

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxxУДК 519.716
MSC 08A99О ДВУХ ИНТЕРВАЛАХ В РЕШЕТКЕ ЧАСТИЧНЫХ
УЛЬТРАКЛОНОВ РАНГА 2

С.А. БАДМАЕВ, А.Е. ДУГАРОВ, И.В. ФОМИНА, И.К. ШАРАНХАЕВ

ABSTRACT. In article the intervals in the lattice of partial ultraclones of rank 2 are considered. The well-known classes of all monotone M and all self-dual S Boolean functions are partial ultraclones of rank 2. We proved that each of the intervals $\mathfrak{I}(M, M_2)$ and $\mathfrak{I}(S, M_2)$, where M_2 is complete partial ultracclone of rank 2, is finite.

Keywords: multifunction, Boolean function, monotone function, self-dual function, superposition, closed set, clone, partial ultracclone, lattice, interval of lattice.

1. ВВЕДЕНИЕ

Как известно, для булевых функций существует ровно 5 максимальных замкнутых классов (клонов) T_0 , T_1 , M , S и L [1]. В [2] доказано, что в решетке частичных клонов ранга 2 интервалы, содержащие классы T_0 , T_1 , M , S , являются конечными, а для L такой интервал имеет континуальную часть. В свою очередь в решетке ультраклонов ранга 2 все аналогичные интервалы конечны [3, 4]. В данной работе рассматривается обобщение этой задачи для решетки частичных ультраклонов ранга 2, которая содержит в себе решетки частичных клонов и ультраклонов. Доказано, что интервалы, содержащие M и S , имеют 14 и 17 элементов соответственно. Отметим, что интервалы для T_0 и T_1 исследованы в [3], где доказана их конечность.

BADMAEV, S.A., DUGAROV, A.E., FOMINA, I.V., SHARANKHAEV, I.K. ON TWO INTERVALS IN THE LATTICE OF PARTIAL ULTRACLONES OF RANK 2.

© 2021 Бадмаев С.А., Дугаров А.Е., Фомина И.В., Шаранхаев И.К..

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22–21–20013, <https://rscf.ru/project/22-21-20013/> и Правительства Республики Бурятия.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Пусть $E = \{0, 1\}$ и $F = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$. Определим следующие множества функций:

$$\begin{aligned} P_{2,n} &= \{f|f : E^n \rightarrow E\}, P_2 = \bigcup P_{2,n}; \\ P_{2,n}^* &= \{f|f : E^n \rightarrow E \cup \{\emptyset\}\}, P_2^* = \bigcup P_{2,n}^*; \\ P_{2,n}^- &= \{f|f : E^n \rightarrow F \setminus \{\emptyset\}\}, P_2^- = \bigcup P_{2,n}^-; \\ M_{2,n} &= \{f|f : E^n \rightarrow F\}, M_2 = \bigcup M_{2,n}. \end{aligned}$$

Функции из P_2 называют булевыми функциями, из P_2^* – частичными функциями на E , из P_2^- – гиперфункциями на E , а из M_2 – мультифункциями на E . Очевидно, что $P_2 \subset P_2^* \subset M_2$, $P_2 \subset P_2^- \subset M_2$.

Для того, чтобы суперпозиция

$$f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m)),$$

где $f, f_1, \dots, f_n \in M_2$, определяла мультифункцию $g(x_1, \dots, x_m)$ определим значения мультифункции f на наборах из множества F следующим образом: если $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in E^m$, то

$$g(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{cases} \bigcap_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{если пересечение не пусто;} \\ \bigcup_{\beta_i \in f_i(\alpha_1, \dots, \alpha_m)} f(\beta_1, \dots, \beta_n), & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

На наборах, содержащих \emptyset , мультифункция принимает значение \emptyset .

Далее мультифункцию будем называть просто функцией, если это не вызывает недоразумений.

Для любого натурального n и любого i , где $1 \leq i \leq n$, обозначим через $e_i^n(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$ функцию, значения которой совпадают со значениями переменной x_i . Функции e_i^n называются проекциями или селекторными функциями.

Замыканием множества функций K называется множество всех функций, полученных из функций множества K с помощью суперпозиции, добавления и удаления фиктивных переменных. Замыкание множества K обозначается через $[K]$. Множество функций K называется замкнутым (замкнутым классом), если $K = [K]$.

Частичным ультраклоном ранга 2 (ультраклоном ранга 2, клоном) называется замкнутое множество мультифункций (гиперфункций, булевых функций), содержащее все проекции. Множество всех мультифункций M_2 называется полным частичным ультраклоном ранга 2. Далее для краткости любой частичный ультраклон ранга 2 будем называть просто частичным ультраклоном. Заметим, что любой клон и ультраклон является частичным ультраклоном.

Частичный ультраклон K называется максимальным, если не существует частичного ультраклона K' такого, что $K \subset K' \subset M_2$.

Интервалом $\mathfrak{S}(Q, R)$ называется частично упорядоченное по включению множество всех частичных ультраклонов, в котором любой элемент K удовлетворяет условиям $Q \subseteq K$ и $K \subseteq R$. Интервалы для наглядности изображаются в виде диаграмм, где частичные ультраклоны обозначены точками, а точка,

представляющая Q_1 , расположена выше и соединена отрезком с точкой, представляющей R_1 , если $R_1 \subset Q_1$ и не существует частичного ультраклона P такого, что $R_1 \subset P \subset Q_1$.

Через M обозначим клон всех булевых монотонных функций, S – клон всех булевых самодвойственных функций.

Пусть R^s – s -местный предикат, заданный на множестве F . Будем говорить, что функция $f(x_1, \dots, x_n)$, определенная на множестве F , сохраняет предикат R^s , если для любых наборов

$$(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{s1}), \dots, (\alpha_{1n}, \dots, \alpha_{sn}),$$

принадлежащих предикату R^s , набор

$$(f(\alpha_{11}, \dots, \alpha_{1n}), \dots, f(\alpha_{s1}, \dots, \alpha_{sn}))$$

принадлежит R^s .

Для упрощения записи используется кодировка: $\{\emptyset\} \leftrightarrow *$, $\{0\} \leftrightarrow 0$, $\{1\} \leftrightarrow 1$, $\{0, 1\} \leftrightarrow -$, тогда $F = \{0, 1, *, -\}$.

Мультифункцию, которая на всех наборах принимает значение $*$, будем обозначать просто $*$.

В [5] доказано, что максимальными ультраклонами ранга 2 являются только следующие 11 множеств:

- 1) P_2 – множество всех булевых функций;
- 2) T_0^- – множество функций, которые сохраняют нуль, т. е. на наборе из всех нулей функции принимают значение 0;
- 3) T_1^- – множество функций, которые сохраняют единицу, т. е. на наборе из всех единиц функции принимают значение 1;
- 4) S^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & - \\ 1 & 0 & - \end{pmatrix};$$

- 5) L^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - \end{pmatrix};$$

- 6) M^- – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \end{pmatrix};$$

- 7) A_1 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_{A_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & - & 1 & - \\ 1 & 0 & 1 & 1 & - & - \end{pmatrix};$$

- 8) A_2 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_{A_2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & - & 0 & - \end{pmatrix};$$

- 9) A_3 – множество функций, сохраняющих предикат R_3 , определяемый матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & - & 1 & 1 & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 1 & - & 0 & 1 & - & - & 1 & - & 1 & - & 1 & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & - & 1 & 1 & 0 & - & - & - & 1 & - & 1 & 1 & - \end{pmatrix};$$

10) A_4 – множество функций, сохраняющих предикат

$$R_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & - & 0 & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & - & 0 & - & 0 & - & - \\ 0 & 1 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & - & 0 & - \end{pmatrix};$$

11) A_5 – множество, состоящее из всех функций, существенно зависящих не более чем от одной переменной, а также из функций, принимающих два значения, одно из которых есть $-$.

Из [6] известно, что в полном частичном ультраклоне ранга 2 максимальными частичными ультраклонеми являются следующие 12 множеств:

1) K_1 – множество, состоящее из всех мультифункций f , принимающих на нулевом наборе либо значение 0, либо значение $*$;

2) K_2 – множество, состоящее из всех мультифункций f , принимающих на единичном наборе либо значение 1, либо значение $*$;

3) K_3 – множество, состоящее из всех мультифункций f , для которых выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{0}) = *$ или $f(\tilde{1}) = *$;
- $f(\tilde{0}) = 0$ и $f(\tilde{1}) = 1$.

4) K_4 – множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из трех условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = f(\overline{\tilde{\alpha}}) = -$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\tilde{\alpha})} = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\tilde{\alpha})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

5) K_5 – множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = *$ или $f(\overline{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\tilde{\alpha})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$.

6) $K_6 = P_2^- \cup \{*\}$;

7) $K_7 = P_2^*$;

8) K_8 – множество всех мультифункций f , одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то

$$f \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (001), (010), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$;

- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 1$;

- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\alpha}) = *$, то $f(\tilde{\beta}) = *$.

9) K_9 – множество всех мультифункций f , одновременно удовлетворяющих трем условиям:

- если $f(\tilde{\alpha}), f(\tilde{\beta}), f(\tilde{\gamma}) \in \{0, 1\}$, то

$$f \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \end{pmatrix} \in \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

где $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n), \tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ – двоичные наборы такие, что $(\alpha_i \beta_i \gamma_i) \in \{(000), (011), (101), (111)\}$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$;

- если существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $f(\tilde{\alpha}) = -$, то для любого двоичного набора $\tilde{\beta}$ верно $f(\tilde{\beta}) \neq 0$;
- пусть двоичные наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n), \tilde{\beta} = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ такие, что $\alpha_i \leq \beta_i$ для всех $i \in \{1, \dots, n\}$, тогда, если $f(\tilde{\beta}) = *$, то $f(\tilde{\alpha}) = *$.

10) K_{10} – множество всех мультифункций f , сохраняющих предикат:

$$R_{10} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & \beta \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & \gamma \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & \delta \end{pmatrix}, \text{ где } (\alpha, \beta, \gamma, \delta)^t \text{ – всевозможные}$$

столбцы, в которых $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \{0, 1, -, *\}$ одновременно удовлетворяют двум условиям:

- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$ среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ как минимум два принимают значение $*$;
- в любом столбце $(\alpha\beta\gamma\delta)^t$, если среди $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ встречается 0 или 1, то все они неравны $-$.

11) K_{11} – множество всех мультифункций f , сохраняющих предикат

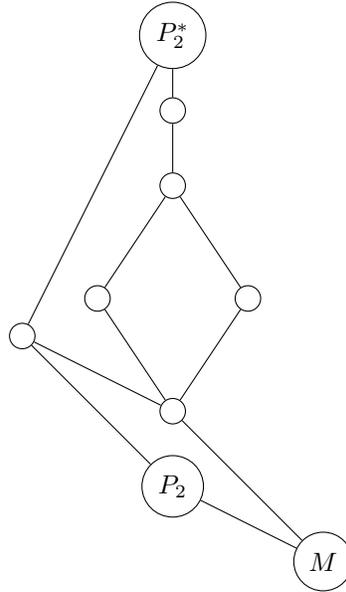
$$R_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & - & 0 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & - & 0 & 0 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - \end{pmatrix}.$$

12) K_{12} – множество всех мультифункций f , сохраняющих предикат

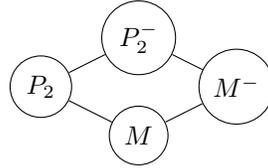
$$R_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & - & - & 0 & 1 & - & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & - & 1 & - & * & * & * & 0 & 1 & - & * & * & * \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & - & 1 & 1 & - & * & * & * & * & * & * & 0 & 1 & - \end{pmatrix}.$$

3. ИНТЕРВАЛ, СОДЕРЖАЩИЙ КЛАСС МОНОТОННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ M

Теорема 1. [2] *Интервал $\mathfrak{S}(M, P_2^*)$ содержит ровно 9 частичных клонов и изображен ниже.*



Теорема 2. [4] Интервал $\mathfrak{S}(M, P_2^-)$ содержит ровно 4 ультраклона и изображен ниже.



Лемма 1. Множество $M^- \cup \{*\}$ является частичным ультраклоном ранга 2.

Доказательство. Очевидно. □

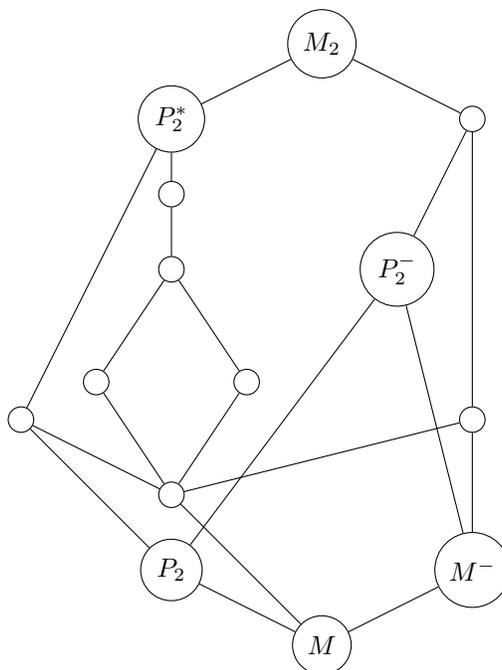
Лемма 2. Из 12 максимальных частичных ультраклонов ранга 2 только P_2^* и $P_2^- \cup \{*\}$ содержат целиком M .

Доказательство. Покажем, что M не является подмножеством ни одного из максимальных частичных ультраклонов ранга 2 кроме P_2^* и $P_2^- \cup \{*\}$. Для каждого такого максимального частичного ультраклона приведем пример функции f , которая принадлежит M , но не принадлежит соответствующему максимальному частичному ультраклону:

- 1) Для $K_1: f = (1111)$.
- 2) Для $K_2: f = (0000)$.
- 3) Для $K_3: f = (0000)$.
- 4) Для $K_4: f = (0000)$.
- 5) Для $K_5: f = (0000)$.
- 6) Для $K_8: f = (0111)$.
- 7) Для $K_9: f = (0001)$.
- 8) Для $K_{10}: f = (0001)$.
- 9) Для $K_{11}: f = (0111)$.
- 10) Для $K_{12}: f = (0001)$.

□

Теорема 3. Интервал $\mathfrak{S}(M, M_2)$ содержит ровно 14 частичных ультраклонов и изображен ниже.



Доказательство. Следует из теорем 1, 2 и лемм 1, 2.

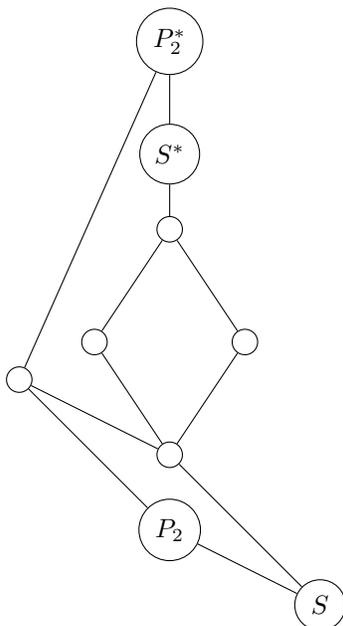
□

4. ИНТЕРВАЛ, СОДЕРЖАЩИЙ КЛАСС САМОДВОЙСТВЕННЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ S

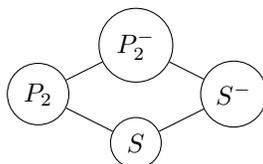
Обозначим через S^* множество частичных функций, сохраняющих предикат

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & * & * & * \\ 1 & 0 & * & * & 0 & 1 & * \end{pmatrix}.$$

Теорема 4. [2] Интервал $\mathfrak{S}(S, P_2^*)$ содержит ровно 9 частичных клонов и изображен ниже.



Теорема 5. [4] Интервал $\mathfrak{I}(S, P_2^-)$ содержит ровно 4 ультраклона и изображен ниже.



Лемма 3. Множество $S^- \cup \{*\}$ является частичным ультраклоном ранга 2.

Доказательство. Очевидно. □

Лемма 4. Из 12 максимальных частичных ультраклонов ранга 2 только K_4 , K_5 , P_2^* и $P_2^- \cup \{*\}$ содержат целиком S .

Доказательство. Покажем, что S не является подмножеством ни одного из максимальных частичных ультраклонов ранга 2 кроме K_4 , K_5 , P_2^* и $P_2^- \cup \{*\}$. Для каждого такого максимального частичного ультраклона приведем пример функции f , которая принадлежит S , но не принадлежит соответствующему максимальному частичному ультраклону:

- 1) Для K_1 : $f = (10)$.
- 2) Для K_2 : $f = (10)$.
- 3) Для K_3 : $f = (10)$.
- 4) Для K_8 : $f = (10)$.
- 5) Для K_9 : $f = (10)$.
- 6) Для K_{10} : $f = (00010111)$.
- 7) Для K_{11} : $f = (10)$.
- 8) Для K_{12} : $f = (10)$.

□

Лемма 5. Из 12 максимальных частичных ультраклонов ранга 2 только K_4 и $P_2^- \cup \{*\}$ содержат целиком S^- .

Доказательство. В силу леммы 4 достаточно доказать, что S^- не является подмножеством K_5 и P_2^* . Это верно, так как $f = (--) \in S^-$, но $f \notin K_5$ и $f \notin P_2^*$. □

Следствие 1. Верно, что $K_4 \cap P_2^- = S^-$.

Лемма 6. Из 12 максимальных частичных ультраклонов ранга 2 только K_5 и P_2^* содержат целиком S^* .

Доказательство. В силу леммы 4 достаточно доказать, что S^* не является подмножеством K_4 и $P_2^- \cup \{*\}$. Это верно, так как $f = (1*) \in S^*$, но $f \notin K_4$ и $f \notin P_2^- \cup \{*\}$. □

Лемма 7. Для любой $f \in K_4 \setminus (S^- \cup \{*\})$ верно, что

$$[S^- \cup \{f\}] = K_4.$$

Доказательство. С учетом леммы 5 включение $[S^- \cup \{f\}] \subseteq K_4$ очевидно. Покажем, что любая $g(x_1, \dots, x_m) \in K_4$ может быть выражена с помощью суперпозиции гиперфункций из S^- и мультифункции $f \in K_4 \setminus (S^- \cup \{*\})$. Достаточно рассмотреть случай, когда $g(x_1, \dots, x_m) \in K_4 \setminus (S^- \cup \{*\})$.

Обозначим через

- $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s$ наборы, на которых значение g равно 0;
- $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_l$ наборы, на которых значение g равно 1;
- $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_t$ наборы, на которых значение g равно $-$;
- $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_p$ наборы, на которых значение g равно $*$.

Тогда значение мультифункции g

- на наборах $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s$ равно 1;
- на наборах $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_l$ равно 0;
- на наборах $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_t$ равно $-$;
- на наборах $\tilde{\delta}_1, \dots, \tilde{\delta}_p$ равно $*$.

Обозначим через $\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_r$ наборы, на которых значение функции f равно $*$. Тогда на наборах $\tilde{\eta}_1, \dots, \tilde{\eta}_r$ значение f также равно $*$.

Пусть $i \in \{1, \dots, s\}$, $j \in \{1, \dots, l\}$, $k \in \{1, \dots, t\}$, $v \in \{1, \dots, p\}$, $q = \{1, \dots, r\}$.

Построим функцию $\varphi(x_1, \dots, x_m) = f(f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_n(x_1, \dots, x_m))$, где $f_1, \dots, f_n \in S^-$ такие, что $(f_1(\tilde{\delta}_v), \dots, f_n(\tilde{\delta}_v)) = \tilde{\eta}_q$.

Тогда $(f_1(\tilde{\delta}_v), \dots, f_n(\tilde{\delta}_v)) = (\tilde{f}_1(\tilde{\delta}_v), \dots, \tilde{f}_n(\tilde{\delta}_v)) = \tilde{\eta}_q$ и $\varphi(\tilde{\delta}_v) = f(\tilde{\eta}_q) = *$, $\varphi(\tilde{\delta}_v) = f(\tilde{\eta}_q) = *$. На остальных наборах примем значения функций f_i равными $-$ для любого $i \in \{1, \dots, n\}$. Тогда на таких наборах λ значение

$$\varphi(\lambda) = f(-, \dots, -) = -.$$

Таким образом, мы построили мультифункцию φ , которая на наборах $\tilde{\delta}_v$ и $\tilde{\eta}_q$ принимает значение $*$, а на остальных наборах значение $-$.

Рассмотрим самодвойственную функцию $\psi(x_1, \dots, x_m, y)$ такую, что

$$\psi(\tilde{\alpha}_i, 0) = 0, \psi(\tilde{\alpha}_i, 1) = 0, \psi(\tilde{\alpha}_i, 0) = 1, \psi(\tilde{\alpha}_i, 1) = 1,$$

$$\begin{aligned}\psi(\tilde{\beta}_j, 0) = 1, \psi(\tilde{\beta}_j, 1) = 1, \psi(\bar{\tilde{\beta}}_j, 0) = 0, \psi(\bar{\tilde{\beta}}_j, 1) = 0, \\ \psi(\tilde{\gamma}_k, 0) = 0, \psi(\tilde{\gamma}_k, 1) = 1, \psi(\bar{\tilde{\gamma}}_k, 0) = 0, \psi(\bar{\tilde{\gamma}}_k, 1) = 1.\end{aligned}$$

Покажем, что $\psi(x_1, \dots, x_m, \varphi(x_1, \dots, x_m)) = g(x_1, \dots, x_m)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\psi(\tilde{\alpha}_i, \varphi(\tilde{\alpha}_i)) &= \psi(\tilde{\alpha}_i, -) = \psi(\tilde{\alpha}_i, 0) \cap \psi(\tilde{\alpha}_i, 1) = 0 = g(\tilde{\alpha}_i), \\ \psi(\tilde{\beta}_j, \varphi(\tilde{\beta}_j)) &= \psi(\tilde{\beta}_j, -) = \psi(\tilde{\beta}_j, 0) \cap \psi(\tilde{\beta}_j, 1) = 1 = g(\tilde{\beta}_j), \\ \psi(\tilde{\gamma}_k, \varphi(\tilde{\gamma}_k)) &= \psi(\tilde{\gamma}_k, -) = \psi(\tilde{\gamma}_k, 0) \cup \psi(\tilde{\gamma}_k, 1) = - = g(\tilde{\gamma}_k), \\ \psi(\tilde{\delta}_v, \varphi(\tilde{\delta}_v)) &= \psi(\tilde{\delta}_v, *) = * = g(\tilde{\delta}_v), \\ \psi(\bar{\tilde{\alpha}}_i, \varphi(\bar{\tilde{\alpha}}_i)) &= \psi(\bar{\tilde{\alpha}}_i, -) = \psi(\bar{\tilde{\alpha}}_i, 0) \cap \psi(\bar{\tilde{\alpha}}_i, 1) = 1 = g(\bar{\tilde{\alpha}}_i), \\ \psi(\bar{\tilde{\beta}}_j, \varphi(\bar{\tilde{\beta}}_j)) &= \psi(\bar{\tilde{\beta}}_j, -) = \psi(\bar{\tilde{\beta}}_j, 0) \cap \psi(\bar{\tilde{\beta}}_j, 1) = 0 = g(\bar{\tilde{\beta}}_j), \\ \psi(\bar{\tilde{\gamma}}_k, \varphi(\bar{\tilde{\gamma}}_k)) &= \psi(\bar{\tilde{\gamma}}_k, -) = \psi(\bar{\tilde{\gamma}}_k, 0) \cup \psi(\bar{\tilde{\gamma}}_k, 1) = - = g(\bar{\tilde{\gamma}}_k), \\ \psi(\bar{\tilde{\delta}}_v, \varphi(\bar{\tilde{\delta}}_v)) &= \psi(\bar{\tilde{\delta}}_v, *) = * = g(\bar{\tilde{\delta}}_v).\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $K_4 \subseteq [S^- \cup \{f\}]$. Следовательно, $K_4 = [S^- \cup \{f\}]$. \square

Следствие 2. *Не существует частичного ультраклона B такого, что*

$$S^- \cup \{*\} \subset B \subset K_4.$$

Обозначим через S' множество, состоящее из всех мультифункций f таких, что на любом двоичном наборе $\tilde{\alpha}$ выполняется одно из двух условий:

- $f(\tilde{\alpha}) = *$ или $f(\bar{\tilde{\alpha}}) = *$;
- $f(\tilde{\alpha}) = \overline{f(\bar{\tilde{\alpha}})}$, где $f(\tilde{\alpha}) \in \{0, 1\}$, и при этом не существует двоичного набора $\tilde{\beta}$ такого, что $f(\tilde{\beta}) = -$.

Из этого определения следует, что если функция из множества S' на некотором наборе принимает значение $-$, то среди её значений как минимум половина равны $*$, и $S^* \subset S' \subset K_5$.

Лемма 8. *Множество S' является частичным ультраклоном ранга 2.*

Доказательство. Из определения множества S' следует, что оно замкнуто относительно добавления и удаления фиктивных переменных и содержит все проекции. Доказательство замкнутости относительно суперпозиции проведем методом от противного. Пусть

$$h(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), g_2(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)),$$

где f, g_1, \dots, g_m – произвольные функции из множества S' . Предположим, что $h(x_1, \dots, x_n) \notin S'$.

Пусть существует двоичный набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $h(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) = \mu \neq *$, $h(\bar{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\delta}) = \eta \neq *$ и $\begin{pmatrix} \mu \\ \eta \end{pmatrix} \notin \{(01)^t, (10)^t\}$. Имеем $\gamma_i \neq *$ и $\delta_i \neq *$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, иначе значение функции f хотя бы на одном из наборов $\tilde{\gamma}$ или $\tilde{\delta}$ равно $*$. Также имеем $\gamma_i = \bar{\delta}_i$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, иначе одна из функций g_1, \dots, g_m не принадлежит S' . Таким образом, $\begin{pmatrix} \gamma_i \\ \delta_i \end{pmatrix} \in \{(01)^t, (10)^t\}$, противоречие с $f \in S'$.

Пусть теперь $h(\tilde{\alpha}) = f(\tilde{\gamma}) = \mu \in \{0, 1\}$, $h(\bar{\tilde{\alpha}}) = f(\tilde{\delta}) = \bar{\mu}$ и существует двоичный набор $\tilde{\beta}$ такой, что $h(\tilde{\beta}) = f(\tilde{\sigma}) = -$. Заметим, что $\gamma_i \neq -$, $\delta_i \neq -$

и $\sigma_i \neq -$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$. Действительно, если найдется такой i , что $\gamma_i = -$, то либо $\delta_i = *$, либо $g_i \notin S'$. Аналогично, если $\delta_i = -$. Если же $\sigma_i = -$, то $g_i \notin S'$. Поэтому $\gamma_i = \bar{\delta}_i$ и $\sigma_i \in \{0, 1\}$ для всех $i \in \{1, \dots, m\}$, противоречие с $f \in S'$. \square

Лемма 9. Для любой $f \in S' \setminus S^*$ верно, что

$$[S^* \cup \{f\}] = S'.$$

Доказательство. Включение $[S^* \cup \{f\}] \subseteq S'$ очевидно. Покажем, что любая $g(x_1, \dots, x_m) \in S'$ может быть выражена с помощью суперпозиции функций из S^* и функции $f \in S' \setminus S^*$. Достаточно рассмотреть случай, когда

$$g(x_1, \dots, x_m) \in S' \setminus S^*.$$

Обозначим через

- $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s$ наборы, на которых значение g равно 0;
- $\tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_l$ наборы, на которых значение g равно 1;
- $\tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_t$ наборы, на которых значение g равно $-$.

Тогда значение g на всех остальных наборах равно $*$. Заметим, что количество таких наборов больше или равно $s + l + t$.

Из функции f с помощью проекций и отрицаний можно получить функцию $\phi(x) = (-*)$. Далее получим функцию $\varphi(x_1, \dots, x_m)$, которая принимает значение $-$ на наборах $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_l, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_t$, а на остальных наборах принимает значение $*$, следующим образом:

$$\varphi(x_1, \dots, x_m) = \phi(\omega(x_1, \dots, x_m)),$$

где $\omega(x_1, \dots, x_m)$ является функцией из S^* , которая на наборах $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s, \tilde{\beta}_1, \dots, \tilde{\beta}_l, \tilde{\gamma}_1, \dots, \tilde{\gamma}_t$ принимает значение 0, а на остальных наборах принимает значение $*$.

Теперь рассмотрим самодвойственную функцию $\psi(x_1, \dots, x_m, y)$ такую, что $\psi(\tilde{\alpha}_i, 0) = 0, \psi(\tilde{\alpha}_i, 1) = 0, \psi(\tilde{\alpha}_i, 0) = 1, \psi(\tilde{\alpha}_i, 1) = 1,$
 $\psi(\tilde{\beta}_j, 0) = 1, \psi(\tilde{\beta}_j, 1) = 1, \psi(\tilde{\beta}_j, 0) = 0, \psi(\tilde{\beta}_j, 1) = 0,$
 $\psi(\tilde{\gamma}_k, 0) = 0, \psi(\tilde{\gamma}_k, 1) = 1, \psi(\tilde{\gamma}_k, 0) = 0, \psi(\tilde{\gamma}_k, 1) = 1.$

Покажем, что $\psi(x_1, \dots, x_m, \varphi(x_1, \dots, x_m)) = g(x_1, \dots, x_m)$. Действительно,

$$\psi(\tilde{\alpha}_i, \varphi(\tilde{\alpha}_i)) = \psi(\tilde{\alpha}_i, -) = \psi(\tilde{\alpha}_i, 0) \cap \psi(\tilde{\alpha}_i, 1) = 0 = g(\tilde{\alpha}_i),$$

$$\psi(\tilde{\beta}_j, \varphi(\tilde{\beta}_j)) = \psi(\tilde{\beta}_j, -) = \psi(\tilde{\beta}_j, 0) \cap \psi(\tilde{\beta}_j, 1) = 1 = g(\tilde{\beta}_j),$$

$$\psi(\tilde{\gamma}_k, \varphi(\tilde{\gamma}_k)) = \psi(\tilde{\gamma}_k, -) = \psi(\tilde{\gamma}_k, 0) \cup \psi(\tilde{\gamma}_k, 1) = - = g(\tilde{\gamma}_k).$$

На остальных наборах значение суперпозиции $\psi(x_1, \dots, x_m, \varphi(x_1, \dots, x_m))$ равно $*$, поскольку внутренняя функция φ принимает на них значение $*$.

Отсюда следует, что $S' \subseteq [S^* \cup \{f\}]$. Следовательно, $S' = [S^* \cup \{f\}]$. \square

Лемма 10. Для любой $f \in K_5 \setminus S'$ верно, что

$$[S' \cup \{f\}] = K_5.$$

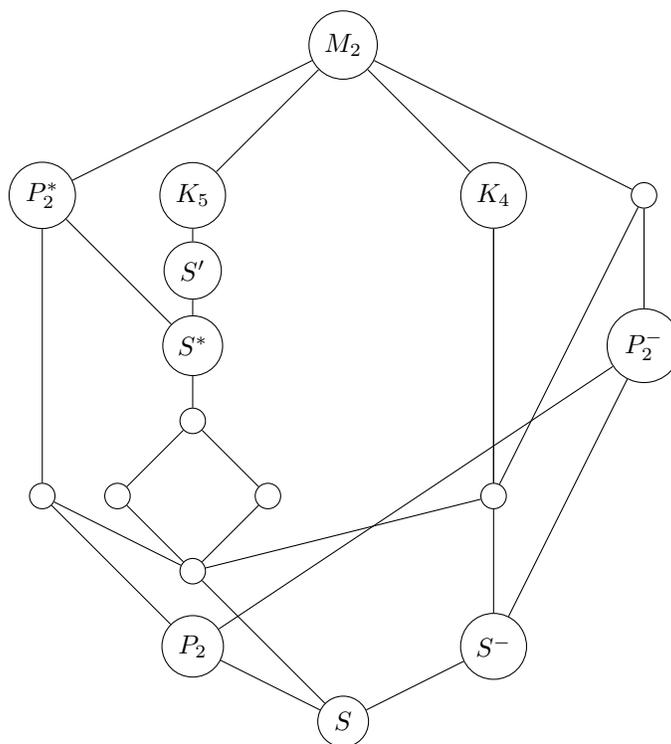
Доказательство. Включение $[S' \cup \{f\}] \subseteq K_5$ очевидно. Покажем, что любая $g(x_1, \dots, x_m) \in K_5$ может быть выражена с помощью суперпозиции функций из S' и функции $f \in K_5 \setminus S'$. Достаточно рассмотреть случай, когда $g(x_1, \dots, x_m) \in K_5 \setminus S'$. Из функции f с помощью проекций и отрицаний можно получить бинарную функцию $\varphi(x, y) \in K_5$, у которой вектор значений содержит все четыре значения $0, 1, -, *$. Из функции $\varphi(x, y)$ с помощью отрицания и перестановки переменных получим функцию $\psi(x_1, x_2) = (0 - *1)$.

Обозначим через $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s$ наборы, на которых значение g равно $-$. Обозначим через g_0 и g_1 функции, которые принимают такие же значения как и g на всех наборах кроме $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s$. На наборах $\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_s$ функция g_0 равна 0 , а функция g_1 равна 1 . Очевидно, что $g_0, g_1 \in S^*$. Остается заметить, что

$$g(x_1, \dots, x_m) = \psi(g_0(x_1, \dots, x_m), g_1(x_1, \dots, x_m)).$$

□

Теорема 6. Интервал $\mathfrak{S}(S, M_2)$ содержит ровно 17 частичных ультраклонов и изображен ниже.



Доказательство. Следует из теорем 4, 5 и лемм 3–10.

□

REFERENCES

[1] E.L. Post, *Introduction to a General Theory of Elementary Proposition*, Amer. J. Math., **43**:4 (1921),163–185.

- [2] V.B. Alekseev, A.A. Voronenko, *On some closed classes in partial two-valued logic*, Discrete Math. Appl., **4**:5 (1994), 401–419.
- [3] V.I. Panteleyev, S.Yu. Haltanova, *About some intervals in the lattice of clones of partial ultrafunctions*, The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, **4** (2010), 80–87. <http://www.mathnet.ru/links/9943b7bdc77dcb582e729bd606a9dd1d/iigum179.pdf>
- [4] S.A. Badmaev, A.E. Dugarov, I.V. Fomina, I.K. Sharankhaev, *On some intervals in the lattice of ultraclasses of rank 2*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **18**:2 (2021), 1210–1218. <http://semr.math.nsc.ru/v18/n2/p1210-1218.pdf>
- [5] V.I. Panteleyev, *Completeness Criterion for Predefined Boolean Functions (in Russian)*, Vestnik Samar. Gos. Univ. Est.-Naush. Ser., **2**:68 (2009), 60–79. <http://www.mathnet.ru/links/e18e8a8ae72878a5d55fb95d6337a2c/vsgu223.pdf>
- [6] S.A. Badmaev, *A Completeness Criterion of Set of Multifunctions in Full Partial Ultraclass of Rank 2*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **15** (2018), 450–474. <http://semr.math.nsc.ru/v15/p450-474.pdf>

SERGEI ALEXANDROVICH BADMAEV, ALEXANDR EVGENEVICH DUGAROV, IRINA VLADIMIROVNA FOMINA, IVAN KONSTANTINOVICH SHARANKHAEV
DORZHI BANZAROV BURYAT STATE UNIVERSITY,
24A, SMOLINA STR.,
670000, ULAN-UDE, RUSSIA
E-mail address: badmaevsa@mail.ru, dugarov_aleksandr@mail.ru, fomina-irina0104@yandex.ru, goran5@mail.ru