

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxxУДК 517.958
MSC 35Q60ЛОКАЛИЗАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА
КОЭФФИЦИЕНТА РАССЕЯНИЯ ПО ВРЕМЕННО-УГЛОВОМУ
РАСПРЕДЕЛЕНИЮ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ИЗЛУЧЕНИЯ

П. А. ВОРНОВСКИХ, И. В. ПРОХОРОВ

ABSTRACT. In the paper the inverse problem for the nonstationary radiative transfer equation is formulated and investigated. It consists in determining the discontinuity surfaces of the scattering coefficient by the time-angular distribution of the radiation flux density at a given point in space. A numerical method for localizing the lines of discontinuity of the required coefficient in any plane is proposed. On a number of numerical experiments applied to high-frequency acoustic sounding of an inhomogeneous fluctuating ocean, the operability of the algorithm is demonstrated and its shortcomings due to the measurement data error are indicated.

Keywords: radiative transfer equation, inverse problem, scattering coefficient, function discontinuity surfaces

В работах [1,2] рассмотрена обратная задача для уравнения переноса излучения со сосредоточенным импульсным источником, заключающаяся в нахождении коэффициента рассеяния по временно-угловому распределению плотности потока в заданной точке пространства. В двумерном и трехмерном случае был проведен численный анализ погрешности приближения однократного рассеяния при нахождении решения обратной задачи. Обозначены границы применимости приближения однократного рассеяния при акустическом зондировании океана на частотах порядка 100кГц.

В настоящей работе рассматривается задача определения поверхностей разрыва коэффициента рассеяния по тем же исходным данным, что и в задаче,

© 2022 Vornovskikh P.A. Prokhorov I.V.

Localization of Discontinuity Surfaces of the Scattering Coefficient According to the Time-Angular Distribution of the Radiation Flux Density.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 20-01-00173) и Минобрнауки РФ (соглашения 075-00771-22-00 и 075-02-2022-880).

Поступила 25 октября 2022 г., опубликована .

ранее рассмотренной в [1, 2]. В отличие от предыдущей задачи коэффициент ослабления излучения может быть неизвестным, но и не подлежит определению в данной постановке. Предложен численный метод определения поверхностей разрыва коэффициента рассеяния, основанный на построении некоторой индикаторной функции, позволяющий сравнительно просто локализовать искомые поверхности. Метод свободен от ограничений приближения однократного рассеяния и теоретически позволяет найти решение обратной задачи в общем случае. Численные эксперименты на трехмерном фантоме из работы [2] показали работоспособность алгоритма, если уровень шума в исходных данных задачи не слишком высок.

1. ПОСТАНОВКИ ПРЯМОЙ И ОБРАТНОЙ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ

В работе рассматривается интегро-дифференциальное уравнение следующего вида

$$(1) \quad \frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \mathbf{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \mu I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{\sigma(\mathbf{r})}{4\pi} \int_{\Omega} I(\mathbf{r}, \mathbf{k}', t) d\mathbf{k}' + J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t),$$

где $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$, $t \in [0, T]$ и волновой вектор \mathbf{k} принадлежит единичной сфере $\Omega = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{k}| = 1\}$. Функция $I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ интерпретируется как плотность потока энергии волны в момент времени t в точке \mathbf{r} , распространяющейся в направлении \mathbf{k} со скоростью c . Неотрицательные величины μ и σ имеют смысл коэффициентов затухания и рассеяния, а функция J описывает источники излучения.

Уравнение (1) описывает множество нестационарных процессов переноса излучения в изотропно рассеивающих средах и может быть использовано для моделирования процесса распространения высокочастотных акустических полей во флуктуирующем океане [3–9].

Добавим к уравнению (1) начальное условие

$$(2) \quad I^-(\mathbf{r}, \mathbf{k}, 0) = 0, \quad (\mathbf{r}, \mathbf{k}) \in G \times \Omega$$

и пусть функция J описывает точечный источник излучения, сосредоточенный в начале координат и излучающий в момент времени $t = 0$ импульс единичной мощности:

$$(3) \quad J(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \delta(\mathbf{r})\delta(t),$$

где δ — дельта-функция Дирака и $I^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \lim_{\epsilon \rightarrow -0} I(\mathbf{r} \pm \epsilon, \mathbf{k}, t \pm \epsilon)$.

Предполагается, что функция $\sigma(\mathbf{r})$ кусочно-постоянная в \mathbb{R}^3 : $\sigma(\mathbf{r}) = \sigma_i$, $\mathbf{r} \in G_i$, $i = 0, 1, \dots, p$, где G_i , $i = 1, \dots, p$ ограниченные попарно не пересекающиеся области и $G_0 = \mathbb{R}^3 \setminus (G_1 \cup \dots \cup G_p)$. Поверхности ∂G_i достаточно гладкие класса C^1 , а разбиение G_1, G_2, \dots, G_p удовлетворяет условию обобщенной выпуклости [10], а именно — множество $\gamma = \partial G_1 \cup \dots \cup \partial G_p$ пересекается любой прямой в конечном числе точек.

Сформулируем прямую и две обратных задачи для нестационарного уравнения переноса излучения (1).

Задача 1. Найти функцию I из уравнения (1) и начального условия (2) при всех заданных коэффициентах c, μ, σ, J .

Задача 2. Найти функцию σ из соотношений (1),(2),(3) и дополнительного условия

$$(4) \quad I^+(0, \mathbf{k}, t) = P(\mathbf{k}, t),$$

в которых величины s, μ и функция P известны.

Задача 3. Определить поверхности разрыва функции σ (множество γ) из соотношений (1),(2),(3) и дополнительного условия (4) в которых s, P известны.

Решение обратных коэффициентных задач для интегро-дифференциальных уравнений переноса в общем виде представляет собой достаточно сложную математическую проблему. Чаще всего удается доказать единственность решения обратных задач при ограничениях на исходные данные типа «малости» [11,12]. В тоже время теория обратных задач для уравнений переноса излучения постоянно привлекает внимание специалистов и ее развитие идет, как по пути создания новых методов, так и по пути усложнения существующих моделей переноса излучения [7, 13–17].

В постановке Задачи 3 требуется определить только поверхности разрыва функции σ . Нахождение такой частичной информации об искомом коэффициенте уравнения переноса излучения сильно упрощает исходную задачу [10]. В монографии [10] разработаны и обоснованы методы определения поверхностей разрыва коэффициентов стационарного уравнения переноса излучения. Задачи подобного типа, посвященные нахождению линий разрыва функции для упрощенных моделей томографии, рассматривались многими авторами [18–26]. Разработано широкое множество методов локализации линий разрыва функции для различных схем сканирования.

2. ПРЯМАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА ИЗЛУЧЕНИЯ И МЕТОД МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ

Задача Коши (1),(2) эквивалентна уравнению интегрального типа, которое в \mathbb{R}^3 имеет следующий вид [1, 2]:

$$(5) \quad I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \times \\ \times \left(\frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k})}{4\pi} \int_{\Omega} I\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{k}' + J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) \right) d\tau.$$

Решение уравнения (5) может быть найдено в виде ряда Неймана

$$(6) \quad I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t),$$

где функции I_n , $n = 0, 1, \dots$, определяются рекуррентным образом

$$(7) \quad I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k})}{4\pi} \int_{\Omega} I_{n-1}\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}', t - \frac{\tau}{c}\right) d\mathbf{k}' d\tau,$$

$$(8) \quad I_0(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \int_0^{ct} \exp(-\mu\tau) \times J\left(\mathbf{r} - \tau\mathbf{k}, \mathbf{k}, t - \frac{\tau}{c}\right) d\tau$$

и J имеет вид (3). В работах [1, 2] получены выражения для всех компонент ряда Неймана $I_n, n = 2, 3, \dots$,

$$(9) \quad I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{2c \exp(-\mu ct)}{4\pi |\mathbf{r} - ct\mathbf{k}|^2} \sigma(\mathbf{r} - \tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)\mathbf{k}) \chi_{ct}(\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)).$$

$$(10) \quad I_n(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \frac{2c \exp(-\mu ct)}{(4\pi)^n} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \sigma(\mathbf{r}_i) \times \\ \times \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1,$$

где $\bar{\mathbf{r}}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}$ и $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i\mathbf{k}_{i-1}$, $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}$, $\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}$, $t_i = t_{i-1} - \tau_i/c$, $t_0 = t$, $i = 1, \dots, n-1$, $\chi_a(x)$ — характеристическая функция интервала $[0, a]$ и

$$\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, s) = \frac{1}{2} \frac{(cs)^2 - |\mathbf{r}|^2}{cs - (\mathbf{r}, \mathbf{k})}.$$

Таким образом, выражение для функции I имеет вид

$$(11) \quad I(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = I_1(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) + \\ + \frac{c \exp(-\mu ct)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma(\mathbf{r}_i)}{4\pi} \times \\ \times \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1.$$

Кратко опишем схему применения метода Монте-Карло для вычисления усеченной суммы ряда Неймана (11) в точке $(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0) = (\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)$ [27, 28]. Строится траектория

$$(12) \quad (\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0), (\mathbf{r}_1, \mathbf{k}_1, t_1), \dots, (\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}),$$

где

$$(13) \quad \mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{i-1} - \tau_i\mathbf{k}_{i-1}, \quad t_i = t_{i-1} - \tau_i/c, \quad i = 1 \dots n-1,$$

\mathbf{k}_i — случайный вектор, равномерно распределенный на единичной окружности Ω , τ_i — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0, \tau(\mathbf{r}_{i-1}, \mathbf{k}_{i-1}, t_{i-1})]$.

Процесс построения марковской цепочки (12) завершается вычислением еще одной дополнительной точки $\bar{\mathbf{r}}_{n-1} = \mathbf{r}_{n-1} - \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1})\mathbf{k}_{n-1}$. Затем вычисляется случайная величина

$$(14) \quad \Theta_N = \frac{c \exp(-\mu ct_0)}{2\pi} \sum_{n=1}^N \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} \theta_{n-1},$$

где случайные величины θ_n определяются рекуррентным образом

$$\theta_n = \theta_{n-1} \sigma(\mathbf{r}_n) \tau(\mathbf{r}_{n-1}, \mathbf{k}_{n-1}, t_{n-1}), \quad \theta_0 = 1, \quad n = 1, 2, \dots$$

Указанная процедура повторяется M раз, и полученная выборка случайной величины Θ_N усредняется. Полученное значение дает оценку математического ожидания случайной величины Θ_N , а это, в свою очередь, является оценкой

для плотности потока излучения $I(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)$ в приближении N -кратного рассеяния.

3. ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ЛОКАЛИЗАЦИИ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА ФУНКЦИИ $\sigma(\mathbf{r})$

Так как в точке $\mathbf{r}_0 = 0$ функция $\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}, t) = ct/2$ и $\chi_{ct}(ct/2) = 1$, то из (9),(11) получаем

$$(15) \quad I_1^+(0, \mathbf{k}, t) = \frac{\exp(-\mu ct)}{2\pi ct^2} \sigma\left(-\frac{ct}{2}\mathbf{k}\right),$$

$$(16) \quad I^+(0, \mathbf{k}, t) = \frac{\exp(-\mu ct)}{2\pi ct^2} \sigma(\bar{\mathbf{r}}_0) + \\ + \frac{c \exp(-\mu ct)}{2\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \int_0^{\tau(\mathbf{r}_0, \mathbf{k}_0, t_0)} \int_{\Omega} \dots \int_0^{\tau(\mathbf{r}_{n-2}, \mathbf{k}_{n-2}, t_{n-2})} \int_{\Omega} \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\sigma(\mathbf{r}_i)}{4\pi} \times \\ \times \frac{\sigma(\bar{\mathbf{r}}_{n-1})}{|\mathbf{r}_{n-1} - ct_{n-1}\mathbf{k}_{n-1}|^2} d\mathbf{k}_{n-1} d\tau_{n-1} \dots d\mathbf{k}_1 d\tau_1.$$

Полагая $\mathbf{k} = -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ и $t = \frac{2|\mathbf{r}|}{c}$ из (15) находим искомую функция $\sigma(\mathbf{r})$

$$(17) \quad \sigma(\mathbf{r}) = I_1^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) \left(\frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{8\pi|\mathbf{r}|^2}\right)^{-1}.$$

Формула (17) дает явное решение обратной Задачи 2 в приближении однократного рассеяния.

В постановке обратной Задачи 2 считается известным полный поток излучения $P(\mathbf{k}, t) = I^+(0, \mathbf{k}, t) = I_1^+(0, \mathbf{k}, t) + \dots + I_n^+(0, \mathbf{k}, t) + \dots$ в точке $\mathbf{r} = 0$, а не каждая функция $I_n^+(0, \mathbf{k}, t)$ в отдельности, поэтому нахождение функции $\sigma(\mathbf{r})$ по формуле

$$(18) \quad \sigma(\mathbf{r}) = P\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) \left(\frac{c \exp(-2\mu|\mathbf{r}|)}{8\pi|\mathbf{r}|^2}\right)^{-1}$$

приводит к естественной ошибке. В работах [1, 2] проведен количественный и качественный анализ искажений при расчете функции σ по формуле (18) в зависимости от учитываемой кратности рассеяния.

Непосредственно из (17) видно, что поверхности разрыва функции $\sigma(\mathbf{r})$ совпадают с линиями разрыва функции

$$\hat{I}_1(\mathbf{r}) = I_1^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right).$$

Можно показать, что при условии обобщенной выпуклости [10], функции

$$\hat{I}_n(\mathbf{r}) = I_n^+\left(0, -\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right)$$

при $n = 2, 3, \dots$ непрерывны по переменной \mathbf{r} , следовательно, поверхности разрывов функций $\sigma(\mathbf{r})$ и

$$(19) \quad \widehat{P}(\mathbf{r}) = \frac{8\pi}{c} \exp(2\mu|\mathbf{r}|)|\mathbf{r}|^2 P\left(-\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}, \frac{2|\mathbf{r}|}{c}\right) = \\ = \frac{8\pi}{c} \exp(2\mu|\mathbf{r}|)|\mathbf{r}|^2 \left(\widehat{I}_1(\mathbf{r}) + \widehat{I}_2(\mathbf{r}) + \dots\right)$$

совпадают. Строгое доказательство непрерывности функций $\widehat{I}_n(\mathbf{r})$, $n = 2, 3, \dots$ достаточно громоздкое и выходит за рамки данной статьи. Отметим лишь, что доказательство непрерывности функций $\widehat{I}_3(\mathbf{r}), \widehat{I}_2(\mathbf{r}), \dots$ по переменной \mathbf{r} упирается в доказательство непрерывности функции

$$(20) \quad I_2(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t) = \\ = \frac{c \exp(-\mu ct)}{8\pi} \int_0^{\tau(\mathbf{r}, \mathbf{k}, t)} \int_{\Omega} \frac{\sigma(\mathbf{r} - \tau_1 \mathbf{k}) \sigma(\mathbf{r} - \tau_1 \mathbf{k} - \tau(\mathbf{r} - \tau_1 \mathbf{k}, \mathbf{k}_1, t - \tau_1/c) \mathbf{k}_1)}{|\mathbf{r} - \tau_1 \mathbf{k} - (ct - \tau_1) \mathbf{k}_1|^2} d\mathbf{k}_1 d\tau_1$$

по переменным $\mathbf{r}, t, \mathbf{k}$. Если непрерывность функции I_2 показана, то учитывая рекуррентный способ определения функций I_3, I_4, \dots по формуле (7), доказательство непрерывности функций $I_n, n > 2$ провести значительно проще.

Для локализации поверхностей разрыва коэффициента рассеяния можно воспользоваться следующим алгоритмом. Выбирается произвольная плоскость в \mathbb{R}^3 , например $r_3 = l$, и прямоугольная область интереса изменения переменных r_1, r_2 . В этой области на сетке $\mathbf{r}_{i,j} = (r_{1,i}, r_{2,j}, 0)$ с некоторым шагом h , $r_{1,i} = r_{1,0} + ih$, $r_{2,j} = r_{2,0} + jh$, вычисляется функция

$$(21) \quad \text{Ind}(\mathbf{r}_{i,j}) = (\widehat{P}(\mathbf{r}_{i+1,j}) - \widehat{P}(\mathbf{r}_{i-1,j}))^2 + (\widehat{P}(\mathbf{r}_{i,j+1}) - \widehat{P}(\mathbf{r}_{i,j-1}))^2.$$

Нетрудно видеть, что при стремлении h к нулю, функция $\text{Ind}(\mathbf{r})$ стремится к нулю всюду в области интереса за исключением точек из h -окрестности линий разрыва функции \widehat{P} . Меняя параметр l , поверхности разрыва функции \widehat{P} в \mathbb{R}^3 определяются послойно в произвольной горизонтальной плоскости. Так как поверхности разрыва функций σ и \widehat{P} совпадают, то после применения указанного алгоритма приближенное решение обратной Задачи 3 будет найдено, как место положение точек, где функция $\text{Ind}(\mathbf{r})$ принимает значения больше некоторого порогового. Функция $\text{Ind}(\mathbf{r})$ является в некотором смысле индикаторной функцией множества γ . Отметим, что в определении функции $\widehat{P}(\mathbf{r})$ входит параметр μ , который в общем случае неизвестен в постановке Задачи 3. При реализации алгоритма нахождения решения обратной задачи параметр μ можно положить равным нулю, либо воспользоваться априорными приближенными значениями. Наличие множителя $\exp(2\mu|\mathbf{r}|)$ в (19) для применения метода не принципиально поскольку указанный множитель является гладкой функцией переменной \mathbf{r} . Однако, хорошо подобранное значение μ в соотношении (19) может улучшить качество восстановления линий разрыва функции $\sigma(\mathbf{r})$ в дальней зоне (при $|\mathbf{r}| \rightarrow \infty$).

4. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для удобства описания численных результатов обозначим через $\widehat{P}_n(\mathbf{r})$ функцию, определяемую соотношением (19), где вместо бесконечной суммы $\widehat{I}_1(\mathbf{r}) +$

$\widehat{I}_2(\mathbf{r}) + \dots$ стоит конечная сумма из n слагаемых $\widehat{I}_1(\mathbf{r}) + \dots + \widehat{I}_n(\mathbf{r})$. Фактически, функция $\widehat{P}_n(\mathbf{r})$ определяется через решение уравнения переноса излучения в точке 0 в приближении n -кратного рассеяния. Обозначим через Ind_n соответствующую индикаторную функцию

$$(22) \quad \text{Ind}_n(\mathbf{r}_{i,j}) = (\widehat{P}_n(\mathbf{r}_{i+1,j}) - \widehat{P}_n(\mathbf{r}_{i-1,j}))^2 + (\widehat{P}_n(\mathbf{r}_{i,j+1}) - \widehat{P}_n(\mathbf{r}_{i,j-1}))^2.$$

Функция $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ локализует линии разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(r)$ в модели переноса излучения, учитывающей многократное рассеяние в среде до n -ой кратности включительно.

Тестирование алгоритма проводилось на фантоме из работы [2] для включений, ограниченных эллипсоидами. Скорость звука и коэффициент затухания соответствуют реальным величинам, характерным для акустического зондирования в морской среде на частотах порядка 100кГц; $c = 1500\text{м/с}$, $\mu = 0.018\text{м}^{-1}$. Отношение σ/μ в основной водной среде составляло 0.1 [4], а во включениях уровень рассеяния колебался в диапазоне от 0 до 1.

Проведено два численных эксперимента, отличающихся размерами реконструируемых областей. В первом эксперименте восстановление объектов проводилось в плоскости $r_3 = 0$ в области зондирования с размерами $400\text{м} \times 200\text{м}$, ($r_1 \in [-200, 200]$, $r_2 \in [0, 200]$) и с шагом дискретизации $h = 1\text{м}$ на сетке $r_{1,i} = r_{1,0} + ih$, $r_{2,j} = r_{2,0} + jh$, $i = 1, \dots, 400$, $j = 1, \dots, 200$, $r_{1,0} = -200$, $r_{2,0} = 0$. Во втором эксперименте область интереса была увеличена в 2 раза с соответствующим увеличением масштаба самих включений и местом их расположения. То есть реконструкция включений осуществлялась в области зондирования с размерами $800\text{м} \times 400\text{м}$ и с шагом дискретизации $h = 2\text{м}$ ($r_{1,i} = r_{1,0} + ih$, $r_{2,j} = r_{2,0} + jh$, $i = 1, \dots, 400$, $j = 1, \dots, 200$, $r_{1,0} = -400$, $r_{2,0} = 0$). Заметим, что с математической точки зрения для моделирования процесса переноса излучения в средах, отличающихся лишь размерами с сохранением структуры рассеивающих объектов, достаточно пропорционально увеличить или уменьшить коэффициенты ослабления и рассеяния без изменения размеров региона зондирования. В нашем случае коэффициенты ослабления и рассеяния из первого эксперимента нужно увеличить в два раза.

На рис. 1 в графическом виде приведено распределение функции $\sigma(\mathbf{r})$ в плоскости $r_3 = 0$ для условий первого эксперимента.

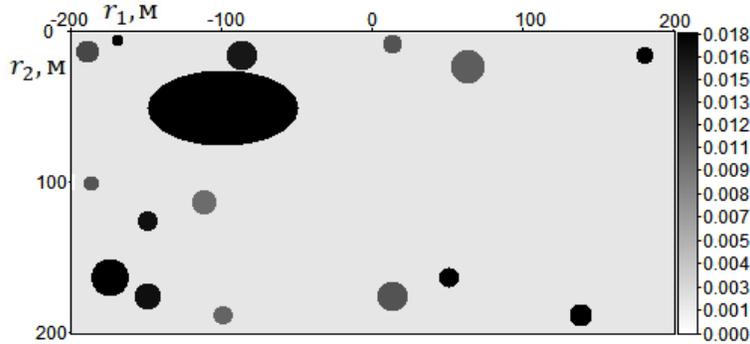


Рис. 1. Карта распределения функции $\sigma(r_1, r_2, 0)$ в области зондирования $400 \times 200 \text{ м}^2$

На рисунках 2 и 3 в графическом виде представлены результаты расчетов функций $\text{Ind}_2, \text{Ind}_5, \text{Ind}_8$ для первого и второго экспериментов, соответственно. Более темные цвета на рисунках соответствуют большим значениям функций $\text{Ind}_2, \text{Ind}_5$ и Ind_8 . Распределение указанных функций позволяют локализовать линии разрыва $\sigma(\mathbf{r})$, если решение уравнения переноса вычисляется в приближении двукратного, пятикратного и восьмикратного рассеяния, соответственно.

Визуальный анализ рисунков показывает, что качество реконструкции также, как и в работах [1, 2] падает с увеличением n и ростом дальности зондирования. Однако, снижение качества томографического изображения происходит не столь значительно, как это было при определении коэффициента ослабления по явной формуле, отвечающей приближению однократного рассеяния [1, 2].

Для количественной оценки качества локализации линий разрыва нужно подобрать подходящую величину. В работе [2] для этой цели была выбрана относительная среднеквадратичная ошибка между точным решением и приближенным решением обратной Задачи 2. Использование такой величины для анализа точности восстановления линий разрыва коэффициента не подходит, поэтому мы взяли следующую характеристику

$$(23) \quad \varepsilon_n = \sqrt{\frac{\sum_i \sum_j (\text{Ind}_1(r_{1,i}, r_{2,j}, 0) - \text{Ind}_n(r_{1,i}, r_{2,j}, 0))^2}{\sum_i \sum_j \text{Ind}_1^2(r_{1,i}, r_{2,j}, 0)}}.$$

Фактически, величина ε_n есть относительная среднеквадратичная погрешность между Ind_1 и Ind_n . Так как однократное рассеяние I_1 вычисляется аналитически, то на расчет функции Ind_1 оказывают влияние только ошибки дискретизации на сетке $(r_{1,i}, r_{2,j}, 0)$. В этом смысле ее изображение можно считать эталонным. В таблицах 1 и 2 приведены значения величин $\varepsilon_2, \dots, \varepsilon_8$, вычисленных по формуле (23).

Сравнивая рисунок 2 с рисунком 3 и таблицу 1 с таблицей 2, убеждаемся, что для достаточно больших n погрешность ε_n растет с увеличением области зондирования. Так как при расчете непрерывной части ряда Неймана с помощью метода Монте-Карло возникают ошибки случайного характера, которые в общем случае нарушают непрерывность функции $I_2 + I_3 + \dots + I_n$, то с увеличением размеров зондируемого региона вклад суммы $I_2 + I_3 + \dots + I_n$ растет по сравнению с вкладом первого слагаемого I_1 . Следовательно, увеличивается погрешность вычисления функции $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$.

ТАБЛИЦА 1. Среднеквадратичное отклонение функции $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ от $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ для области зондирования $400 \times 200 \text{ м}^2$

ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8
0.00989	0.01064	0.01097	0.01106	0.01112	0.01113	0.01113

Как в первом, так и во втором экспериментах погрешность ε_n растет с ростом n и ее рост, как и при решении Задачи 2, в приближении однократного рассеяния замедляется для достаточно больших n [1, 2]. Подчеркнем, что в отличие от результатов работ [1, 2] ухудшение качества восстановления с ростом

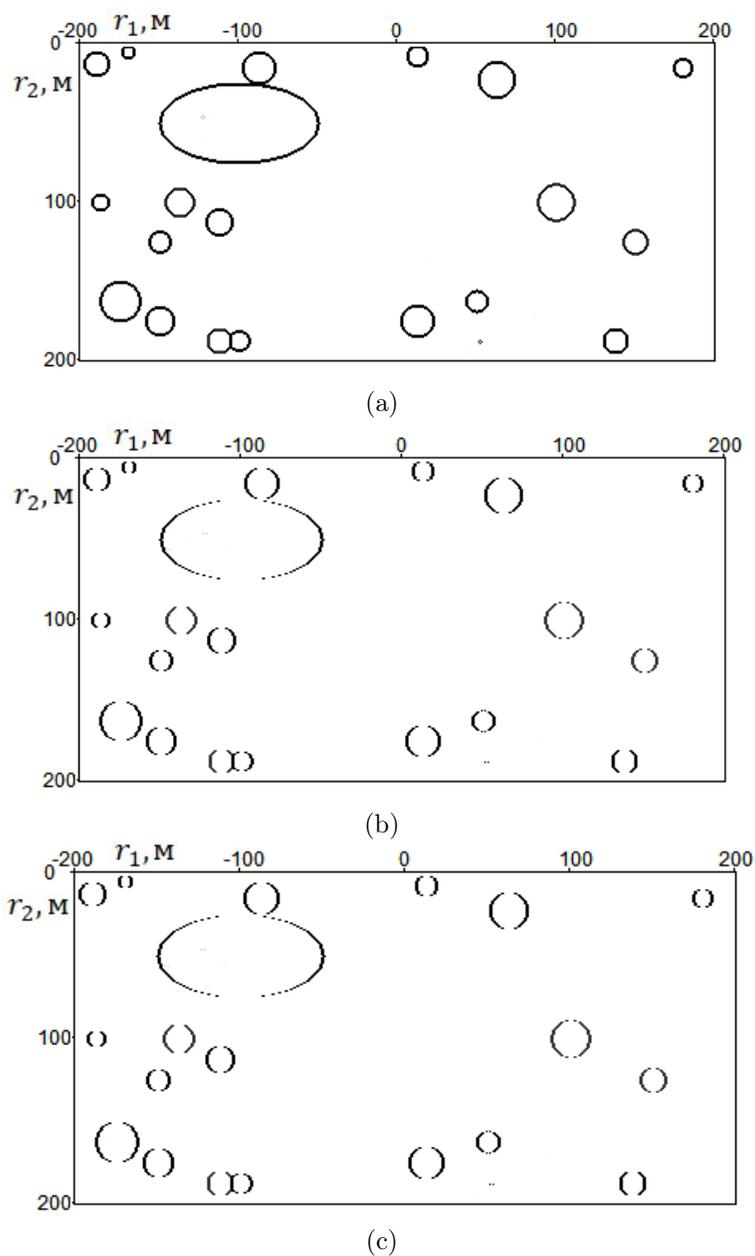


Рис. 2. Результаты восстановления линий разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(\mathbf{r})$ для области зондирования $400 \times 200 \text{ м}^2$: (a)– карта распределения функции $\text{Ind}_2(r_1, r_2, 0)$; (b)– карта распределения функции $\text{Ind}_5(r_1, r_2, 0)$; (c)– карта распределения функции $\text{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$;

учитываемых актов рассеяния n в среде не связано с ограничениями присущими приближению однократного рассеяния, а вызвано неизбежной погрешностью вычисления решения прямой задачи. На практике такая ситуация может

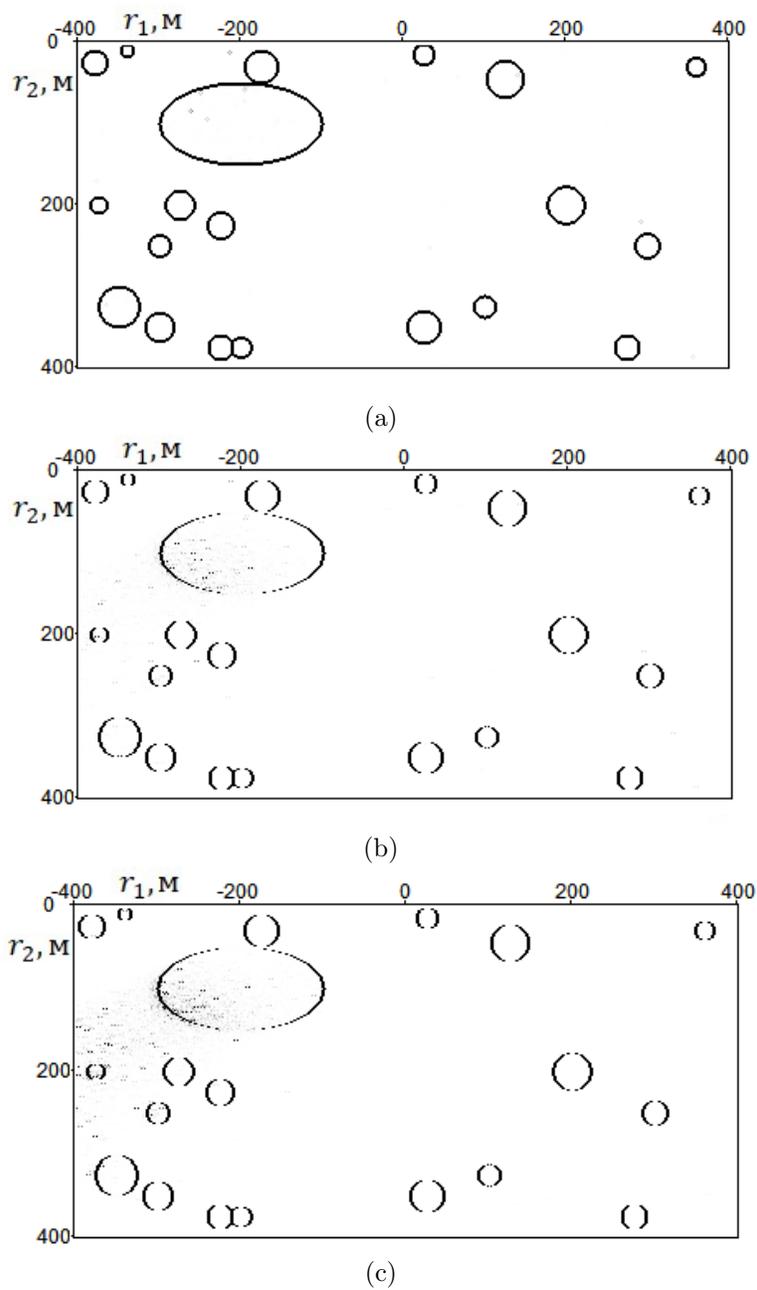


РИС. 3. Результаты восстановления линий разрыва коэффициента рассеяния $\sigma(\mathbf{r})$ для области зондирования $800 \times 400 \text{ м}^2$: (a) – карта распределения функции $\text{Ind}_2(r_1, r_2, 0)$; (b) – карта распределения функции $\text{Ind}_5(r_1, r_2, 0)$; (c) – карта распределения функции $\text{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$;

ТАБЛИЦА 2. Среднеквадратичное отклонение функции $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ от $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ для области зондирования $800 \times 400 \text{ м}^2$

ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8
0.00446	0.00794	0.03194	0.03377	0.03755	0.04697	0.04820

складываться при недостаточной точности измерений для получения исходных данных обратной Задачи 3. Для достижения требуемой точности вычисления функций $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ с ростом n необходимо существенно увеличивать количество траекторий в методе Монте-Карло при расчете решения уравнения переноса излучения I . При тестировании мы намерено не повышали количество испытаний для того, чтобы продемонстрировать недостатки метода реконструкции линий разрыва коэффициента рассеяния, обусловленные его чувствительностью к ошибкам измерений. В каждом из двух первых экспериментов количество траекторий для вычисления решения уравнения переноса в заданной точке выбиралось одно и тоже и равнялось 600.

Чтобы убедиться в том, что дело именно в точности решения уравнения переноса излучения, мы повторили второй численный эксперимент с уточненными исходными данными. Для вычисления решения прямой задачи в заданной точке фазового пространства было разыграно 6000 траекторий при реализации метода Монте-Карло, что в десять раз больше, чем в первых двух экспериментах.

ТАБЛИЦА 3. Среднеквадратичное отклонение функции $\text{Ind}_n(\mathbf{r})$ от $\text{Ind}_1(\mathbf{r})$ для области зондирования $800 \times 400 \text{ м}^2$ с повышенной точностью вычисления функции $I(0, \mathbf{k}, t)$

ε_2	ε_3	ε_4	ε_5	ε_6	ε_7	ε_8
0.00286	0.00667	0.01117	0.01515	0.01851	0.02140	0.02494

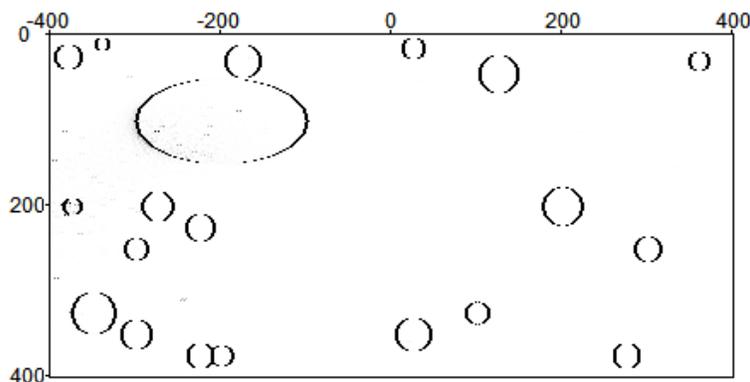


Рис. 4. Карта распределения функции $\text{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$ для области зондирования $800 \times 400 \text{ м}^2$ с повышенной точностью вычисления функции $I(0, \mathbf{k}, t)$.

Среднеквадратичные ошибки ε_n , $n = 1, \dots, 8$ и карта распределения функции $\text{Ind}_8(r_1, r_2, 0)$ для этого эксперимента приведены в таблице 3 и на рисунке 4, соответственно. По сравнению с результатами второго эксперимента, значения ε_n действительно уменьшились, а качество восстановления линий разрыва коэффициента рассеяния повысилось, что свидетельствует о работоспособности метода для зондирования рассеивающих сред на большой дальности при соблюдении условий, обеспечивающих хорошую точность измерений.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе рассмотрена новая постановка обратной задачи для уравнения переноса излучения, заключающаяся в восстановлении поверхностей разрыва коэффициента рассеяния по временно-угловому распределению потока излучения в заданной точке пространства, и предложен численный метод локализации искомых поверхностей, основанный на построении некоторой индикаторной функции. Путем численного моделирования проведен анализ качества восстановления томографических изображений в зависимости от дальности зондирования и различной степени учета кратности рассеяния в среде. Показано, что алгоритм может быть успешно применяться для локализации неоднородностей рассеивающих сред при соблюдении ограничений на точность измерений обратно рассеянного сигнала.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] P. A. Vornovskikh, A. Kim, I. V. Prokhorov, “The applicability of the approximation of single scattering in pulsed sensing of an inhomogeneous medium”, *Computer Research and Modeling*, **12**:5 (2020), 1063–1079.
- [2] P. A. Vornovskikh, I. V. Prokhorov, “Comparative analysis of the error of the single scattering approximation when solving one inverse problem in two-dimensional and three-dimensional cases”, *Dal’nevost. Mat. Zh.*, **21**:2 (2021), 151–165.
- [3] A. Ishimaru, *Wave Propagation and Scattering in Random Media*, Academic Press, New York, 1978.
- [4] V. I. Mendus, G. A. Postnov, “On Angular Intensity Distribution of High-Frequency Ambient Dynamic Noise of the Ocean”, *Akust. Zh.*, **39**:6 (1993), 1107–1116.
- [5] I. B. Andreeva, A. V. Belousov, “Applicability of the single-scattering approximation to problems of acoustic scattering from clusters of sea creatures”, *Acoustical Physics*, **42**:4 (1996), 495–496.
- [6] G. Bal, “Kinetics of scalar wave fields in random media”, *Wave Motion*, **43** (2005), 132–157.
- [7] G. Bal, “Inverse transport theory and applications”, *Inverse Problems*, **25**:5 (2009), 025019.
- [8] I. V. Prokhorov, V. V. Zolotarev, I. B. Agafonov, “The problem of acoustic sounding within fluctuation ocean”, *Dal’nevost. Mat. Zh.*, **11**:1 (2011), 76–87.
- [9] I. V. Prokhorov, A. A. Sushchenko, “Studying the problem of acoustic sounding of the seabed using methods of radiative transfer theory”, *Acoustical Physics*, **61**:3 (2015), 368–375.
- [10] D. S. Anikonov, A. E. Kovtanyuk, I. V. Prokhorov, *Transport Equation and Tomography*, Inverse and Ill-Posed Problems Series, **30**, VSP, Boston-Utrecht, 2002.
- [11] A. I. Prilepko, A. L. Ivankov, “Inverse problems of determining the scattering coefficient, the scattering indicatrix, and the right-hand side of the nonstationary multi-velocity transport equation”, *Diff. Uravn.*, **21**:5 (1985), 870–885.

- [12] V. G. Romanov, “A stability estimate in the problem of determining the dispersion index and relaxation for the transport equation”, *Siberian Math. J.*, **37**:2 (1996), 308–324.
- [13] S. Acosta, “Time reversal for radiative transport with applications to inverse and control problems”, *Inverse Problems*, **29** (2013), 085014.
- [14] C. Wang, T. Zhou, “A hybrid reconstruction approach for absorption coefficient by fluorescence photoacoustic tomography”, *Inverse Problems*, **35** (2018), 025005.
- [15] M. Bellassoued, Y. Boughanja, “An inverse problem for the linear Boltzmann equation with a time-dependent coefficient”, *Inverse Problems*, **35** (2019), 085003.
- [16] W. Dahmen, F. Gruber, O. Mula, “An adaptive nested source term iteration for radiative transfer equations”, *Math. Comp.*, **89** (2020), 1605–1646.
- [17] Q. Li, W. Sun, “Applications of kinetic tools to inverse transport problems”, *Inverse Problems*, **36** (2020), 035011.
- [18] A. Faridani, E. L. Ritman, K. T. Smith, “Local tomography”, *SIAM J. Appl. Math.*, **52**:2 (1992), 459–484.
- [19] A. Faridani, D. V. Finch, E. L. Ritman, K. T. Smith, “Local tomography. II”, *SIAM J. Appl. Math.*, **57**:4 (1997), 1095–1127.
- [20] E. T. Quinto, “Singularities of the X-ray transform and limited data tomography in R^2 and R^3 ”, *SIAM J. Math. Anal.*, **24** (1993), 1215–1225.
- [21] E. T. Ramm, A. I. Katsevich, *The Radon Transform and Local Tomography*, CRC Press, Boca Raton, 1996.
- [22] D. S. Anikonov, V. G. Nazarov, I. V. Prokhorov, “Algorithm of finding a body projection within an absorbing and scattering medium”, *Journal of Inverse and Ill-posed Problems*, **18**:8 (2011), 885–893.
- [23] D. S. Anikonov, V. G. Nazarov, I. V. Prokhorov, “The integro-differential indicator for a problem of single-beam tomography”, *J. Appl. Industr. Math.*, **8**:3 (2014), 301–306.
- [24] V. G. Romanov, “Recovering jumps in X-ray tomography”, *J. Appl. Industr. Math.*, **8**:4 (2014), 582–593.
- [25] E. Yu. Derevtsov, S. V. Maltseva, I. E. Svetov, “Determination of discontinuities of a function in a domain with refraction from its attenuated ray transform”, *J. Appl. Industr. Math.*, **12**:4 (2018), 619–641.
- [26] S. V. Maltseva, I. E. Svetov, A. P. Polyakova, “Reconstruction of a function and its singular support in a cylinder by tomographic data”, *Euras. J. Math. Computer Appl.*, **8**:2 (2020), 86–97.
- [27] G. I. Marchuk, G. A. Mikhailov, M. A. Nazaraliev, *The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.
- [28] G. A. Mikhailov, I. N. Medvedev, *Optimization of Weighted Algorithms of Statistical Solution*, Omega Print, Novosibirsk, 2011 (in Russian).

POLINA ANDREEVNA VORNOVSKIKH
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,
STR. RADIO, 7,
VLADIVOSTOK, 690041, RUSSIA
E-mail address: vornovskikh.polina@gmail.com

IGOR VASILIEVICH PROKHOROV
INSTITUTE OF APPLIED MATHEMATICS FEB RAS,
STR. RADIO, 7,
VLADIVOSTOK, 690041, RUSSIA;
FAR EASTERN FEDERAL UNIVERSITY,
10 AJAX BAY, RUSSKY ISLAND,
VLADIVOSTOK, 690922, RUSSIA
E-mail address: prokhorov@iam.dvo.ru