S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.946
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35L80 35L25

ПРОСТРАНСТВЕННО–НЕЛОКАЛЬНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ОБОБЩЕННЫМ УСЛОВИЕМ САМАРСКОГО–ИОНКИНА ДЛЯ КВАЗИПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

А.И. КОЖАНОВ, А.М. АБДРАХМАНОВ

Abstract. The work is devoted to the study of the solvability of boundary value problems for quasi-parabolic equations

$$(-1)^p D_t^{2p+1} u - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)u_x\right) + c(x,t)u = f(x,t)$$

$$((x,t) \in (0,1) \times (0,T), \quad a(x) > 0, \quad D_t^k = \frac{\partial^k}{\partial t^k}, \quad p > 0 - \textit{integer})$$

with boundary conditions of one of the types

$$u(0,t) - \beta u(1,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T),$$

or

$$u_x(0,t) - \beta u_x(1,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T).$$

The problems under study can be treated as nonlocal problems with the generalized Samarskii–Ionkin condition in terms of spatial variable, for them we prove existence and uniqueness theorems for regular solutions—namely, solutions that have all generalized in the sense of S.L. Sobolev derivatives included in the corresponding equation.

Keywords: quasi-parabolic equations, non-local boundary value problems, generalized Samarskii–Ionkin condition, regular solutions, existence, uniqueness.

Kozhanov, A.I., Abdrahmanov, A.M. Spatially-Nonlocal Boundary Value Problems with the generalized Samarskii–Ionkin condition for quasi-parabolic equations.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение 075-15-2022-282 с Министерством науки и высшего образования Российской федерации.

Поступила 2022 г., опубликована 2022 г.

1. Введение

В работе изучается разрешимость нелокальных по пространственной переменной краевых задач для квазипараболических уравнений нечетного по временной (выделенной) переменной порядка.

Нелокальными краевыми задачами для дифференциальных уравнений называют такие задачи, в которых вместо обычных точечных (т.е. локальных) условий задаются условия, связывающие граничные значения решения или (и) его производных со значениями решения или (и) его производных в точках иных внутренних или же граничных многообразий.

Отдельным классом нелокальных задач можно назвать задачи с интегральными условиями — задачи, в которых граничные значения решения или (и) его производных связываются со значениями некоторого интеграла от решения по тем или иным внутренним многобразиям. Исследования разрешимости подобных задач для близких к изучаемым в настоящей работе уравнений началось, по–видимому. с работ J.R. Cannon [1] и Л.И. Камынин [2], опубликованных в 1963 и 1964 годах соответственно. Дальнейшие исследования задач с интегральными условиями в целом весьма многочисленны, но среди них можно выделить работы Н.И. Ионкина [3] и Н.И. Юрчука [4], опубликованных в 1977 и 1986 годах соответственно. В работе [3] изучалась задача нахождения решения уравнения теплопроводности в прямоугольнике $(0,1)\times(0,T)$ переменных (x,t) по заданному начальному условию, заданному граничному условию $u(0,t)=\nu(t)$, а также по интегральному условию

$$\int\limits_0^1 u(x,t)\,dx=\mu(t). \tag{И}$$

Для данной задачи Н.И. Ионкиным методом, основанным на использовании некоторого специального биортогонального семейства функций, было доказано существование классических решений. В дальнейшем этот метод успешно применялся в ряде других исследований — см. работы [5–8].

В работе Н.И. Юрчука иследовалась задача с условием (И), но для параболических уравнений с переменными коэффициентами, и был предложен новый метод доказательства ее разрешимости. Этот метод позволил установить существование решений задачи Ионкина для более общих, чем в [3], уравнений, но при этом полученное решение было элементом некоторого весового соболевского пространства. Как и работа Н.И. Ионкина, работа Н.И. Юрчука после ее опубликования приобрела множество последователей.

Отметим также следующее. В 1980 году А.А. Самарский [9] предложил для одномерного случая постановку нелокальной по пространственной переменной задачи: *найти решение $u(x,t)$ параболического уравнения по заданному начальному условию и условиям*

$$\alpha_1u(0,t)+\alpha_2u(1,t)+\alpha_3u_x(0,t)+\alpha_4u_x(1,t)=0,$$

$$\beta_1u(0,t)+\beta_2u(1,t)+\beta_3u_x(0,t)+\beta_4u_x(1,t)=0 \tag{С}$$

$(x\in(0,1)$, $t\in(0,T)$, векторы $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$ и $(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$ линейно независимы). Задача А.А. Самарского включает в себя обычные первую, вторую и третью начально–краевые задачи, а также смешанную задачу; если же учесть,

что задача Н.И. Ионкина допускает замену интегрального условия на условие $u_x(1,t) - u_x(0,t) = \varphi(t)$, то и задача с условием (И) включается в задачу А.А. Самарского. Исследование разрешимости задачи А.А. Самарского в общей постановке проводилось в работах Н. Лажетича [10] и А.И. Кожанова [11], но при этом условия этих работ были таковы, что собственно задача Н.И. Ионкина исключалась.

Предметом исследований в настоящей работе будут пространственно–нелокальные краевые задачи для квазипараболических уравнений нечетного по временной (выделенной) переменной порядка с условиями, представляющими собой частный случай общего условия (С) А.А. Самарского, но при этом включающими в себя задачу Н.И. Ионкина с условием (И) в дифференциальной форме. Целью исследований будет доказательство существования и единственности регулярных решений — именно решений, имеющих все обобщенные по С.Л. Соболеву производные, входящие в соответствующее уравнение.

Уточним, что ранее пространственно–нелокальные задачи с интегральными условиями для квазипараболических уравнений изучались в работах [12], [13], но, как и в случае уравнения теплопроводности, задача с условием (И) при этом исключалась.

Все построения и рассуждения в работе будут основаны на пространствах Лебега L_p и Соболева W_p^l. Необходимые определения и описание свойств функций из этих пространств можно найти в монографиях [[14]–[16]].

И последнее. В работе будут рассматриваться некоторые модельные ситуации. Возможные обобщения и усиления полученных результатов будут приведены в конце статьи.

2. Постановка задач

Пусть Q есть прямоугольник $\Omega \times (0,T)$, $\Omega = (0,1)$, $0 < T < +\infty$, переменных (x,t). Далее, пусть $a(x)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$ есть заданные функции, определенные при $x \in [0,1]$, $t \in [0,T]$, β есть фиксированное действительное число, p есть фиксированное натуральное число, D_t^k есть производная $\frac{\partial^k}{\partial t^k}$ $(D^1 = D)$, L есть дифференциальный оператор, действие которого на заданной функции $v(x,t)$, определяется равенством

$$Lv = (-1)^p D_t^{2p+1} v - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x) v_x\right) + c(x,t)v.$$

Нелокальная задача I: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$Lu = f(x,t) \tag{1}$$

и такую, что для нее выполняются условия

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad k = 0,\dots,p, \quad x \in \Omega, \tag{2}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad k = 0,\dots,p-1, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

$$u(0,t) - \beta u(1,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{4}$$

Нелокальная задача II: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (3), а также условие*

$$u_x(0,t) - \beta u_x(1,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{5}$$

Нелокальная задача III: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2) и (4), а также условие*

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad k = p+1, \dots, 2p, \quad x \in \Omega, \tag{6}$$

Нелокальная задача IV: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (1) и такую, что для нее выполняются условия (2), (5) и (6).*

Заметим, что именно условие (5) нелокальных задач II и IV в случае $\beta = 1$ дает условие (И) задачи Н.И. Ионкина. Задачи I и III имеют и самостоятельное значение; с другой же стороны, имея существование решений этих задач, нетрудно будет показать, что и задачи II и IV имеют решение .

3. Разрешимость нелокальных задач I и III

Важную роль в дальнейших выкладках сыграет неравенство

$$\varphi^2(1) \le \delta^2 \int\limits_\Omega x\varphi'^2(x)\,dx + \left(2 + \frac{1}{\delta^2}\right) \int\limits_\Omega x\varphi^2(x)\,dx, \tag{7}$$

в котором $\varphi(x)$ есть произвольная функция из пространства $W_2^1(\Omega)$, δ есть произвольное положительное число. В справедливости этого неравенства нетрудно убедиться, если в тождестве

$$\varphi^2(1) = 2\int\limits_\Omega x\varphi^2(x)\,dx + 2\int\limits_\Omega x^2\varphi(x)\varphi'(x)\,dx$$

применить неравенство Юнга ко второму слагаемому правой части.

Положим $\beta_1 = \beta^2 a(0) - a(1)$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия*

$$a(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad a(x) \ge a_0 > 0, \quad a'(x) \le 0;$$

$$c(x,t) \in C^{2p+1}(\overline{Q}), \quad c(x,t) \ge c_0 > 0, \quad c_{xx}(x,t) \le 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{Q};$$

$$2c(x,t) - a''(x) \ge 0 \quad \text{при} \quad (x,t) \in \overline{Q};$$

а также одно из условий

а) $\beta^2 \le \frac{a(1)}{a(0)}$,

б) $\beta^2 > \frac{a(1)}{a(0)}$, $\beta_1^2 + 4a_0\beta_1 < 4a_0c_0$.

Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $D_t^k f(x,t) \in L_2(Q)$, $k = 0, \dots, 2p+1$, $D_t^k f(x,t) = 0$ при $t = 0$, $x \in \Omega$, $k = 0, \dots, p$, $D_t^k f(x,t) = 0$ при $t = T$, $x \in \Omega$, $k = 0, \dots, p-1$, нелокальная задача I имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,2p+1}(Q)$, и в этом пространстве решение единственно.

Доказательство. Используемая техника будет основана на методе регуляризации, методе продолжения по параметру, а также априорных оценках.

Пусть выполняется условие а). Для положительных чисел ε и μ определим дифференциальный оператор $L_\varepsilon v$:

$$L_\varepsilon v = Lv + \varepsilon D_t^{4p+2}\left[\frac{\partial}{\partial x}(av_x) - \mu v\right].$$

Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$L_\varepsilon u = f(x,t) \tag{8}$$

и такую, что для нее выполняются условия (2)–(4), а также условия

$$D_t^k u(x,t)|_{t=0} = 0, \quad k = 2p+1, \dots, 3p, \quad x \in \Omega, \tag{9}$$

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad k = 2p+1, \dots, 3p+1, \quad x \in \Omega. \tag{10}$$

Определим пространство V как множество функций

$$\{v(x,t): \ v(x,t) \in W_2^{2,4p+2}(Q), \quad D_t^{4p+2} v_x(x,t) \in L_2(Q),$$
$$D_t^{4p+2} v_{xx}(x,t) \in L_2(Q)\}$$

с нормой

$$\|v\|_V = \left(\|v\|^2_{W_2^{2,4p+2}(Q)} + \|D_t^{4p+2} v_x\|^2_{L_2(Q)} + \|D_t^{4p+2} v_{xx}\|^2_{L_2(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Очевидно, что это пространство будет банаховым.

Покажем что при фиксированном ε и при принадлежности функции $f(x,t)$ пространству $L_2(Q)$ краевая задача (8), (2), (3), (9), (10) будет иметь решение, принадлежащее пространству V. Воспользуемся методом продолжения по параметру.

Для чисел λ из отрезка [0,1] рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (8) и такую, что для нее выполняются условия (2), (3), (9) и (10), а также условие*

$$u(0,t) - \lambda\beta u(1,t) = 0, \quad u_x(1,t) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{11}$$

Согласно теореме о методе продолжения по параметру [[17], гл. III, § 14], эта задача будет разрешима в пространстве V, если 1) *задача (8), (2), (3), (9)–(11) разрешима в пространстве V при $\lambda = 0$;* 2) *для всевозможных решений $u(x,t)$ задачи (8), (2), (3), (9)–(11) при выполнении условий теоремы имеет место априорная оценка*

$$\|u\|_V \le R_0 \|f\|_{L_2(Q)} \tag{12}$$

с постоянной R_0, определяющейся лишь функциями $a(x)$, $c(x,t)$, а также числами β и ε.

При $\lambda = 0$ и при фиксированном ε задача (8), (2), (3), (9)–(11) представляет собой смешанную по пространственной переменной задачу для уравнения составного типа

$$\varepsilon D_t^{4p+2}(Au - \mu u) = F,$$

в котором через A обозначен оператор

$$Av = \frac{\partial}{\partial x}(a(x)v_x),$$

и через F — подчиненные младшие члены. Поскольку старшая (левая) часть этого уравнения распадается на множители, то разрешимость данной задачи в пространстве V очевидна.

Покажем, что при выполнении условий теоремы для решений $u(x,t)$ краевой задачи (8), (2), (3), (9)–(11) будет справедлива требуемая оценка (12).

Умножим уравнение (8) на функцию $xu(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. После несложных преобразований получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} x\left[D_t^p u(x,T)\right]^2\,dx+\int\limits_Q xa(x)u_x^2\,dx\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_Q a'(x)u^2\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_Q xc(x,t)u^2\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_Q xa(x)\left(D_t^{2p+1}u_x\right)^2\,dx\,dt+\varepsilon\mu\int\limits_Q x\left(D_t^{2p+1}u\right)^2\,dx\,dt-$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_Q a'(x)\left(D_t^{2p+1}u\right)^2\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^T[a(1)-\lambda^2\beta^2a(0)]u^2(1,t)\,dt+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^T[a(1)-\lambda^2\beta^2a(0)]\left[D_t^{2p+1}u(1,t)\right]^2\,dt=\int\limits_Q xfu\,dx\,dt.$$

Условия теоремы и неравенство Юнга дают следствие данного равенства — априорную оценку

$$\int\limits_Q(xu_x^2+xu^2)\,dx\,dt+\varepsilon\int\limits_Q\left[x\left(D_t^{2p+1}u_x\right)^2+x\mu\left(D_t^{2p+1}u\right)^2\right]\,dx\,dt\leq$$

$$\leq M_1\int\limits_Q f^2\,dx\,dt,\tag{14}$$

постоянная M_1 в которой определяется лишь числами a_0, c_0 и β.

На следующем шаге умножим уравнение (8) на функцию $-xD_t^{4p+2}u(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. Получим равенство

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} x\left[D_t^{2p+1}u(x,0)\right]^2\,dx+\int\limits_Q xa(x)\left(D_t^{2p+1}u_x\right)^2\,dx\,dt-$$

$$-\frac{1}{2}\int\limits_Q a'(x)\left(D_t^{2p+1}u\right)^2\,dx\,dt+\int\limits_Q xc(x,t)\left(D_t^{2p+1}u\right)^2\,dx\,dt+$$

$$+\varepsilon\int\limits_Q xa(x)\left(D_t^{4p+2}u_x\right)^2\,dx\,dt+\varepsilon\mu\int\limits_Q x\left(D_t^{4p+2}u\right)^2\,dx\,dt-$$

$$-\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_Q a'(x)\left(D_t^{4p+2}u\right)^2\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int\limits_0^T[a(1)-\lambda^2\beta^2a(0)]\left[D_t^{2p+1}u(1,t)\right]^2\,dt+$$

$$+\frac{\varepsilon}{2}\int\limits_0^T[a(1)-\lambda^2\beta^2a(0)]\left[D_t^{4p+2}u(1,t)\right]^2\,dt=-\int\limits_Q xf(x,t)D_t^{4p+2}u\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_Q x\left[\sum_{k=0}^{2p}c_k(x,t)D_t^k u\right]D_t^{2p+1}u\,dx\,dt,\tag{15}$$

в котором через $c_k(x,t)$ обозначены полученные после применения формулы Лейбница производные функции $c(x,t)$ вместе с биномиальными коэффициентами. Используя условия теоремы, интерполяционные неравенства

$$\int_0^T \left[D_t^k u(x,t)\right]^2 \, dt \le \delta \int_0^T \left[D_t^{2p+1} u(x,t)\right]^2 \, dt + C(\delta) \int_0^T u^2(x,t)\, dt,$$

в которых k есть натуральное число из промежутка $[1, 2p]$, δ есть произвольное положительное число (см. [18]), используя также неравенство (14) и неравенство Юнга, придем к оценке

$$\int_Q \left[x\left(D_t^{2p+1}u_x\right)^2 + x\left(D_t^{2p+1}u\right)^2\right] dx\,dt + \varepsilon \int_Q x\left(D_t^{4p+2}u_x\right)^2 \le M_2 \int_Q f^2\,dx\,dt, \tag{16}$$

с постоянной M_2, определяющейся числами a_0, c_0, β и ε.

Из неравенств (7), (14) и (16) вытекают оценки

$$\int_0^T [u^2(0,t) + u^2(1,t)]\,dt \le M_3 \int_Q f^2\,dx\,dt, \tag{17}$$

$$\int_0^T \left\{\left[D_t^{2p+1}u_(0,t)\right]^2 + \left[D_t^{2p+1}u_(1,t)\right]^2\right\} dt \le M_4 \int_Q f^2\,dx\,dt, \tag{18}$$

в которых постоянная M_3 определяется лишь числами a_0, c_0 и β, постоянная M_4 определяется числами a_0, c_0, β и ε.

Умножим уравнение (8) на функцию $-u_{xx}(x,t)$ и проинтегрируем по прямоугольнику Q. Получим равенство

$$\frac{1}{2}\int_\Omega \left[D_t^p u_x(x,T)\right]^2 \,dx + \int_Q \left\{a(x)u_{xx}^2 + [c(x,t) - \frac{1}{2}a''(x)]u_x^2 - \right.$$
$$\left. -\frac{1}{2}c_{xx}(x,t)u^2\right\} dx\,dt + \varepsilon \int_Q \left\{a(x)\left[D_t^{2p+1}u_{xx}\right]^2 + \right.$$
$$\left. +[\mu - \frac{1}{2}a''(x)]\left(D_t^{2p+1}u_x\right)^2\right\} dx\,dt - \frac{1}{2}a'(0)\int_0^T u_x^2(0,t)\,dt -$$
$$-\frac{\varepsilon a'(0)}{2}\int_0^T \left[D_t^{2p+1}u_x(0,t)\right]^2 \,dt = (-1)^{p+1}\int_0^T D_t^{2p+1}u(0,t)u_x(0,t)\,dt -$$
$$-\varepsilon\mu \int_0^T D_t^{2p+1}u(0,t)D_t^{2p+1}u_x(0,t)\,dt - \int_0^T c(0,t)u(0,t)u_x(0,t)\,dt +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T c_x(0,t)u^2(0,t)\,dt - \frac{1}{2}\int_0^T c_x(1,t)u^2(1,t)\,dt - \int_Q f u_{xx}\,dx\,dt. \tag{19}$$

Уточним величину числа μ: число μ должно быть таким, чтобы при $x \in \overline{\Omega}$ выполнялось неравенство $2\mu - a''(x) \geq 0$. При таком выборе числа μ и при выполнении условий теоремы все слагаемые в левой части равенства (19) будут неотрицательными. Далее четвертое и пятое слагаемые в правой части (19) будут конечными — вследствие оценки (17). Применяя к первому, второму, третьему и шестому слагаемым правой части (19) неравенство Юнга, учитывая представление

$$u_x(0,t) = -\int_0^1 u_{xx}(x,t)\,dx$$

и используя оценки (17) и (18), нетрудно получить, что следствием равенства (19) будет априорная оценка

$$\int_Q u_{xx}^2\,dx\,dt + \varepsilon \int_Q \left(D_t^{2p+1} u_{xx}\right)^2\,dx\,dt \leq M_5 \int_Q f^2\,dx\,dt \tag{20}$$

с постоянной M_5, определяющейся функциями $a(x)$ и $c(x,t)$, а также числами β и ε.

Для получения следующей оценки умножим уравнение (8) на функцию $D_t^{4p+2}u_{xx}$. Повторяя выкладки, которые привели к оценке (20), но при этом используя оценки (17), (18) и (20), получим неравенство

$$\int_Q \left(D_t^{4p+2} u_{xx}\right)^2\,dx\,dt \leq M_6 \int_Q f^2\,dx\,dt, \tag{21}$$

постоянная M_6 в котором определяется функциями $a(x)$ и $c(x,t)$, а также числами β и ε.

Оценки (20) и (21) и означают, что при фиксированном ε и при выполнении условий теоремы для всевозможных решений $u(x,t)$ краевой задачи (8), (2), (3), (9)–(11) выполняется оценка (12). Как уже говорилось выше, из этой оценки следует что краевая задача (8), (2), (3), (9)–(11) разрешима в пространстве V при всех λ из отрезка $[0,1]$ при фиксированном ε и при наличии включения $f(x,t) \in L_2(Q)$.

Покажем теперь, что при выполнении дополнительных условий на функцию $f(x,t)$ для решений краевой задачи (8), (2), (3), (9)–(11) будут иметь место априорные оценки, равномерные по параметру ε.

Прежде всего заметим, что если в первом слагаемом правой части равенства (15) $(2p+1)$ раз проинтегрировать по переменной t (это возможно), то получим оценку

$$\int_Q \left[x\left(D_t^{2p+1}u_x\right)^2 + x\left(D_t^{2p+1}u\right)^2\right]dx\,dt + \varepsilon\int_Q x\left(D_t^{4p+2}u\right)^2\,dx\,dt \leq$$

$$\leq M_7 \int_Q \left[f^2 + \left(D_t^{2p+1}f\right)^2\right]dx\,dt, \tag{22}$$

постоянная M_7 в которой определяется функциями $a(x)$ и $c(x,t)$, а также числом β.

Из оценок (14) и (22), а также из неравенства (7) следует, что левые части неравенств (17) и (18) также будут ограничены числами, определяющимися функциями $a(x)$, $c(x,t)$ и $f(x,t)$, а также числом β.

Повторяя далее доказательство оценки (20), но учитывая оценку (22), придем к неравенству

$$\int\limits_Q u_{xx}^2\,dx\,dt + \varepsilon\int\limits_Q \left(D_t^{2p+1}u_{xx}\right)^2\,dx\,dt \le M_8\int\limits_Q \left[f^2 + \left(D_t^{2p+1}f\right)^2\right]\,dx\,dt \tag{23}$$

с постоянной M_8, определяющейся лишь функциями $a(x)$ и $c(x,t)$, а также числом β.

Умножив далее уравнение (8) на функцию $\varepsilon D_t^{4p+2}u_{xx}(x,t)$ и проинтегрировав по прямоугольнику Q, получим еще одну оценку

$$\varepsilon^2\int\limits_Q \left(D_t^{4p+2}u_{xx}\right)^2\,dx\,dt \le M_9\int\limits_Q \left[f^2 + \left(D_t^{2p+1}f\right)^2\right]\,dx\,dt, \tag{24}$$

постоянная M_9 в которой определяется лишь функциями $a(x)$ и $c(x,t)$, а также числом β.

Последняя оценка

$$\int\limits_Q \left(D_t^{2p+1}u\right)^2\,dx\,dt \le M_{10}\int\limits_Q \left[f^2 + \left(D_t^{2p+1}f\right)^2\right]\,dx\,dt \tag{25}$$

очевидным образом вытекает из предыдущих, постоянная M_{10} в этой оценке вновь определяется лишь функциями $a(x)$ и $c(x,t)$, а также числом β.

Из оценок (23)–(25) и из свойства рефлекситвности гильбертова пространства [17] вытекает, что существуют последовательность $\{\varepsilon_m\}_{m=1}^{\infty}$ положительных чисел, а также функция $u(x,t)$ такие, что при $m\to\infty$ имеют место сходимости

$$\varepsilon_m \to 0,$$
$$u_m(x,t)\to u(x,t) \quad \textit{слабо в пространстве} \quad W_2^{2,2p+1}(Q),$$
$$\varepsilon_m D_t^{4p+2}u_m(x,t)(x,t)\to 0 \quad \textit{слабо в пространстве} \quad L_2(Q),$$
$$\varepsilon_m D_t^{4p+2}u_{mxx}(x,t)(x,t)\to 0 \quad \textit{слабо в пространстве} \quad L_2(Q),$$
$$u_m(0,t)\to u(0,t) \quad \textit{слабо в пространстве} \quad W_2^{2p+1}([0,T]),$$
$$u_m(1,t)\to u(1,t) \quad \textit{слабо в пространстве} \quad W_2^{2p+1}([0,T]).$$

Очевидно, что предельная функция $u(x,t)$ и будет искомым решением нелокальной задачи I.

Покажем, что в пространстве $W_2^{2,2p+1}(Q)$ для нелокальной задачи I имеет место свойство единственности решений.

Пусть $u(x,t)$ есть решение нелокальной задачи I из пространства $W_2^{2,2p+1}(Q)$. При выполнении условий теоремы для решения $u(x,t)$ будет справедлива оценка (14) с $\varepsilon=0$. Если теперь $f(x,t)\equiv 0$ в Q, то из (14) и из неравенства (7) будет следовать, что выполняется $u(0,t)=0$ при $t\in(0,T)$. Это означает, что $u(x,t)$ есть решение однородной смешанной краевой задачи для уравнения (1). Очевидно, что $u(x,t)$ будет тождественно нулевой в Q функцией. Этот факт и дает искомую единственность решений.

В случае а) теорема доказана. Пусть теперь выполняется условие б). Вновь рассмотрим краевую задачу (8), (2), (3), (9)–(11). Покажем, что для решений $u(x,t)$ этой задачи имеет место оценка (12).

Умножив уравнение (8) на функцию $xu(x,t)$ и проинтегрировав по прямоугольнику Q, после несложных выкладок придем к неравенству

$$a_0\int\limits_Q xu_x^2\,dx\,dt + c_0\int\limits_Q xu^2\,dx\,dt + \varepsilon a_0\int\limits_Q x\left(D_t^{2p+1}u_x\right)^2\,dx\,dt +$$

$$+\varepsilon\mu\int\limits_q x\left(D_t^{2p+1}u\right)^2\,dx\,dt \leq \frac{\beta_1}{2}\int\limits_0^T u^2(1,t)\,dt + \frac{\varepsilon\beta_1}{2}\int\limits_0^T\left[D_t^{2p+1}u(1,t)\right]^2\,dt +$$

$$+\left|\int\limits_Q xfu\,dx\,dt\right|. \tag{26}$$

Условие б), в частности, означает, что выполняется неравенство

$$\frac{\beta_1}{2(c_0-\beta_1)} < \frac{2a_0}{\beta_1}.$$

Выберем положительное число δ так, чтобы имело место включение $\delta^2 \in \left(\frac{\beta_1}{2(c_0-\beta_1)},\ \frac{2a_0}{\beta_1}\right)$. Оценив первое и второе слагаемые правой части (26) с помощью неравенства (7), получим

$$\left(a_0 - \frac{\beta_1\delta^2}{2}\right)\int\limits_Q xu_x^2\,dx\,dt + \left[c_0 - \frac{\beta_1}{2}\left(2+\frac{1}{\delta^2}\right)\right]\int\limits_Q xu^2\,dx\,dt +$$

$$+\varepsilon\left(a_0 - \frac{\beta_1\delta^2}{2}\right)\int\limits_Q x\left(D_t^{2p+1}u_x\right)^2\,dx\,dt +$$

$$+\varepsilon\left[\mu - \frac{\beta_1}{2}\left(2+\frac{1}{\delta^2}\right)\right]\int\limits_Q x\left(D_t^{2p+1}u\right)^2\,dx\,dt \leq \left|\int\limits_Q xfu\,dx\,dt\right|.$$

Учитывая указанный выше выбор числа δ, учитывая далее, что число μ можно выбрать настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$\mu > \frac{\beta_1}{2}\left(2+\frac{1}{\delta^2}\right),$$

и, наконец, применяя неравенство Юнга к последнему слагаемому правой части (26), получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (8), (2), (3), (9)–(11) выполняется априорная оценка (14).

Повторяя проведенные ранее рассуждения для равенства (15), получим, что для решений $u(x,t)$ краевой задачи (8), (2), (3), (9)–(11) будут выполняться оценки (16) и (22) — первая с постоянной, определяющейся функциями $a(x)$ и $c(x,t)$, числами β и ε, вторая — с постоянной, определяющейся функциями $a(x)$ и $c(x,t)$, а также числом β.

Дальнейшие рассуждения вполне аналогичны рассуждениям, проведенным при выполнении условия а). Именно, вначале при фиксированном ε устанавливается справедливость оценок (20) и (21), и, тем самым — разрешимость краевой задачи (8), (2), (3), (9)–(11) в пространстве V, далее — справедливость равномерных по ε оценок (23)–(25) и возможность организации предельного перехода. Предельная функция и будет искомым решением нелокальной задачи I.

Единственность решений нелокальной задачи I при выполнении условия б) вновь следует из оценки (14), справедливой и при $\varepsilon = 0$.

Теорема полностью доказана. □

Теорема 2. *Пусть выполняются условия теоремы 1 для функций $a(x)$ и $c(x,t)$, а также одно из условий а) или б). Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $D_t^k f(x,t) \in L_2(Q)$, $k = 0,\dots,2p+1$, $D_t^k f(x,t) = 0$ при $t = 0$, $x \in \Omega$, $k = 0,\dots,p$, $D_t^k f(x,t) = 0$ при $t = T$, $x \in \Omega$, $k = p+1,\dots,2p$, нелокальная задача III имеет решение $u(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,2p+1}(Q)$, и в этом пространстве решение единственно.*

Доказательство. Вновь рассмотрим вспомогательную задачу: *найти функцию $u(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения (8) (при $\varepsilon > 0$) и такую, что для нее выполняются условия (2), (6), (9), (11), а также условие*

$$D_t^k u(x,t)|_{t=T} = 0, \quad k = 3p+1,\dots,4p+1, \quad x \in \Omega.$$

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 1, нетрудно установить, что для решений $u(x,t)$ этой задачи при фиксированном ε имеет место априорная оценка (12), и при дополнительном условии на функцию $f(x,t)$ — равномерные по ε оценки (23)–(25). Наличие этих оценок означает, что вспомогательная задача будет разрешима в пространстве V, и что существует последовательность решений вспомогательной задачи, сходящаяся к решению нелокальной задачи из требуемого класса.

Единственность решений нелокальной задачи III в пространстве $W_2^{2,2p+1}(Q)$ очевидна.

Теорема доказана. □

4. Разрешимость нелокальных задач II и IV

Доказательство разрешимости нелокальных задач II и IV будет проведено с помощью перехода к нелокальным задачам I и II [19] и использования теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия*

$$a(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad c(x,t) \in C^2(\overline{Q});$$

$$a''(x) \le 0,\ c(x,t) \ge 0,\ (xc_x(x,t))_x \le 0 \text{ при } x \in \overline{\Omega},\ t \in [0,T],\ a'(1) = 0;$$

а также одно из условий а) или б) теоремы 1. Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $D_t^k f(x,t) \in L_2(Q)$, $D_t^k f_x(x,t) \in L_2(Q)$, $k = 0,\dots,2p+1$, $D_t^k f(x,t) = 0$ при $t = 0$, $x \in \Omega$, $k = 0,\dots,p$, $D_t^k f(x,t) = 0$ при $t = T$, $x \in \Omega$, $k = 0,\dots,p-1$, $f(1,t) = 0$ при $t \in (0,T)$, нелокальная задача II имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,2p+1}(Q)$, $u_x(x,t) \in W_2^{2,2p+1}(Q)$, причем в указанном классе решение единственно.

Доказательство. Рассмотрим краевую задачу: *найти функцию $v(x,t)$, являющуюся в прямоугольнике Q решением уравнения*

$$(-1)^p D_t^{2p+1} v - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x)v) + c(x,t)v - c_x(x,t)\int\limits_x^1 v(y,t)\,dy = f_x(x,t) \qquad (27)$$

и такую, что для нее выполняются (2)–(4). Повторяя доказательство теоремы 1 (с использованием регуляризованного уравнения

$$(-1)^p D_t^{2p+1} v - \frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x)v) + c(x,t)v - c_x(x,t)\int\limits_x^1 v(y,t)\,dy +$$

$$+\varepsilon D_t^{4p+2}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(a(x)v) - \mu v\right] = f_x(x,t),$$

соответстующих дополнительных краевых условий и априорных оценок), нетрудно установить, что краевая задача (27), (2)–(4) имеет решение $v(x,t)$, принадлежащее пространству $W_2^{2,2p+1}(Q)$. Определим функцию $u(x,t)$ как решение задачи $u_x(x,t) = v(x,t)$, $u(1,t) = 0$ при $t \in (0,T)$. Поскольку уравнение (27) можно записать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[(-1)^p D_t^{2p+1} u - \frac{\partial}{\partial x}(a(x)u_x) + c(x,t)u - f(x,t)\right] = 0,$$

то, после интегрирования от x до 1 с использованием условия $f(1,t) = 0$, получим, что функция $u(x,t)$ и будет искомым решением нелокальной задачи II.

Единственность решений нелокальной задачи II в указанном классе очевидна.

Теорема доказана. □

Теорема 4. *Пусть выполняются условия*

$$a(x) \in C^2(\overline{\Omega}), \quad c(x,t) \in C^2(\overline{Q});$$

$$a''(x) \le 0,\ c(x,t) \ge 0,\ (xc_x(x,t))_x \le 0 \ \text{при}\ x \in \overline{\Omega},\ t \in [0,T], \quad a'(1) = 0;$$

а также одно из условий а) или б) теоремы 1. Тогда для любой функции $f(x,t)$ такой, что $D_t^k f(x,t) \in L_2(Q)$, $D_t^k f_x(x,t) \in L_2(Q)$, $k = 0,\dots,2p+1$, $D_t^k f(x,t) = 0$ при $t = 0$, $x \in \Omega$, $k = 0,\dots,p$, $D_t^k f(x,t) = 0$ при $t = T$, $x \in \Omega$, $k = p+1,\dots,2p$, $f(1,t) = 0$ при $t \in (0,T)$, нелокальная задача IV имеет решение $u(x,t)$ такое, что $u(x,t) \in W_2^{2,2p+1}(Q)$, $u_x(x,t) \in W_2^{2,2p+1}(Q)$, причем в указанном классе решение единственно.

Доказательство этой теоремы проводится полностью аналогично доказательству теоремы 3.

5. Заключение

В работе получены новые (и даже существенно новые) результаты о разрешимости в классах регулярных решений пространственно–нелокальных краевых задач для линейных квазипараболических уравнений произвольного нечетного по временной (выделенной) переменной порядка.

Полученные результаты нетрудно усилить в следующих направлениях:

1. оператор L модельного вида можно заменить более общим оператором — например, функция a может быть функцией и переменной t, оператор L может

содержать младшие по переменной t производные порядков $1, \dots, 2p$, а также производную по x первого порядка (соответствующие условия и выкладки будут отличаться от приведенных в п.п. 2 и 3 лишь большей громоздкостью);

2. граничные условия (4) и (5) можно пошевелить — условие (4) заменить условием $u(0,t) - \beta u(1,t) = 0$, $u_x(1,t) + \alpha u(1,t) = 0$, условие (5) можно заменить условием $u_x(0,t) = \beta u_x(1,t) + \alpha u(0,t)$;

3. граничные условия как по переменной x, так и по переменной t можно задавать неоднородными — используя процедуру продолжения граничных функций внутрь прямоугольника Q, далее нетрудно будет преобразовать задачи с неоднородными граничными условиями к задачам с однородными.

References

[1] J.R. Cannon, *The solution of the heat equation subject to the specification of energy*, Quart. Appl. Math., 21 (1963), 155–160.

[2] L.I. Kamynin, *On a boundary value problem in the theory of heat conduction with nonclassical boundary conditions*, Journal of Computational Mathematics and mathematical physics, **4**:6 (1964), 1006–1024.

[3] N.I. Ionkin, *Solution of a boundary value problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Diff. Uravn., **13**:2 (1977), 294–304.

[4] N.I. Yurchuk, *Mixed problem with an integral condition for some parabolic equations*, Diff. Uravn., **22**:12 (1986), 2117–2126.

[5] N.I. Ionkin, *On the stability of a problem in the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition*, Diff. Uravn., **15**:7 (1979), 1279–1283.

[6] S.A. Beilin, *Existence of solutions for one–dimensional wave equations with nonlocal conditions*, Electronic Journal of Differential Equations, 76 (2001), 1–8.

[7] A.S. Berdyshev, A. Cabada, B.J. Kadirkulov, *The Samarskii–Ionkin type problem for the fourth order parabolic equation with fractional differential operator*, Computess and Mathematics with Applications, 62 (2011), 3884–3893.

[8] I.A. Kaliev, M.M. Sabitova, *Problems of determining the temperature and density of heat sources from the initial and final temperatures*, Siberian Journal of Industrial mathematics, **12**:1 (2009), 89–97.

[9] A.A. Samarsky, *On some problems in the theory of differential equations*, Diff. Uravn., **16**:11 (1980), 1925–1935.

[10] N.L. Lažetic, *On classical solutions of mixed boundary problems for one dimensional parabolic equation of second order*, Publ. de L'Institut mathematique. Nouvelle serie. **67**:81 (2000), 53–75.

[11] A.I. Kozhanov, *On the solvability of boundary value problems with nonlocal and integral conditions for parabolic equations*, Nonlinear Boundary Problems, Donetsk, **20** (2010), 54–76.

[12] A.M. Abdrakhmanov, A.I. Kozhanov, *A problem with a nonlocal boundary condition for a class of equations of an odd order*, Izvestiya Vuzov, Math., 5 (2007), 3–12.

[13] A.M. Abdrakhmanov, *On the solvability of a boundary value problem with an integral boundary condition of the second kind for equations of odd order*, Mat. Notes, **88**:2 (2010), 163–172.

[14] S.L. Sobolev, *Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Providence: Amer. Math. Soc., 1991.

[15] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, New York and London: Academic Press, 1968.

[16] H. Triebel, *Interpolation theory. Function spaces. Differential operators*, Berlin: Veb Deutscher Verlag, 1980.

[17] V.A. Trenogin, *Functional Analysis* [Russian], Moscow: Nauka, 1980.

[18] O.V. Besov, V.P. Nl'in, S.M. Nikol'skiy, *Integral representations of functions and embedding theorems* [Russian], Moscow: Nauka, 1975.

[19] A.I. Kozhanov, *On the solvability of some spatially non-local boundary value problems for linear second-order hyperbolic equations*, Math notes, **90**:2 (2011), 254–268.

Aleksandr Ivanovich Kozhanov
Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: kozhanov@math.nsc.ru

Abdrahmanov Aidar Maksutovich
Ufa State Technical University, Department of Artificial Intelligence and Advanced Mathematical Research,
st. Karl Marx, 12,
450077, Ufa, Russia
E-mail address: abdrai@mail.ru