S©MR

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ
Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru
ISSN 1813-3304

Том 20, № 2, стр. 144–145 (2023) УДК 515.171.16
https://doi.org/10.33048/semi.2023.20.??? MSC 37C25

МИНИМАЛЬНЫЕ ДЕФОРМАЦИИ ПОЛУОДНОРОДНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

И.А. Проскурнин

Представлено И.А. Проскурниным

Abstract: For any semihomogenous vector field on a real plane we construct a deformation with a minimal topologically possible number of singular points.

Keywords: singularities, deformations of singularities, plane vector fields, curve singularities.

1 Введение

В теории динамических систем известна задача об удалении особых точек векторного поля малой деформацией: пусть v—гладкое векторное поле, определенное в области $U \subset \mathbb{R}^n$, имеющее в этой области единственную особую точку индекса 0. Есть ли в малой окрестности v (в некоторой топологии) векторное поле $\tilde{v}$, не имеющее в U особых точек? Эта задача ставилась в статье Пэлиса и Пью [1]. Саймон и Титус ([2]) доказали, что такое приближение возможно в C^1 - топологии в случае $n = 2$. Энкер показал ([3]), что это возможно для некоторого класса аналитических векторных полей на плоскости, так называемых полуоднородных. Коффман и Лёбл показали ([4]), что для алгебраических и

Proskurnin, I.A., Minimal deformations of semihomogenous vector fields.

Статья опубликована при финансовой поддержке Минобрнауки России в рамках реализации программы Московского центра фундаментальной и прикладной математики по соглашению № 075-15-2022-284.

Поступила 30 сентября 2022 г., опубликована 21 июня 2024 г.

аналитических векторных полей между полями v и $\tilde{v}$ при определенных условиях существует непрерывная гомотопия, причем все промежуточные векторные поля тоже не имеют особых точек. Аналогичная задача для градиентных векторных полей ставилась в теории особенностей как задача о деформации аналитической функций без особых точек, и была решена С. М. Гусейн-Заде ([5]) в случае $n = 2$.

Задачу об удалении особой точки естественно расширить до задачи о минимальной деформации: пусть индекс особой точки v равен $k \in \mathbb{Z}$. Можно ли приблизить v векторным полем $\tilde{v}$, имеющим ровно $|k|$ невырожденных особых точек? Такая задача для градиентных векторных полей ставилась В. Васильевым ([6]). В данной работе доказывается, что для любого полуоднородного аналитического векторного поля на плоскости минимальная деформация существует, причем она может быть построена в виде аналитического семейства векторных полей. Говоря точно, доказывается следующая теорема:

Теорема 1. *Пусть v — росток полуоднородного аналитического векторного поля на $(\mathbb{R}^2, 0)$, имеющий изолированную особую точку индекса k. Тогда существует семейство ростков векторных полей $v(\lambda)$, аналитически зависящее от параметра λ, такое, что $v(0) = v$ и при всех достаточно малых ненулевых λ векторное поле $v(\lambda)$ имеет $|k|$ невырожденных особых точек.*

Доказательство будет разделено на четыре части: в первой мы дадим некоторые необходимые определения и факты, во второй мы опишем метод вычисления индекса полуонородного векторного поля на плоскости, основанный на анализе взаимного расположения множеств нулей его компонент, в третьей мы построим минимальную деформацию в виде последовательности малых шевелений векторного поля, а в четвертой мы докажем, что эта последовательность малых шевелений может быть реализована как семейство векторных полей.

2 Определения и необходимые факты

Здесь излагаются некоторые факты и определения из теории особенностей, необходимые для дальнейших доказательств. Подробное изложение этих понятий см, например, в [7], [8]. Мы будем считать, что деформируемой особой точкой векторного поля является $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$.

Определение 1. *Кратностью ростка аналитического векторного поля на плоскости с компонентами f и g называется коразмерность идеала, порожденного комплексификациями f и g в кольце ростков комплексно-аналитических функций от двух переменных $\mu(v) = dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}\{x, y\}/\langle f, g\rangle)$.*

Кратность может быть бесконечна, вообще говоря, но для векторных полей рассматриваемого нами типа (полуоднородных) эта величина конечна. Её конечность равносильна изолированности особой точки в комплексной области. Кратность равна числу невырожденных комплексных особых точек, появляющихся при малой деформации комплексификации данной особенности. Если при деформации кратность ростка векторного поля не меняется, то эта деформация не порождает новых особых точек. Аналогичным образом определяется кратность отображения.

Определение 2. *Векторное поле называется **однородным**, если его компоненты - однородные полиномы (возможно, разной степени).*

Определение 3. *Однородное векторное поле **невырождено**, если его компоненты имеют единственный общий нуль в $\mathbb{C}^2$ (начало координат). В противном случае оно вырождено.*

Определение 4. *Векторное поле F полуоднородно если оно представляется в виде (f_0+f_1, g_0+g_1), где (f_0, g_0) - невырожденное однородное, а ряд Тейлора f_1 (соответственно, ряд Тейлора g_1) содержит исключительно мономы степени выше, чем степень f_0 (соответственно, g_0). (f_0, g_0) называется **главной частью** поля F.*

Кратность полуоднородного векторного поля всегда конечна и равна произведению степеней f_0 и g_0 (что совпадает с кратностью его главной части). Индекс полуоднородного векторного поля равен индексу его главной части (доказательство этих фактов см., например, в [7]).

В доказательстве нам понадобится следующая лемма(её доказательство см., например, в [9]):

Лемма 1. ***(Лемма об отборе кривых)*** *Пусть точка x_0 принадлежит замыканию субаналитического множества $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда существует аналитическая кривая $\gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}^n$ такая, что $\gamma(t) \in X \ \forall t \in (0,1)$, а $\gamma(0) = x_0$.*

Она позволит нам превратить последовательность приближений в параметрическое семейство векторных полей.

Определение 5. *Неприводимые компоненты вещественной аналитической кривой мы будем называть **ветвями** этой кривой. Если мы рассматриваем росток аналитической кривой в точке x_0, то эта точка будет делить каждую ветвь кривой на две части. Эти части мы будем называть **полуветвями** кривой.*

Определение 6. *Для любой неприводимой аналитической кривой γ существует единственная (с точностью до умножения на обратимые функции) аналитическая функция g_γ такая, что если γ — ветвь кривой $\{f = 0\}$, то f делится на g_γ. Если g_γ входит в разложение f на неприводимые множители с кратностью 1, то ветвь γ называется **некратной** для f (или для кривой $\{f = 0\}$). В противном случае она **кратная**.*

3 Вычисление индекса полуоднородного векторного поля

Определение 7. *Будем говорить, что у двух ростков функций* g_1 *и* g_2 *правильное чередование, если множества* $\{g_1 = 0\} \cap \mathbb{R}^2$ *и* $\{g_2 = 0\} \cap \mathbb{R}^2$ *имеют одинаковое число неприводимых компонент, и каждая компонента связности дополнения к* $\{g_1 = 0\} \cap \mathbb{R}^2$ *содержит ровно одну полуветвь множества* $\{g_2 = 0\} \cap \mathbb{R}^2$

Например, $y^3 - 5x^4y$ и $3xy^2 - x^5$ имеют правильное чередование.

Я кратко изложу теорию индекса полуоднородных векторных полей, описанную в книге М.А. Красносельского и других "Векторные поля на плоскости".

Индекс невырожденного полуоднородного векторного поля равен индексу его главной части, так что будем считать поле F просто однородным. Компоненты поля F (обозначим их f и g) могут быть разложены на неприводимые над полем вещественных чисел множители, т.е. на линейные и квадратичные однородные многочлены.

Заметим, что квадратичные множители при подсчёте индекса можно не учитывать: если $h_1(x, y), h_2(x, y)$ — положительные вне начала координат функции (какими являются неприводимые многочлены второй степени), то индексы векторных полей (f, g) и $(h_1 f, h_2 g)$ совпадают. Так что будем считать, что квадратичных множителей у f и g нет.

Далее, рассмотрим изменение положения вектора (f, g) при обходе вокруг начала координат (в плоскости-прообразе). Для того, чтобы это вектор сделал полный оборот, мы должны пересечь не менее двух прямых множества $\{f = 0\}$ и не менее двух прямых множества $\{g = 0\}$. Если при этом мы пересекаем подряд две прямые множества $\{f = 0\}$, между которыми нет прямых множества $\{g = 0\}$, то после пересечения этих прямых вектор возвращается в тот же координатный квадрант, в котором он был до этого — знак f поменялся дважды, а знак g не менялся. Поэтому пара соседних прямых $\{f = 0\}$, между которыми нет прямых $\{g = 0\}$, не вносит никакого вклада в индекс отображения (f, g). То же самое верно, разумеется, и для пар соседних прямых $\{g = 0\}$, между которыми нет прямых $\{f = 0\}$.

Таким образом, индекс однородного отображения с невырожденными компонентами можно вычислить по следующему рецепту:

(1) Исключаем из разложения обоих компонент отображения все квадратичные множители.

(2) Исключаем из разложения компоненты f пары линейных множителей, отвечающих за пары соседних прямых $\{f=0\}$, между которыми нет прямых $\{g=0\}$.
(3) Исключаем из разложения компоненты g пары линейных множителей, отвечающих за пары соседних прямых $\{g=0\}$, между которыми нет прямых $\{f=0\}$.
(4) Повторяем шаги 2 и 3, пока таких пар прямых не останется.
(5) После этого мы либо придём к отображению, одна из компонент которого — константа (и тогда индекс равен нулю), либо к однородному отображению (f,g), у которого обе компоненты одной степени и имеют правильное чередование. Во втором случае, очевидно, индекс с точностью до знака совпадает со степенью компонент.

4 Минимальные деформации

Применим теперь геометрический метод вычисления индекса, описанный в прошлой части главы, к построению деформаций поля F с заданным числом нулей. Деформация векторного поля индуцирует деформацию кривых уровня его компонент. Нули продеформированного векторного поля — точки пересечения продеформированных кривых уровня его компонент. Если мы хотим, чтобы число нулей равнялось (с точностью до знака) индексу векторного поля, то необходимо сконструировать деформацию кривых уровня, для которой деформации ветвей множества уровня, не вносящих вклад в индекс, не пересекались бы. Т.е. , мы хотим построить деформацию, в число нулей которой не будут вносить никакого вклада кривые $\{f=0\}$, между которыми нет кривых $\{g=0\}$, и кривые $\{g=0\}$, между которыми нет кривых $\{f=0\}$. Будем называть такие кривые (т.е. те, от которых избавлялись на шагах 2, 3 и 4 вычисления индекса) **лишними**.

Заметим для начала, что малым шевелением можно избавиться от положительных множителей компонент векторного поля: если $f=f_1u$, где $u(x,y)>0$ при $x^2+y^2>0$, то деформация $f_\lambda=f_1(u+\lambda), \lambda>0$, не рождает новых нулей и не меняет индекса отображения.

Также без ограничения общности можно считать, что главная часть векторного поля образована однородными полиномами без кратных корней. В противном случае их можно немного пошевелить, так чтобы все корни стали различны. Поскольку кратность отображения зависит только от степени главной части, то при таком шевелении она не изменится.

Пусть $h(x,y)$ — функция, задающая пару лишних ветвей множества $\{f=0\}$, между которыми нет ветвей $\{g=0\}$, $f=hf_1$. Если (без ограничения общности) точек множества $\{g=0\}$ нет в множестве $h>0$, то тогда деформация $F_\lambda = (f_1(h-\lambda), g), \lambda > 0$ не порождает новых нулей. Таким образом можно убирать из начала координат лишние ветви множества нулей компонент отображения. При этом векторное поле F_λ, полученное после деформации, останется полуоднородным.

Эту процедуру необходимо, конечно, повторить несколько раз: после избавления от ветвей, между которыми нет нулей другой функции, может оказаться, что теперь между какими-то из оставшихся ветвей нет нулей, и т.д. Разумеется, сказанное выше описывает лишь общую идею конструкции необходимой нам деформации. Нужно доказать, что можно выбрать параметры деформации так, чтобы сдвигаемые кривые не пересекались, и такой выбор может быть сделан в рамках однопараметрической деформации. Это будет сделано в следующих двух леммах.

Рассмотрим сначала случай однородного векторного поля.

Лемма 2. *Для любого однородного векторного поля F на плоскости существует однопараметрическая деформация $\Theta(x,y,\lambda), \Theta(x,y,0) = F(x,y)$ такая, что*

1)При каждом λ росток векторного поля $\Theta(x,y,\lambda)$ в начале координат полуоднородный.

2)При каждом λ множества нулей ростков компонент векторного поля $\Theta(x,y,\lambda)$ не имеют лишних ветвей.

Доказательство. Пусть пары лишних прямых задаются квадратичными формами $Q_1, ..., Q_k$, причём формы указаны в том порядке, в котором мы хотим от них избавиться: Q_1 задаёт две соседние ветви, между которыми изначально нет нулей другой компоненты, между ветвями Q_2 либо нет нулей другой компоненты, либо их не будет после того, как мы уберём нули Q_1 и т.д. Предположим также без ограничения общности, что нули других компонент отсутствуют в множествах $Q_i > 0$. Кривая $\{Q_1 = 1\}$ не пересекается с кривой $\{fg = 0\}$, поэтому существует такое $1 > C_1 > 0$, что Q_2 не принимает на $\{Q_1 = 1\}$ значений, равных или меньших C_1. По однородности тогда Q_2 не принимает на $\{Q_1 = \lambda\}$ значений, равных или меньших $C_1\lambda$. Тогда при всех значениях $\lambda > 0$ кривые $\{Q_1 = \lambda\}$ и $\{Q_2 = C_1\lambda\}$ не пересекутся. Аналогично, существует $1 > C_2 > 0$ такое, что Q_3 не принимает на$\{Q_1 = 1\} \cup \{Q_2 = 1\}$ значений, меньших либо равных C_2. Тогда кривые $\{Q_1 = \lambda\}$, $\{Q_2 = C_1\lambda\}$ и $\{Q_3 = C_1C_2\lambda\}$ попарно не пересекаются: то, что не пересекаются первые две кривые, уже доказано, Q_3 принимает на $\{Q_1 = \lambda\}$ значения, строго большие, чем $C_2\lambda > C_1C_2\lambda$, а на кривой $\{Q_2 = C_1\lambda\}$ Q_3 принимает значения, строго большие, чем $C_1C_2\lambda$. Этот процесс можно итерировать: существует такое $1 > C_m > 0$, что Q_{m+1} не принимает на $\bigcup\limits_{i=1}^{m}\{Q_i = 1\},\ i \leq m$ значений, равных или меньших C_m.

Тогда при всех $\lambda > 0$ кривые $\{Q_1 = \lambda\}$, $\{Q_2 = C_1\lambda\}$, $\{Q_3 = C_1C_2\lambda\}$,...., $\{Q_{m+1} = C_1C_2...C_m\lambda\}$ попарно не пересекаются.

□

Теперь рассмотрим случай полуоднородного поля. Пары лишних кривых будут задаваться полуоднородными функциями $\tilde{Q}_1, ..., \tilde{Q}_k$, причём главной частью $\tilde{Q}_i$ будет квадратичная форма Q_i. По-прежнему мы будем считать, что $\tilde{Q}_i$ указаны в том порядке, в котором мы их будем возмущать, и что нули других компонент отсутствуют в множествах $\tilde{Q}_i > 0$. Рассмотрим кривые $\{\tilde{Q}_1 = \lambda\}$, $\{\tilde{Q}_2 = C_1\lambda\}$, $\{\tilde{Q}_3 = C_1C_2\lambda\}$,...., $\{\tilde{Q}_{m+1} = C_1C_2...C_m\lambda\}$

($C_1, ..., C_{m+1}$ определены выше для квадратичных форм $Q_1, ..., Q_k$) .

Лемма 3. *При* $\lambda > 0$ $\{\tilde{Q}_1 = \lambda\}$, $\{\tilde{Q}_2 = C_1\lambda\}$, $\{\tilde{Q}_3 = C_1C_2\lambda\}$,...., $\{\tilde{Q}_{m+1} = C_1C_2...C_m\lambda\}$ *попарно не пересекаются в достаточно малой окрестности нуля.*

Доказательство. Рассмотрим, например, кривые $\{\tilde{Q}_1 = \lambda\}$ и $\{\tilde{Q}_2 = C_1\lambda\}$. Решения системы уравнений $\begin{cases}\tilde{Q}_1 = \lambda\\ \tilde{Q}_2 = C_1\lambda\end{cases}$ являются также решениями системы $\begin{cases}\tilde{Q}_2 = C_1\tilde{Q}_1\\ \tilde{Q}_1 > 0\end{cases}$. Если предположить, что решения этой второй системы присутствуют в любой окрестности нуля, то тогда множество этих решений содержит параметризованную аналитическую кривую, входящую в начало координат. Пусть это кривая $\varphi(t), \varphi(0) = (0, 0)$, а $\varphi_0(t)$ — компонента наименьшей степени в ряде Тейлора $\varphi(t)$. Заметим, что не может быть так, что $Q_2(\varphi_0(t)) = C_1Q_1(\varphi_0(t)) = 0$ при всех t, поскольку у квадратичных форм Q_1 и Q_2 нет общих нулей вне начала координат. Пусть без ограничения общности многочлен $Q_2(\varphi_0(t))$ ненулевой. Но тогда обязан быть ненулевым и многочлен $C_1Q_1(\varphi_0(t))$: степенные ряды $\tilde{Q}_2(\varphi(t))$ и $C_1\tilde{Q}_1(\varphi(t))$ совпадают, а члены наименьшей(одинаковой в обоих рядах) степени в этих рядах порождаются полиномами $Q_2(\varphi_0(t))$ и $C_1Q_1(\varphi_0(t))$. Значит, $\begin{cases}Q_2(\varphi_0(t) = C_1Q_1(\varphi_0(t))\\ Q_2(\varphi_0(t) > 0\end{cases}$. Но тогда бы при подходящих $\lambda > 0$ имеет решение система уравнений $\begin{cases}Q_1 = \lambda\\ Q_2 = C_1\lambda\end{cases}$, чего, как уже доказано, быть не может. Доказательство для любой другой пары кривых аналогично. □

После избавления от всех лишних ветвей, мы придём, как и в случае индекса, либо к векторному полю, постоянная часть которого — ненулевая (т.е. к полю, вовсе не имеющему никакого нуля), либо к полю, однородные части которого имеют правильное чередование. В первом случае доказательство закончено: тогда у исходного векторного поля был нулевой индекс, и после деформации мы получили векторное поле без нулей. Осталось рассмотреть второй случай. Докажем несколько важных в этом случае лемм:

Лемма 4. *Пусть $F : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ - конечнократный росток отображения плоскости с компонентами (f, g). Рассмотрим деформацию $F_\lambda = (f + \lambda, g)$. Ее нули лежат на кривой $\{g = 0\}$. Тогда при достаточно малых λ те из нулей, которые лежат на некратных ветвях этой кривой - невырожденные.*

Доказательство. Пусть $\varphi : (\mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ — параметризация какой-нибудь некратной ветви множества $\{g = 0\}$. Функция одной переменной $f(\varphi(t))$ не может иметь критических точек в достаточно малой проколотой окрестности нуля, т.к. иначе f было бы постоянно (и равно нулю) на некоторой ветви $\{g = 0\}$, а тогда отображение F не было бы конечнократным. Пусть (v_1, v_2) — касательный вектор к $\{g = 0\}$. Условие отсутствия у $f(\varphi(t))$ критических точек означает, что в некоторой проколотой окрестности нуля в $\mathbb{R}^2$ на множестве $\{g = 0\}$ величина $\frac{\partial f}{\partial x} v_1 + \frac{\partial f}{\partial y} v_2$ не обращается в ноль. Вектор (v_1, v_2) удовлетворяет равенству $\frac{\partial g}{\partial x} v_1 + \frac{\partial g}{\partial y} v_2 = 0$, причем вектор $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y})$ (в силу некратности выбранной нами ветви) не обращается в некоторой проколотой окрестности нуля. Значит, векторы $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y})$ и $(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y})$ в некоторой проколотой окрестности нуля на выбранной ветви линейно независимы. Матрица, составленная из компонент этих векторов — якобиан отображения F (равный якобиану F_λ), поэтому все нули F_λ на некратной кривой невырожденные.

□

В частности, если $\{g = 0\}$ - приведенная кривая (или, что то же самое, функция g имеет в нуле конечное число Милнора), то деформация F_λ будет иметь только невырожденные нули.

Лемма 5. *Пусть f, g - две невырожденные полуоднородные функции одинаковой степени r с вещественными ветвями, и однородные части f, g имеют правильное чередование. Тогда якобиан отображения (f, g) в некоторой малой вещественной проколотой окрестности начала координат не обращается в нуль.*

Доказательство. Заметим, что f и g можно считать просто однородными: якобиан полуоднородного отображения с точностью до членов более высокого порядка будет совпадать с якобианом его однородной части, а значит, знак в достаточно малой окрестности нуля определяется именно однородной частью. Нам достаточно доказать, что достаточно малые значения (a, b) являются некритическими для отображения (f, g).

Если $a = 0$ или $b = 0$, то значение некритическое по лемме 3. Если они оба не равны нулю, то система уравнений $f = a, g = b, ab \neq 0$ равносильна системе $bf - ag = 0, g = b$. Отображение $(bf - ag, g)$ имеет только изолированные нули, если изолированные нули имеет отображение (f, g), поэтому, если мы сможем доказать, что кривая $\{bf - ag = 0\}$ — приведённая, то некритичность значения (a, b) для отображения (f, g) будет, опять же, следовать из леммы 3. $bf - ag$ - однородная функция степени r, поэтому приведённость кривой равносильна тому, что у неё r ветвей. Пусть без ограничения общности a и b одного знака. Рассмотрим какую-нибудь связную компоненту дополнения к $\{fg = 0\}$, на которой $fg > 0$. На этой компоненте отношение $\frac{f}{g}$ является непрерывной функцией, меняющейся от 0 до $+\infty$, а, значит, принимает и значение $\frac{a}{b}$. Поэтому в этой компоненте лежит как минимум одна полуветвь множества нулей $bf - ag$. В силу правильного чередования f и g связных компонент с $fg > 0$ ровно $2r$ штук, а значит у $\{bf - ag = 0\}$ r ветвей.

□

Осталось закончить доказательство теоремы. После исключения лишних ветвей $\{f = 0\}$ и $\{g = 0\}$, мы придём к полю $\Theta_\lambda = (f_\lambda, g_\lambda)$, индекс которого равен индексу поля F. Его компоненты являются полуоднородными функциями, поскольку мы без ограничения общности предположили, что компоненты исходного поля F были полуоднородны, а главная часть поля Θ_λ отличается от главной части поля F только исключением некоторых множителей и, возможно, домножением на некоторую степень λ. По лемме 4 якобиан Θ_λ в некоторой проколотой окрестности начала координат имеет постоянный знак, равный знаку индекса F. Тогда при достаточно малых (зависящих от λ) α, β отображение $\tilde{F} = (f_\lambda - \alpha, g_\lambda - \beta)$ автоматически имеет только невырожденные нули (по лемме 3), число которых равно по модулю индексу F_λ, т.е. и индексу F.

5 Построение деформации в виде аналитического семейства

В предыдущем разделе деформация была построена в виде последовательности малых шевелений векторного поля, а не в виде аналитического семейства векторных полей. Здесь мы докажем, что эта последовательность шевелений может быть реализована в виде аналитической гомотопии. Мы рассматривали четыре типа шевелений:

(1) Шевеления f_0 и g_0, делающие их невырожденными.
(2) Шевеления f_0 и g_0, удаляющие квадратичные множители в разложении f_0 и g_0 на неприводимые многочлены.
(3) Шевеление, удаляющее все лишние компоненты f_0 и g_0.
(4) Окончательное шевеление, делающее все особые точки векторного поля невырожденными.

Все эти шевеления можно очевидным образом включить в четырёхпараметрическую

деформацию $v(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4), v(0,0,0,0) = v$, где i-тый параметр осуществляет деформацию i-того типа. Тогда результаты предыдущего раздела означают, что в четырёхмерном пространстве параметров существует последовательность значений параметров, сходящаяся к $(0,0,0,0)$, при которых деформация $v(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ имеет $|k|$ невырожденных особых точек. С другой стороны, множество значений параметров, при которых деформация $v(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ имеет $|k|$ невырожденных особых точек является субаналитическим, а, значит, по лемме об отборе кривых оно содержит аналитическую кривую, проходящую через начало координат. Эта аналитическая кривая и задаёт искомое семейство векторных полей.

References

[1] J. Palis, C.C. Pugh. *Fifty problems in dynamical systems*, In: Dynamical Systems—Warwick 1974. Lecture Notes in Mathematics, vol 468. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975.

[2] C.P. Simon, C.J. Titus. *Removing index-zero singularities with C1-small perturbations*, In: Dynamical Systems—Warwick 1974. Lecture Notes in Mathematics, vol 468. Springer, Berlin, Heidelberg, 1975.

[3] D. Anker. *On removing isolated zeroes of vector felds by perturbation*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, **8** (1984), 1095-1112.

[4] A. Coffman, J. Lebl. *Removing isolated zeroes by homotopy*, Topol. Methods Nonlinear Anal.,**54**:1 (2019), 275-296.

[5] S.M. Gusein-Zade. *On the existence of deformations without critical points (the Teissier problem for functions of two variables)*, Funct. Anal. Its Appl., **31**(1997), 58-60.

[6] V.A. Vassiliev. *A few problems on monodromy and discriminants*, Arnold Math J., **1**(2015), 201-209.

[7] V.A. Vassiliev. V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade, A. N. Varchenko. *Singularities of diferentiable maps*, Birkhauser, Boston-Basel-Berlin, 1985.

[8] J. Milnor. *Singular points of Complex Hypersurfaces*, Annals of Mathematics Studies,Princeton University Press, Princeton, 1969.

[9] E. Bierstone, P.D. Milman. *Semianalytic and subanalytic sets*, Publications Mathematiques de l'IHES, **67** (1988), 5-42.

[10] M A Krasnosel'skii. *Plane vector felds*, Lliffe, London, 1966.

Ivan Andreevich Proskurnin
Moscow State University,
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics,
119991, Moscow, Russia
Email address: dazai131@yahoo.com