

Рецензия на работу В. А. Романькова
”Неразрешимость проблемы вхождения в подмоноид для
достаточно большой конечной прямой степени групп
Гейзенберга”

Проблема вхождения в подмоноид группы относится к алгоритмической теории групп и связана с проблемой вхождения в подгруппу и проблемой равенства слов. Эта проблема активно обсуждалась в последнее время для нильпотентных групп. Вообще, в нильпотентных группах почти все классические алгоритмические проблемы (равенства, сопряженности, изоморфизма и т.д.) разрешимы.

Среди нильпотентных групп часто выделяют и изучают группу Гейзенберга $H = H(3, \mathbb{Z})$. Группа Гейзенберга оказалась интересна и с алгоритмической точки зрения. В 2018 году опубликована работа (S.-Ki Ko, R. Niskanen, R. Niskanen, I. Potapov) в которой показано, как решить проблему вхождения единичной матрицы в подполугруппу группы H . В 2019 году (T. Colcombet, J. Ouaknine, P. Semukhin, J. Worrell) доказано, что проблема вхождения в подполугруппу разрешима для группы Гейзенберга и поставлен вопрос о разрешимости проблемы вхождения в подмоноид для достаточно большой конечной прямой степени групп H .

В представленной работе получен отрицательный ответ на данный вопрос. Точнее, автор показывает, что проблему существования целочисленного решения полиномиального диофантова уравнения от нескольких переменных можно интерпретировать в виде проблемы вхождения в подмоноид для достаточно большой конечной прямой степени групп Гейзенберга. Тогда неразрешимость последней следует из неразрешимости первой.

Полученные результаты снабжены полными, технически сложными доказательствами. Стоит отметить, большое число опечаток и неточностей:

1. стр. 148, строка 3 сверху: вместо $(e + d)$ надо $3(e + d)$;
2. стр. 149, строка 3 сверху: без пояснений появляется обозначение $b_{1 \rightarrow 3}$ и после используется обозначение $b_{1 \rightarrow 3}$. Надо выбрать что-то одно и вовремя определить;
3. стр. 149, таблица 2: ошибка во второй строке;
4. стр. 149, лемма 4: ” g_3, g_4 on the left side and g_5, g_6 on the right side of f_2 ” лишнее;
5. стр. 149, строка 4 снизу: пропущена скобка;
6. стр. 150, лемма 5: вместо f_3 должно быть $f_3 = b_5 b_6$;
7. стр. 150, лемма 5: вместо $g_9 = a_8 c_6 c_7^{-1}$ должно быть $g_9 = a_8 c_8 c_7^{-1}$;
8. стр. 150, лемма 5: вместо ”each of the first 10 generators” должно быть ”each of the first 11 generators”;
9. стр. 150, доказательство леммы 5: индекс и степень седьмой компоненты написаны неправильно дважды;
10. стр. 150, строка перед таблицей 4: надо ” $b_{1 \rightarrow 6} b_8 =$ ” убрать;
11. стр. 150, таблица 4: вторая и третья строки ”съехали”, во второй и седьмой строке ошибка;
12. стр. 151, строка 8 сверху: вместо ” $M = M$ ” надо ” M ”;

13. стр. 151, строка 8 снизу: ошибка из замечания 7 прокралась и сюда;
14. стр. 152, перед формулой (16): вместо " $r_j = 4(j - 1)$ " надо " $r_j = 6(j - 1)$ ";
15. стр. 152, перед формулой (17): вместо " $\mathbb{H}(i + j)$ " надо " $\mathbb{H}(e + j)$ ";
16. стр. 152, формула (17): все индексы написаны неправильно;
17. стр. 152, сразу после формулы (17): в выражении $b(2)$ везде индексы неправильно написаны;
18. стр. 153: дважды встречается *submodule* вместо *submonoid*;
19. стр. 153, строка 10 сверху: написан индекс без элемента;
20. стр. 153, строка 13 сверху: если добавлять компоненты как написано, то получится $\zeta_{i(k)} + \zeta_{i(k)} = 0$, а не $\zeta_{i(k)} = \zeta_{i(k)}$;
21. стр. 153, строка 7,8 снизу: опять проблемы с индексами как в замечании 17;

22. стр. 153, строка 3 снизу: пропущена скобка;

Хочу еще рекомендовать автору следующее:

1. Из 21 ссылки 9 ссылок на работы автора. Понимаю, что автор активно работает в этом направлении, но излишнее самоцитирование оставляет неприятный осадок. Например, работы автора [14], [15], [16] цитируются странице 146 просто для обзора среди работ других ученых. Неужели нет одного хорошего обзора по этой теме?

2. На странице 147 употреблено слово *subsubsection*. Не уверен, что это уместно.

3. Видно, что автор старался унифицировать формулировки лемм 2, 3, 4, 5. Получилось не очень хорошо. Разные части лемм появляются и исчезают от леммы к лемме. Например, в лемме 5 как будто уже не важно, что некоторые g_i коммутируют, а в леммах 3 и 4 это было важно.

Таким образом, можно заключить, что данная работа содержит важное продвижение в алгоритмической теории групп. Однако, текст написан с большим числом опечаток и небрежностей. Из-за указанных недостатков в представленном виде работа не может быть рекомендована к публикации. Предлагается автору исправить найденные неточности и еще раз аккуратно вычитать все индексы и детали, после этого работа может быть опубликована.

Рецензент