терминах x, p, получим первый интеграл геодезического потока, коммутирующий с гамильтонианом относительно стандартной скобки Пуассона.

При помощи вышеописанной конструкции в [16] построено несколько примеров римановых метрик и неполиномиальных интегралов. В данной работе мы, пользуясь той же самой конструкцией, дополняем этот список примеров. Список соответствующих алгебр Ли вместе с коммутационными соотношениями и инвариантами Казимира можно найти в [17].

Любопытно, что во всех построенных примерах дополнительные интегралы вообще не зависят от координат.

2. Примеры двумерных метрик

Первые два интегрируемых примера относятся к двумерным метрикам.

Трехмерная алгебра Ли $A_{3,3}$ (мы следуем обозначениям, принятым в [17]) имеет следующие ненулевые коммутационные соотношения:

$$[e_1, e_3] = e_1, \qquad [e_2, e_3] = e_2,$$

то есть $c^1_{13} = c^2_{23} = 1$. Инвариант Казимира имеет вид $L = e_2/e_1$. Следуя вышеописанной конструкции, положим

$$e_1 = c^1_{13} x^3 p_1 = x^3 p_1, \quad e_2 = c^2_{23} x^3 p_2 = x^3 p_2, \quad e_3 = c^1_{31} x^1 p_1 + c^2_{32} x^3 p_2 = -(x^1 p_1 + x^2 p_2).$$

Построим гамильтониан $H = \frac{1}{2}\left(\alpha_1^2 e_1^2 + \alpha_2^2 e_2^2 + \alpha_3^2 e_3^2\right)$. Поскольку импульс p_3 не входит в H, то положим $p_3 = 0$, $x^3 = s$, где s — произвольная постоянная. Инвариант Казимира L в переменных x, p принимает вид $L = p_2/p_1$. В итоге получаем

Пример 1. *(Алгебра $A_{3,3}$ в [17]).*

Пусть s, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, 2, 3$. Тогда

$$H = \frac{1}{2} g^{ij}(x) p_i p_j = \frac{1}{2}\left(s^2\left(p_1^2 \alpha_1^2 + p_2^2 \alpha_2^2\right) + (x^1 p_1 + x^2 p_2)^2 \alpha_3^2\right), \quad F = \frac{p_2}{p_1}, \quad \{F, H\} = 0.$$

Риманова метрика имеет вид $dl^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$, *где*

$$g_{11} = \frac{\alpha_3^2(x^2)^2 + \alpha_2^2 s^2}{\alpha_3^2 s^2(\alpha_2^2(x^1)^2 + \alpha_1^2(x^2)^2) + s^4\alpha_1^2\alpha_2^2}, \qquad g_{12} = -\frac{\alpha_3^2 x^1 x^2}{\alpha_3^2 s^2(\alpha_2^2(x^1)^2 + \alpha_1^2(x^2)^2) + s^4\alpha_1^2\alpha_2^2},$$

$$g_{22} = \frac{\alpha_3^2(x^1)^2 + \alpha_1^2 s^2}{\alpha_3^2 s^2(\alpha_2^2(x^1)^2 + \alpha_1^2(x^2)^2) + s^4\alpha_1^2\alpha_2^2}.$$

Гауссова кривизна K *построенной метрики постоянна и равна* $K \equiv -\alpha_3^2$.

Пример 1 допускает следующее обобщение.

Пример 2. *(Алгебра* $A_{3,5}^a$ *в* [17]*).*

Пусть s, a, α_k *— произвольные постоянные,* $k = 1, 2, 3$. *Тогда*

$$H = \frac{1}{2}\left(s^2\left(p_1^2\alpha_1^2 + a^2 p_2^2\alpha_2^2\right) + (x^1 p_1 + a x^2 p_2)^2\alpha_3^2\right), \quad F = \frac{p_2}{p_1^a}, \quad \{F, H\} = 0.$$

Риманова метрика имеет вид $dl^2 = g_{ij}(x)dx^i dx^j$, *где*

$$g_{11} = \frac{\alpha_3^2(x^2)^2 + \alpha_2^2 s^2}{\alpha_3^2 s^2(\alpha_2^2(x^1)^2 + \alpha_1^2(x^2)^2) + s^4\alpha_1^2\alpha_2^2}, \qquad g_{12} = -\frac{\alpha_3^2 x^1 x^2}{a\alpha_3^2 s^2(\alpha_2^2(x^1)^2 + \alpha_1^2(x^2)^2) + a s^4\alpha_1^2\alpha_2^2},$$

$$g_{22} = \frac{\alpha_3^2(x^1)^2 + \alpha_1^2 s^2}{a^2\alpha_3^2 s^2(\alpha_2^2(x^1)^2 + \alpha_1^2(x^2)^2) + a^2 s^4\alpha_1^2\alpha_2^2}.$$

Гауссова кривизна построенной метрики, вообще говоря, непостоянная. При $a = 1$ *получим* $K \equiv -\alpha_3^2$.

3. Примеры трехмерных метрик

Аналогичным образом строятся примеры трехмерных метрик. Поскольку выражения для компонент g_{ij} получаются весьма громоздкими, мы не будем их выписывать в явном виде. Отметим лишь, что все компоненты имеют "рациональный" вид, как в Примерах 1, 2.

Пример 3. *(Алгебра* $A_{4,2}^a$ *в* [17]*).*

Пусть s, a, α_k *— произвольные постоянные,* $k = 1, \ldots, 4$. *Положим*

$$g^{11} = a^2(\alpha_4^2(x^1)^2 + \alpha_1^2 s^2)), \qquad g^{12} = a\alpha_4^2 x^1(x^2 + x^3), \qquad g^{13} = a\alpha_4^2 x^1 x^3,$$

$$g^{22} = \alpha_4^2(x^2+x^3)^2+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)s^2, \qquad g^{23} = \alpha_4^2 x^3(x^2+x^3)+s^2\alpha_3^2, \qquad g^{33} = \alpha_4^2(x^3)^2 x^4+s^2\alpha_3^2.$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_i p_j, \qquad F_2 = \frac{p_2^a}{p_1}, \qquad F_3 = p_2 e^{-p_3/p_2},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_2, F_3\} = 0.$$

Пример 4. *(Алгебра $A_{4,4}$ в [17]).*

Пусть s, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \ldots, 4$. Положим

$$g^{11} = \alpha_4^2(x^1+x^2)^2+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)s^2, \qquad g^{12} = \alpha_4^2(x^1+x^2)(x^2+x^3)+s^2\alpha_2^2, \qquad g^{13} = \alpha_4^2x^3(x^1+x^2),$$

$$g^{22} = \alpha_4^2(x^2+x^3)^2+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)s^2, \qquad g^{23} = \alpha_4^2x^3(x^2+x^3)+s^2\alpha_3^2, \qquad g^{33} = \alpha_4^2(x^3)^2+s^2\alpha_3^2.$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j, \qquad F_2 = p_1e^{-p_2/p_1}, \qquad F_3 = \frac{p_2^2 - 2p_1p_3}{p_1^2},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_2, F_3\} = 0.$$

Пример 5. *(Алгебра $A_{4,5}^{ab}$ в [17]).*

Пусть s, a, b, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \ldots, 4$. Положим

$$g^{11} = \alpha_4^2(x^1)^2 + \alpha_1^2s^2, \qquad g^{12} = a\alpha_4^2x^1x^2, \qquad g^{13} = b\alpha_4^2x^1x^3,$$

$$g^{22} = a^2(\alpha_4^2(x^2)^2 + \alpha_2^2s^2), \qquad g^{23} = ab\alpha_4^2x^2x^3, \qquad g^{33} = b^2(\alpha_4^2(x^3)^2 + \alpha_3^2s^2).$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^a}{p_2}, \qquad F_3 = \frac{p_1^b}{p_3},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_2, F_3\} = 0.$$

4. Примеры четырехмерных метрик

Наконец, приведем несколько интегрируемых примеров четырехмерных метрик.

Пример 6. *(Алгебра $A_{5,7}^{abc}$ в [17]).*

Пусть s, a, b, c, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \ldots, 5$. Положим

$$g^{11} = \alpha_5^2(x^1)^2 + \alpha_1^2s^2, \qquad g^{12} = a\alpha_5^2x^1x^2, \qquad g^{13} = b\alpha_5^2x^1x^3, \qquad g^{14} = c\alpha_5^2x^1x^4,$$

$$g^{22} = a^2(\alpha_5^2(x^2)^2 + \alpha_2^2s^2), \qquad g^{23} = ab\alpha_5^2x^2x^3, \qquad g^{24} = ac\alpha_5^2x^2x^4,$$

$$g^{33} = b^2(\alpha_5^2(x^3)^2 + \alpha_3^2s^2), \qquad g^{34} = bc\alpha_5^2x^3x^4, \qquad g^{44} = c^2(\alpha_5^2(x^4)^2 + \alpha_4^2s^2).$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^a}{p_2}, \qquad F_3 = \frac{p_1^b}{p_3}, \qquad F_4 = \frac{p_1^c}{p_4},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_4, H\} = \{F_2, F_3\} = \{F_2, F_4\} = \{F_3, F_4\} = 0.$$

Пример 7. *(Алгебра $A_{5,9}^{bc}$ в [17]).*

Пусть s, b, c, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \ldots, 5$. Положим

$$g^{11} = \alpha_5^2(x^1+x^2)^2+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)s^2, \qquad g^{12} = s^2\alpha_2^2+\alpha_5^2x^2(x^1+x^2), \qquad g^{13} = b\alpha_5^2(x^1+x^2)x^3,$$

$$g^{14} = c\alpha_5^2(x^1 + x^2)x^4, \qquad g^{22} = \alpha_5^2(x^2)^2 + \alpha_2^2s^2, \qquad g^{23} = b\alpha_5^2x^2x^3, \qquad g^{24} = c\alpha_5^2x^2x^4,$$

$$g^{33} = b^2(\alpha_5^2(x^3)^2 + \alpha_3^2s^2), \qquad g^{34} = bc\alpha_5^2x^3x^4, \qquad g^{44} = c^2(\alpha_5^2(x^4)^2 + \alpha_4^2s^2).$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^b}{p_3}, \qquad F_3 = \frac{p_1^c}{p_4}, \qquad F_4 = p_1e^{-\frac{p_2}{p_1}},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_4, H\} = \{F_2, F_3\} = \{F_2, F_4\} = \{F_3, F_4\} = 0.$$

Пример 8. *(Алгебра $A^c_{5,11}$ в [17]).*

Пусть s, c, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \dots, 5$. Положим

$$g^{11} = \alpha_5^2(x^1+x^2)^2+(\alpha_1^2+\alpha_2^2)s^2, \qquad g^{12} = s^2\alpha_2^2+\alpha_5^2(x^1+x^2)(x^2+x^3), \qquad g^{13} = \alpha_5^2(x^1+x^2)x^3,$$

$$g^{14} = c\alpha_5^2(x^1+x^2)x^4, \qquad g^{22} = \alpha_5^2(x^2+x^3)^2+(\alpha_2^2+\alpha_3^2)s^2, \qquad g^{23} = \alpha_3^2s^2+\alpha_5^2(x^2+x^3)x^3,$$

$$g^{24} = c\alpha_5^2(x^2+x^3)x^4, \quad g^{33} = \alpha_5^2(x^3)^2+\alpha_3^2s^2, \quad g^{34} = c\alpha_5^2x^3x^4, \quad g^{44} = c^2(\alpha_5^2(x^4)^2+\alpha_4^2s^2).$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^c}{p_4}, \qquad F_3 = p_1e^{-\frac{p_2}{p_1}}, \qquad F_4 = \frac{2p_1p_3 - p_2^2}{p_1^2},$$

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_4, H\} = \{F_2, F_3\} = \{F_2, F_4\} = \{F_3, F_4\} = 0.$$

Пример 9. *(Алгебра $A^{a,r,s}_{5,13}$ в [17]).*

Пусть w, a, r, s, α_k — произвольные постоянные, $k = 1, \dots, 5$. Положим

$$g^{11} = \alpha_5^2(x^1)^2+\alpha_1^2w^2, \qquad g^{12} = a\alpha_5^2x^1x^2, \qquad g^{13} = \alpha_5^2x^1(rx^3+sx^4), \qquad g^{14} = \alpha_5^2x^1(rx^4-sx^3),$$

$$g^{22} = a^2(\alpha_5^2(x^2)^2 + \alpha_2^2w^2), \qquad g^{23} = a\alpha_5^2x^2(rx^3 + sx^4), \qquad g^{24} = a\alpha_5^2x^2(rx^4 - sx^3),$$

$$g^{33} = w^2(\alpha_3^2r^2+\alpha_4^2s^2)+\alpha_5^2(rx^3+sx^4)^2, \qquad g^{34} = w^2rs(\alpha_4^2-\alpha_3^2)+\alpha_5^2(rx^3+sx^4)(rx^4-sx^3),$$

$$g^{44} = w^2(\alpha_3^2s^2 + \alpha_4^2r^2) + \alpha_5^2(rx^4 - sx^3)^2.$$

Тогда

$$H = \frac{1}{2}g^{ij}p_ip_j, \qquad F_2 = \frac{p_1^a}{p_2}, \qquad F_3 = \frac{p_1^{2r}}{p_3^2 + p_4^2}, \qquad F_4 = p_1^{2s}e^{-\arctan z},$$

где $z = \frac{2(sp_3+rp_4)(rp_3-sp_4)}{(rp_3-sp_4)^2-(sp_3+rp_4)^2}$, *и*

$$\{F_2, H\} = \{F_3, H\} = \{F_4, H\} = \{F_2, F_3\} = \{F_2, F_4\} = \{F_3, F_4\} = 0.$$

5. Заключение

Во всех построенных примерах геодезический поток обладает полным набором первых интегралов, находящихся попарно в инволюции, то есть является вполне интегрируемым. Большое количество других интегрируемых примеров многомерных метрик с неполиномиальными интегралами можно построить аналогичным образом для различных алгебр Ли.

Было бы интересно модифицировать эту конструкцию для того, чтобы строить, скажем, новые интегрируемые примеры магнитных геодезических потоков.

Список литературы

[1] Биркгоф Дж.Д.: Динамические системы. М.-Л.: Гостехиздат, 1941.
[2] Козлов В.В.: Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике. Изд-во Удмуртского гос. ун-та, Ижевск, 1995.
[3] Тен В.В.: Локальные интегралы геодезических потоков. Regul. Chaotic Dyn., **2**:2, 87 – 89 (1997).
[4] Абдикаликова Г., Миронов А.Е.: О точных решениях системы квазилинейных уравнений, описывающей интегрируемые геодезические потоки на поверхности. Сиб. электрон. матем. изв., **16**, 949 – 954 (2019).
[5] Колокольцов В.Н.: Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скоростям первым интегралом. Изв. АН СССР. Сер. матем., **46**:5, 994 – 1010 (1982).
[6] Дарбу Ж.Г.: Лекции по общей теории поверхностей и геометрические приложения анализа бесконечно малых. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2013. Т. 3.
[7] Heilbronn G.: "Integration des equations differentielles ordinaires par la methode de Drach", Gauthier-Villars, Paris, 1956.
[8] Hietarinta J.: New integrable Hamiltonians with transcendental invariants. Phys. Rev. Lett., **52**:1057 (1984).
[9] Collinson C.D.: A note on the integrability conditions for the existence of rational first integrals of the geodesic equations in a Riemannian space. Gen. Relativity Gravitation, **18**:2, 207 – 214 (1986).
[10] Переломов А.М.: Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. Изд-во "Наука", Москва, 1990.
[11] Collinson C.D., O'Donnell P.J.: A class of empty spacetimes admitting a rational first integral of the geodesic equation. Gen. Relativity Gravitation, **24**:4, 451 – 455 (1992).
[12] Maciejewski A.J., Przybylska M.: Darboux polynomials and first integrals of natural polynomial Hamiltonian systems. Phys. Lett. A, **326**:3-4, 219 – 226 (2004).
[13] Козлов В.В.: О рациональных интегралах геодезических потоков. Нелинейная динам., **10**:4, 439 – 445 (2014).
[14] Aoki A., Houri T., Tomoda K.: Rational first integrals of geodesic equations and generalised hidden symmetries. Classical Quantum Gravity, **33**:19, 195003, 12 pp. (2016).
[15] Agapov S., Shubin V.: Rational integrals of 2-dimensional geodesic flows: new examples. Journ. of Geom. and Phys., **170** (2021), 104389.
[16] Galajinsky A.: Some metrics admitting nonpolynomial first integrals of the geodesic equation. Phys. Letters B, **820** (2021), 136483.
[17] Patera J., Sharp R.T., Winternitz P., Zassenhaus H.: Invariants of real low dimension Lie algebras. J. Math. Phys., **17** (1976) 986.

С.В. Агапов

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия;

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

agapov.sergey.v@gmail.com, agapov@math.nsc.ru