S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 17, стр. 126–140 (2020) УДК 517.55
DOI 10.33048/semi.2020.17.009 MSC 32V40

ОБ АВТОМОРФИЗМАХ CR-ПОДМНОГООБРАЗИЙ КОМПЛЕКСНОГО ГИЛЬБЕРТОВА ПРОСТРАНСТВА

М.А. СТЕПАНОВА

Abstract. It is shown that there exists only one tolally nondegenerate CR manifold of type (n, ∞) (up to the formal equivalence), and the dimension of its Lie algebra $\mathfrak{g}_+$ of positively graded formal tangent vector fields is infinite. Examples of manifolds of type (n, ∞) with algebras of any given in advance finite dimension are presented.

Keywords: CR manifold, automorphisms, totally nondegenerate manifold.

1. Введение

CR-подмногообразия бесконечномерного и конечномерного комплексного гильбертова пространства достаточно сильно отличаются друг от друга. Для демонстрации отличий мы посмотрим на многообразия с двух точек зрения: с позиции их голоморфных симметрий и с позиции их модельных поверхностей.

С каждым ростком вещественного вещественно аналитического порождающего CR-многообразия, заданным в некоторой точке, можно связать градуированную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ инфинитезимальных голоморфных автоморфизмов и рассмотреть ее положительную составляющую – подалгебру $\mathfrak{g}_+$ (см. [1]). Если числа n и k, равные соответственно CR-размерности (т.е. размерности комплексной касательной) и вещественной коразмерности многообразия и составляющие его тип (n, k), положительны и конечны, то $\mathfrak{g}_+$ в большинстве случаев оказывается тривиальной. В частности, алгебра $\mathfrak{g}_+$ тривиальна для почти любой квадратичной модельной поверхности фиксированного типа (n, k) (при некоторых ограничениях на n и k) ([2], [3]), а в случае вполне невырожденных модельных поверхностей более высоких порядков алгебра $\mathfrak{g}_+$ тривиальна всегда ([4], [5], [6]).

Stepanova, M.A., On automorphisms of CR-submanifolds of complex Hilbert space.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РНФ 18-41-05003.

Поступила 12 сентября 2019 г., опубликована 13 февраля 2020 г.

Однако если коразмерность k бесконечна, то картина становится качественно иной. Хотя определение полной невырожденности в бесконечномерном случае аналогично конечномерному и также является условием общего положения ([7]), свойства бесконечномерных модельных поверхностей типа (n,∞) оказываются противоположными: алгебра $\mathfrak{g}_+$ для вполне невырожденной поверхности оказывается бесконечномерной (утверждение 1), а конечномерными алгебрами обладают лишь исключительные поверхности, примеры которых приведены ниже (утверждения 2-6); в то же время в конечномерной ситуации для почти всех поверхностей алгебра $\mathfrak{g}_+$ оказывается тривиальной. Иными словами, типичная размерность алгебры $\mathfrak{g}_+$ в бесконечномерной ситуации наибольшая из возможных, а в конечномерной ситуации – наименьшая.

Отметим, что в наших рассмотрениях алгебры $\mathfrak{g}_+$ состоят из векторных полей, формально удовлетворяющих условию касания для рассматриваемых многообразий (см. определение 2 ниже).

Бесконечномерный случай специфичен еще и тем, что при фиксированной конечной CR-размерности n многообразия существует единственная (с точностью до формальной эквивалентности) модельная поверхность. Более того, всякое вполне невырожденное многообразие CR-размерности n, не обязательно являющееся модельным, оказывается формально эквивалентным ей (определение формальной эквивалентности см. ниже).

Также в бесконечномерном случае можно построить многообразия (без условия полной невырожденности) с любой наперед заданной размерностью алгебры $\mathfrak{g}_+$. Данное обстоятельство интересно тем, что в случае конечной коразмерности k и при фиксированном типе (n,k) во всех изученных ситуациях при тех или иных требованиях невырожденности размерности алгебр $\mathfrak{g}_+$ для всевозможных поверхностей не принимают всех подряд идущих значений (см., например, [1], [8]).

Однако в отдельных аспектах аналогия с конечномерным случаем сохраняется. В качестве следствия с помощью некоторых из построенных многообразий, перенося конструкцию работы [9] (А.Б. Сухов, 2003) на бесконечномерную ситуацию, мы можем получить системы дифференциальных уравнений второго порядка с известными симметриями: решениями этих систем будут многообразия Сегре исходных многообразий. Конструкция Сухова применима также и для конечномерных вполне невырожденных многообразий.

Автор выражает благодарность В.К. Белошапке за ценные обсуждения.

2. Вполне невырожденные многообразия

Пусть M^n – росток вполне невырожденного бесконечномерного CR-многообразия типа (n,∞), $0<n<\infty$, в начале координат в комплексном гильбертовом пространстве H (определение полной невырожденности дано в [7] для бесконечномерного случая, в котором полная невырожденность называется невырожденностью, и в [2] для конечномерного случая). Пусть в H заданы координаты $(z,w)=(z,w_2,w_3,...,w_j,...)$, где $z\in\mathbb{C}^n$, и все w_j являются конечномерными векторными переменными.

Пусть росток M^n задан в окрестности нуля векторным уравнением:

$v=\Psi(z,\bar{z},u)$,

где $w=u+iv$.

Рассмотрим также росток $\tilde{M}^n$, заданный уравнением:

$v = \tilde{\Psi}(z, \bar{z}, u)$.

Определение 1. *Будем говорить, что ростки* M^n *и* $\tilde{M}^n$ *формально эквивалентны, если существует формальное векторное преобразование*
$z \longrightarrow f(z, w)$,
$w \longrightarrow g(z, w)$,
заданное формальными степенными рядами, такое что в кольце формальных степенных рядов от переменных $z, \bar{z}, u$ *имеет место равенство*
$\operatorname{Im} g(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u)) -$
$-\tilde{\Psi}(f(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u)), \overline{f(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u))}, \operatorname{Re} g(z, u + i\Psi(z, \bar{z}, u))) = 0,$
т.е. в результате выполнения всех формальных подстановок в левой части равенства и приведения подобных слагаемых получается формальный ряд, в котором коэффициенты при всех мономах равны нулю.

Теорема 1. *Для любого натурального числа* n *все вполне невырожденные многообразия типа* (n, ∞) *формально эквивалентны.*

Иными словами, вполне невырожденное многообразие фиксированной конечной CR-размерности и бесконечной коразмерности единственно. В частности, M^n формально эквивалентно своей модельной поверхности.

Доказательство. Покажем, что росток M^n эквивалентен ростку своей модельной поверхности, откуда, ввиду единственности модельной поверхности типа (n, ∞), будет следовать утверждение теоремы.

Введем веса переменных следующим образом: вес переменной z положим равным единице, а веса переменных w_j положим равными j.

Пусть в координатах $(z, w) = (z, w_2, w_3, ..., w_j, ...)$ M^n задано в окрестности нуля бесконечной системой уравнений:
$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + O(3)$,
...
$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + O(k+1)$,
... ,
где $v_k = \operatorname{Im}\, w_k$ – векторные переменные конечной размерности, равной размерности пространства нормализованных форм веса k ([2]); $u_k = \operatorname{Re}\, w_k$, $\Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1})$ – векторы из однородных полиномов веса k, $O(k)$ – слагаемые веса не меньше k.

Запишем данную систему в виде:
$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + F_2(z, \bar{z}, u)$,
...
$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + F_k(z, \bar{z}, u)$,
... ,
где $F_k(z, \bar{z}, u) = O(k+1)$.

Без ограничения общности можно считать, что нормализованы не только выражения Φ_k (процесс нормализации для Φ_k описан в [7] для бесконечномерного случая и в [2] для конечномерного случая), но и выражения F_k. Этого можно добиться, выполнив одновременно с нормализацией слагаемых веса k в уравнении
$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + F_k(z, \bar{z}, u)$
нормализацию слагаемых веса k в уравнениях
$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + F_2(z, \bar{z}, u)$,
...

$v_{k-1} = \Phi_{k-1}(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-2}) + F_{k-1}(z, \bar{z}, u)$
последовательно для всех натуральных $k \geq 2$.

Иными словами, для каждого $k \geq 2$ нужно убрать из выражений $F_2, ..., F_{k-1}$, Φ_k формы веса k, принадлежащие пространству гармонических форм $\mathcal{H}_k$ (в обозначениях работы [2]), для чего нужно выполнить последовательно для $2 \leq j \leq k$ треугольно-полиномиальные преобразования вида:

$z \longrightarrow z,$
$v_j \longrightarrow v_j + P_{jk}(z, \bar{z}, u),$
$v_l \longrightarrow v_l,\ l \neq j,$
где P_{jk} имеют вес k.

Таким образом, для каждого k указанные нормализации являются преобразованиеми, имеющими вид:

$z \longrightarrow z,$
$v_2 \longrightarrow v_2 + P_{2k}(z, \bar{z}, u),$
...
$v_k \longrightarrow v_k + P_{kk}(z, \bar{z}, u),$
$v_l \longrightarrow v_l,\ l > k,$
где P_{jk} имеют вес k.

Отметим также, что, хотя каждая из координат участвует в бесконечном числе нормализаций, веса выражений P_{jk} и P_{jl} различны для различных k, l. Поэтому композиция всех нормализаций определена и задает формальное преобразование вида:

$z \longrightarrow z,$
$v_2 \longrightarrow v_2 + \sum_{j=2}^{\infty} P_{2j}(z, \bar{z}, u),$
...
$v_k \longrightarrow v_k + \sum_{j=k}^{\infty} P_{kj}(z, \bar{z}, u),$
... ,
и с точностью до указанного формального преобразования локальные определяющие уравнения ростка M^n нормализованы, что мы и будем предполагать далее.

Докажем по индукции, что линейным обратимым преобразованием, отличающимся от тождественного на конечномерном подпространстве, можно сделать росток M^n касательным до любого наперед заданного конечного порядка (в смысле введенных весов) к своей модельной поверхности.

В качестве базы индукциии возьмем исходные уравнения поверхности.

Предположим, что для некоторого k исходная система эквивалентна системе
$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + O(k),$
$v_3 = \Phi_3(z, \bar{z}, u_2) + O(k),$
...
$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + O(k),$
... .

Поскольку коодинаты вектора $\Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1})$ образуют базис нормализованных однородных форм веса k, то, для того чтобы убрать слагаемые веса k, нужно выполнить преобразования вида:

$W_2 = w_2 + A_{2k} w_k,$
...
$W_{k-1} = w_{k-1} + A_{(k-1)k} w_k,$
$W_l = w_l,\ l \geq k,$

где A_{jk} – матрицы.

Тогда все слагаемые, которые после замены координат могли бы изменить модельную поверхность, будут иметь вид:

$\Phi_j(z, \bar{z}, \mathcal{U}_2, \ldots, \mathcal{U}_{j-1})$,

где на месте $\mathcal{U}_l$ может стоять как соответствующее U_l ($U_l = \operatorname{Re} W_l$), так и выражение $\operatorname{Re}(A_{lk} W_k)$, причем на месте хотя бы одного из $\mathcal{U}_l$ стоит $\operatorname{Re}(A_{lk} W_k)$. Но все такие слагаемые имеют вид $O(k+1)$.

Поэтому исходная система (в новых координатах) эквивалентна системе

$v_2 = \Phi_2(z, \bar{z}) + O(k+1)$,

$v_3 = \Phi_3(z, \bar{z}, u_2) + O(k+1)$,

...

$v_k = \Phi_k(z, \bar{z}, u_2, ..., u_{k-1}) + O(k+1)$,

... .

Теперь рассмотрим композицию всех преобразований, выполнявшихся на каждом из шагов индукции. Хотя каждая из координат участвует в бесконечном числе преобразований, выражения $A_{jk} w_k$ и $A_{jl} w_l$ различны для различных k, l. Поэтому композиция определена и задает формальное преобразование вида:

$z \longrightarrow z$,

$w_2 \longrightarrow w_2 + \sum_{j=3}^{\infty} A_{2j} w_j$,

...

$w_k \longrightarrow w_k + \sum_{j=k+1}^{\infty} A_{kj} w_j$,

... ,

которое осуществляет формальную эквивалентность ростка M^n (в предположении о нормализованности его определяющих уравнений) и его модельной поверхности.

Теорема доказана. □

Замечание 1. Для бесконечного значения CR-размерности, т.е. для типа (∞, ∞), утверждение теоремы перестает быть верным: множество всех попарно неэквивалентных вполне невырожденных поверхностей указанного типа бесконечно. Действительно, в случае типа (∞, ∞) максимальный вес векторных переменных w_j может оказаться конечным, поскольку размерность некоторых из векторных переменных w_j при бесконечном значении CR-размерности может принимать бесконечные значения, и поэтому число переменных w_j может быть конечным. А если для двух поверхностей максимальные веса переменных w_j различны, то они не эквивалентны. При этом вполне невырожденное многообразие M^∞ уже не обязательно эквивалентно своей модельной поверхности (как и в ситуации конечномерных CR-многообразий).

Если для двух поверхностей типа (∞, ∞) максимальные веса переменных w_j совпадают, то они также могут оказаться неэквивалентными. Например, инвариантом является количество компонент вектора w максимальной размерности.

Замечание 2. Единственность модельной поверхности специфична не только для многообразий бесконечной коразмерности, но встречается также и в конечномерном случае. Хотя при фиксированном типе (n, k) модельных поверхностей может быть несколько (как конечное число, так и конечнопараметрическое семейство), для некоторых наборов значений n и k модельная поверхность ровно одна: единственность имеет место, если при фиксированной

CR-размерности n коразмерность k равна размерности пространства нормализованных однородных форм, вес которых не превосходит некоторого натурального числа (см. [2]), тогда как в бесконечномерной ситуации всякая вполне невырожденная поверхность сферична (т.е. эквивалентна своей модельной поверхности).

А единственность вполне невырожденного многообразия при фиксированной конечной CR-размерности уже является характерной особенностью бесконечномерного случая. Например, для жестких многообразий типа $(1,1)$ условие эквивалентности многообразия своей модельной поверхности выражается дифференциальным уравнением 6-го порядка

$$\mu_{zz\bar{z}} - 3\mu_{z\bar{z}}\mu - \mu_z\mu_{\bar{z}} + 2\mu_{\bar{z}}\mu^2 = 0,$$

где $\mu = \left(\frac{F_{zz\bar{z}}}{F_{z\bar{z}}}\right)$, на определяющую функцию F ([12]).

Определение 2. *(a) Формальным вещественным векторным полем в окрестности начала координат в комплексном гильбертовом пространстве H с конечномерными векторными координатами $(z, w_2, ..., w_j, ...)$ называется выражение вида:*

$$X = 2\mathrm{Re}\Big(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big), \tag{1}$$

где $w = (w_2, ..., w_j, ...)$, $f(z,w), g_j(z,w)$ – конечномерные векторы, чьи координаты – формальные степенные ряды.

(b) Формальным многообразием M будем называть заданную в некоторой окрестности начала координат систему уравнений вида:

$$v = \Psi(z, \bar{z}, u),$$

где $w = u + iv$, $\Psi(z,\bar{z},u)$ – бесконечномерный вектор, чьи координаты – формальные степенные ряды.

Введем градиуровку на векторных полях следующим образом:

$$[z] = 1,\ [\frac{\partial}{\partial z}] = -1,\ [w_j] = m_j,\ [\frac{\partial}{\partial w_j}] = -m_j.$$

Тогда векторные поля и формальные ряды распадаются в сумму градуированных компонент. Обозначим через $[X]_\nu$ ν-ю градуированную компоненту поля X для всех $\nu \geq 0$. Определим действие поля X на формальный ряд $F = \sum_{l=0}^{\infty} F_l$, где суммирование ведется по однородным весовым компонентам, как сумму действий компонент $[X]_\nu$ на F:

$$XF = \sum_{\nu=0}^{\infty}[X]_\nu F = \sum_{\nu=0}^{\infty}\Big[2\mathrm{Re}\Big(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)\Big]_\nu \sum_{l=0}^{\infty} F_l =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty}\Big[2\mathrm{Re}\Big(f(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)\Big]_\nu F_l.$$

Утверждение 1. *XF является корректно определенным формальным рядом.*

Доказательство. $[X]_\nu F$ является корректно определенным формальным рядом, поскольку все однородные весовые компоненты F_l являются многочленами, зависящими от конечного числа векторных переменных z, w_j (в силу конечномерности векторных переменных z, w_j), а на многочлены ненулевым образом действует лишь конечное число слагаемых компоненты X_ν, и эти слагаемые имеют вид конечномерных векторных полей $2\mathrm{Re}\Big(p(z,w)\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=2}^{N(\nu)} q_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)$ с полиномиальными коэффициентами.

Сумма $XF = \sum_{\nu=0}^{\infty}[X]_\nu F$ также корректно определена, поскольку каждый из рядов $[X]_\nu F$ имеет вид $O(\nu)$, и поэтому все однородные весовые компоненты суммы $\sum_{\nu=0}^{\infty}[X]_\nu F$ стабилизируются, начиная с некоторого момента.

Утверждение 1 доказано. □

Будем считать, что координаты ψ_l вектора $(v-\Psi(z,\bar z,u)) = (\psi_1, \psi_2, ..., \psi_l, ...)$ упорядочены по неубыванию весов и что каждый вес встречается конечное число раз (в силу конечномерности векторных переменных z, w_j этого можно добиться формальным преобразованием).

Пусть J – множество, состоящее из сумм произведений координат ψ_l на вещественные формальные степенные ряды, т.е.

$$J = \Big\{\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\,\psi_l\Big\},$$

где α_l – формальные ряды. Множество J корректно определено и образует идеал:

Утверждение 2. *J – идеал в кольце формальных степенных рядов.*

Доказательство. J состоит из корректно определенных формальных степенных рядов, поскольку все однородные весовые компоненты суммы $\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\psi_l$ стабилизируются, начиная с некоторого момента, т.к. веса координат ψ_l неубывают, а каждый вес встречается конечное число раз.

J замкнуто относительно сложения и умножения, причем произведение формального ряда и суммы вида $\sum_{l=0}^{\infty}\alpha_l\psi_l$ является корректно определенным формальным рядом вида $\sum_{l=0}^{\infty}\tilde\alpha_l\psi_l$, поэтому J есть идеал.

Утверждение 2 доказано. □

Определение 3. *(a) Формальное векторное поле X, заданное выражением* (1)*, называется касательным к формальному многообразию M, если результат действия поля на каждое из уравнений формального многообразия M принадлежит идеалу J, т.е. если каждая координата вектора*

$$X(v-\Psi(z,\bar z,u))$$

принадлежит J.

(b) Скобка $[X_1, X_2]$ двух касательных к M векторных полей

$$X_1 = 2\mathrm{Re}\Big(f_1(z,w)\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=2}^{\infty} g_{1,j}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big[2\mathrm{Re}\Big(f_1(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{1,j}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)\Big]_{\nu}$$

и

$$X_2 = 2\mathrm{Re}\Big(f_2(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{2,j}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big) =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \Big[2\mathrm{Re}\Big(f_2(z,w)\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{j=2}^{\infty} g_{2,j}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j}\Big)\Big]_{\nu}$$

определяется равенством

$$[X_1, X_2]F = X_1(X_2F) - X_2(X_1F)$$

и является касательным к M полем.

Скобка $[\cdot,\cdot]$ билинейна, кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби, которое проверяется прямой формальной выкладкой (поскольку все входящие в него выражения вида $X_\lambda(X_\mu(X_\nu F))$, где $\{\lambda,\mu,\nu\} = \{1,2,3\}$, являются корректно определенными формальными рядами).

Таким образом, доказано следующее

Утверждение 3. *Формальные неотрицательно градуированные векторные поля, касательные к формальному многообразию M^n, образуют алгебру Ли $\mathfrak{g}_{\geq 0}$.*

Обозначим через $\mathfrak{g}_+$ подалгебру всех полей положительного веса алгебры $\mathfrak{g}_{\geq 0}$.

Утверждение 4. *Для любого n алгебра $\mathfrak{g}_+$ многообразия M^n бесконечномерна.*

Данное утверждение вытекает из следующего:

Утверждение 5. *Для любых n, k $(1 \leq k \leq n)$, и любого монома $g_0(z,w)$ веса $m > 1$ существуют такие векторы $g_j(z,w)$, состоящие из голоморфных в некоторой окрестности нуля функций, что поле*

2 Re $(g_0(z,w)\frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})$ являтся касательным к M^n.

Доказательство. В силу теоремы 1 можно считать M^n модельной поверхностью. Построим векторы $g_j(z,w)$ индукцией по j. Сначала рассмотрим индукционный переход.

Предположим, что все $g_j(z,w)$, $j \leq J-1$, найдены. Построим $g_J(z,w)$.

Для этого рассмотрим уравнения

$v_J = \Phi_J(z,\bar z, u_2, ..., u_{J-1})$

и запишем условие касания:

$2\mathrm{Re}(g_0(z,w)\frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{\infty} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})(v_J - \Phi_J(z,\bar z,u_2,...,u_{J-1})) = \frac{1}{2i}(g_J(z,w) - \bar g_J(z,w)) - 2\mathrm{Re}(g_0(z,w)\frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{J-1} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})(\Phi_J(z,\bar z,u_2,...,u_{J-1})) = 0.$

Выражение $2\mathrm{Re}(g_0(z,w)\frac{\partial}{\partial z_k} + \sum_{j=1}^{J-1} g_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})(\Phi_J(z,\bar z,u_2,...,u_{J-1}))$ имеет вес $J+m-1$ и является суммой плюригармонических форм (возможно, равных нулю) и нормализованных форм. Все нормализованные формы можно разложить по базисным формам веса $J+m-1$, равным мнимым частям компонент вектора w_{J+m-1}, поэтому компоненты искомого вектора $g_J(z,w)$ будут суммами соответствующих плюригармонических форм и компонент вектора w_{J+m-1}.

База индукции есть частный случай рассмотренного построения.

Утверждение 5 доказано. $\square$

Отметим также несколько свойств для поверхностей бесконечной коразмерности.

Многообразие называется жестким, если правые части его локальных определяющих соотношений, через которые выражаются мнимые части переменных w, не зависят от переменных w.

Свойство 1. Алгебра $\mathfrak{g}$ любого жесткого многообразия бесконечной коразмерности бесконечномерна (за счет сдвигов на вещественные постоянные по переменным w_j).

С помощью конструкции Пуанкаре (см., например, [1]) стандартным образом доказывается

Свойство 2. Размерность алгебры $\mathfrak{g}_{\geq 0}$ модельной поверхности оценивает сверху размерность алгебры $\tilde{\mathfrak{g}}_{\geq 0}$ самой поверхности.

3. Примеры многообразий с конечномерными алгебрами $\mathfrak{g}_+$

Рассмотрим отдельно случай $n=1$ и построим сначала поверхность $M_{1,1}$, для которой $\dim(\mathfrak{g}_+)=1$, затем – поверхность $M_{s,1}$, для которой $\dim(\mathfrak{g}_+)=s$, а также поверхность $M_{0,1}$, для которой $\dim(\mathfrak{g}_+)=0$. После этого перейдем к случаю $n>1$ и построим примеры поверхностей $M_{s,n}$, для которых $\dim(\mathfrak{g}_+)=s$, взяв прямые суммы поверхностей, построенных для $n=1$.

Случай $\mathbf{n=1}$.

Пусть $F(z,\bar{z})$ – однородный полином степени $d>1$ без плюригармонических слагаемых, $X=2\mathrm{Re}(z^l\frac{\partial}{\partial z})$, $l>1$, а $M_{1,1}$ – поверхность, заданная в окрестности нуля системой уравнений вида:

$\mathrm{Im}\ w_1 = F(z,\bar{z})$,

$\mathrm{Im}\ w_2 = X(F(z,\bar{z}))$,

...

$\mathrm{Im}\ w_k = X^{k-1}(F(z,\bar{z}))$,

... .

Тогда поле $\Xi = (2\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{\infty} w_{j+1}\frac{\partial}{\partial w_j}) + X)$ есть элемент $\mathfrak{g}_+$. Действительно, имеем: $\Xi(\mathrm{Im}\ w_k - X^{k-1}(F(z,\bar{z}))) = \mathrm{Im}\ w_{k+1} - X^k(F(z,\bar{z})) = 0$.

Введем веса переменных следующим образом: вес переменной z положим равным единице, а веса переменных w_k положим равными $d+(l-1)(k-1)$.

Утверждение 6. *Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $M_{1,1}$ не содержит отличных от Ξ элементов.*

Для доказательства утверждения 6 нам потребуются вспомогательные леммы.

Лемма 1. *Элементы $\mathfrak{g}_+$ поверхности $M_{1,1}$ имеют вид $2\mathrm{Re}(h(z,w)\frac{\partial}{\partial z}) + \mathcal{W}$, где $h(z,w)\not\equiv 0$ – голоморфная в окрестности нуля функция.*

Здесь и далее $\mathcal{W}$ обозначает поля, содержащие дифференцирования по переменным w_j.

Доказательство. Пусть поле $W = 2\mathrm{Re}(\sum_{j=1}^{\infty} W_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})$ лежит в алгебре $\mathrm{aut}(M_{1,1})$. Тогда, записывая условие касания, получим $2\mathrm{Re}(W_j) = 0$, откуда следует, что W_j являются мнимыми константами для всех j, и поэтому $W \notin \mathfrak{g}_+$. Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Пусть поле* $2\mathrm{Re}(z^L\frac{\partial}{\partial z}+W_1(z,w)\frac{\partial}{\partial w_1})+\mathcal{W}$ *лежит в алгебре* $aut(M_{1,1})$. *Тогда* $L = l$, *причем все коэффициенты поля определены однозначно.*

Доказательство. Записывая условие касания

$(2\mathrm{Re}(z^L\frac{\partial}{\partial z}+W_1(z,w)\frac{\partial}{\partial w_1})+\mathcal{W})\mathrm{Im}\, w_1 = (2\mathrm{Re}(z^L\frac{\partial}{\partial z}+W_1(z,w)\frac{\partial}{\partial w_1})+\mathcal{W})F(z,\bar z)$, получаем

$$\frac{1}{2i}(W_1 - \bar W_1) = z^L\frac{\partial F}{\partial z} + \bar z^L\frac{\partial F}{\partial \bar z}. \tag{2}$$

Пусть $W_1 = \sum_j W_{1,j}(z)w^j$, где j – мультистепень, т.е. $w^j = w_1^{j_1}...w_s^{j_s}$ для некоторых неотрицательных целых чисел $j_1,...,j_s$. Далее через $|j|$ будем обозначать сумму $j_1+...+j_s$. В силу однородности F достаточно рассмотреть случай однородной функции W_1, т.е. $W_1(z,w) = \sum_{r,j} W_{1,r,j}z^r w^j$. При этом функция W_1 есть многочлен, т.к. сумма $\sum_{r,j} W_{1,r,j}z^r w^j$ конечна ввиду возрастания весов переменных w_k. Тогда $W_{1,r,0} = 0$ при всех r, т.к. в правой части (2) отсутствуют плюригармонические слагаемые. Отсюда получаем, что вес левой части (2) не меньше веса w_1, т.е. $l-1+d$, поэтому $L \geq l$. Далее, выражая w через $\bar w, z, \bar z$ из системы определяющих уравнений, получаем равенства $(W_{1,r,j}z^r - \bar W_{1,r,j}\bar z^r)\bar w^j = 0$, откуда $W_{1,r,j} = 0$ при $r > 1$, т.е. $W_1(z,w) = \sum W_{1,0,j}w^j$.

Рассмотрим множество Γ тех j, $|j| > 1$, для которых моном $W_{1,0,j}w^j$ входит в выражение для $W_1(z,w)$. В нем рассмотрим подмножество Γ_1 тех j, для которых w^j делится на w_1. Выражая w через $\bar w, z, \bar z$, получаем для всех $j \in \Gamma_1$ равенство:

$2iF(z,\bar z)W_{1,0,j}\frac{\bar w^j}{\bar w_1} = 0$,

откуда $W_{1,0,j} = 0$ для всех $j \in \Gamma_1$.

Далее, рассматривая множество Γ_2 тех j, для которых w^j делится на w_2, получаем равенство:

$2iXF(z,\bar z)W_{1,0,j}\frac{\bar w^j}{\bar w_2} = 0$,

откуда $W_{1,0,j} = 0$ для всех $j \in \Gamma_2$.

Продолжая аналогичным образом последовательно рассматривать множества Γ_t тех j, для которых w^j делится на w_t, получаем равенства:

$2iX^{t-1}F(z,\bar z)W_{1,0,j}\frac{\bar w^j}{\bar w_t} = 0$,

откуда $W_{1,0,j} = 0$ для всех $j \in \Gamma_t$.

Поскольку вес полинома W_1 ограничен, то за конечное число шагов мы получим равенства нулю всех коэффициентов $W_{1,0,j} = 0$ при $|j| > 1$.

Поэтому в силу однородности W_1 имеем, что $W_1 = \alpha w_s$ для некоторой константы α и некоторого номера s, откуда получаем $\alpha X^{s-1}(F(z,\bar z)) = z^L\frac{\partial F}{\partial z} + \bar z^L\frac{\partial F}{\partial \bar z}$. Это равенство возможно лишь при $L \leq l$, т.к. иначе его левая часть содержала бы мономы бистепени $(b, L-1+d-b)$, такие что $\beta < b < L$, где β – максимальная из степеней функции $F(z,\bar z)$ по переменной z, тогда как правая часть равенства таких мономов не содержит. Отсюда и из полученного выше неравенства $L \geq l$ следует $L = l$.

Т.к. коэффициент при $\frac{\partial}{\partial z}$ равен z^l, то единственность поля следует из леммы 1: действительно, если поле определено неоднозначно, то возьмем два разных поля и, вычтя одно из другого, получим, что их разность должна быть нулевой, что противоречит предположению о неоднозначной определенности поля.

Лемма 2 доказана. □

Доказательство. (Доказательство утверждения 6) Пусть в обозначениях леммы 1 $h(z,w) = \sum_j h_j(z)w^j$, где j – мультистепень. В силу однородности F достаточно рассмотреть случай однородного многочлена h, т.е. $h(z,w) = \sum_{r,j} h_{r,j} z^r w^j$. Пусть число r_{max} равно наибольшему значению индекса r в выражении для h. Тогда, записывая условие касания и выражая w через $\bar{w}, z, \bar{z}$, получаем, что $2\mathrm{Re}(z^{r_{max}}\frac{\partial}{\partial z}) + \mathcal{W}$ должно лежать в $\mathfrak{g}_+$, откуда по лемме 2 получаем, что $r_{max} = l$. С другой стороны, если вес полинома h больше l, то, выразив w через $\bar{w}, z, \bar{z}$ в условии касания, получаем, что слагаемые, зависящие только от переменных $z, \bar{z}$, не могут быть вещественными, поскольку $l > 1$. Отсюда получаем, что вес $h(z,w)$ равен l, т.е. $h(z,w) = cz^l$, где c – константа.

Утверждение 6 доказано. □

Пусть $\tilde{F}(z,\bar{z}) = F(z,\bar{z}) + o(d)$, а $\tilde{M}_{1,1}$ – поверхность, заданная с помощью $\tilde{F}(z,\bar{z})$ и z^l.

Следствие 1. *Алгебра $\mathfrak{g}_+$ поверхности $\tilde{M}_{1,1}$ одномерна.*

Доказательство. По свойству 2 размерность $\dim(\mathfrak{g}_+)$ не превосходит единицы. Но $\dim(\mathfrak{g}_+)$ также и не меньше единицы, т.к. поле Ξ, построенное для поверхности $\tilde{M}_{1,1}$, является касательным к ней.

Следствие 1 доказано. □

Утверждение 7. *Для любого натурального числа s существует поверхность бесконечной коразмерности и CR-размерности 1, такая что размерность ее алгебры $\mathfrak{g}_+$ равна s.*

Доказательство. Построим систему уравнений, задающих искомую поверхность $M_{s,1}$ в некоторой окрестности нуля, индуктивно.

Пусть $F(z,\bar{z})$ – однородный полином степени d, $1 < l_1 < ... < l_s$ – набор натуральных чисел, $X_j = 2\mathrm{Re}(z^{l_j}\frac{\partial}{\partial z}), 1 \le j \le s$. На первом шаге построения имеем уравнение:

$\mathrm{Im}\ w_0 = F(z,\bar{z})$.

На втором шаге имеем систему уравнений:

$\mathrm{Im}\ w_0 = F(z,\bar{z})$,

$\mathrm{Im}\ w_{j_1} = X_{j_1}(F(z,\bar{z})),\ 1 \le j_1 \le s$.

На шаге с номером k имеем систему уравнений:

$\mathrm{Im}\ w_0 = F(z,\bar{z})$,

$\mathrm{Im}\ w_{j_1} = X_{j_1}(F(z,\bar{z})),\ 1 \le j_1 \le s$,

...

$\mathrm{Im}\ w_{j_1,...,j_k} = X_{j_1}...X_{j_k}(F(z,\bar{z})),\ 1 \le j_1,...,j_k \le s$.

Получаем последовательность систем уравнений, таких что каждая последующая система содержит уравнения предыдущей. Объединяя все полученные системы, получаем искомую систему уравнений.

Теперь построим s полей, из которых состоит алгебра $\mathfrak{g}_+$. Для этого рассмотрим поля вида $2\mathrm{Re}(z^{l_j}\frac{\partial}{\partial z} + \sum_{s=1}^{\infty} W_{j,s}(z,w)\frac{\partial}{\partial w_s}), 1 \le j \le s$. Доказательство того, что функции $W_{j,s}(z,w)$ определены однозначно и равны некоторым из координат $w_{j_1,...,j_k}$ и что других касательных полей нет, проводится аналогично доказательству утверждения 5. Отличие заключается в том, что вместо леммы 2 нужно воспользоваться ее модификацией (которая доказывается аналогично):

Лемма 3. *Пусть поле* $2\mathrm{Re}(z^L\frac{\partial}{\partial z}+W_1(z,w)\frac{\partial}{\partial w_1})+\mathcal{W}$ *лежит в алгебре* $aut(M_{s,1})$. *Тогда* $L=l_j$ *для некоторого* j, $1\le j\le s$.

Утверждение 7 доказано. □

Пусть $\tilde{F}(z,\bar{z})=F(z,\bar{z})+o(d)$, а $\tilde{M}_{s,1}$ – поверхность, заданная с помощью $\tilde{F}(z,\bar{z})$ и z^l описанным в доказательстве утверждения 7 способом. Аналогично следствию 1 получаем

Следствие 2. *Алгебра* $\mathfrak{g}_+$ *поверхности* $\tilde{M}_{s,1}$ *имеет размерность* s.

Пусть $F_1(z,\bar{z}),F_2(z,\bar{z}),...,F_k(z,\bar{z}),...$ – однородные полиномы степеней $1<d_1<...<d_k<...$ без плюригармонических слагаемых, причем $(2\mathrm{Re}(z^t\frac{\partial}{\partial z}))(F_1(z,\bar{z}))\neq F_k(z,\bar{z})$ для всех k,t (этого всегда можно добиться, выбирая $d_2>>d_1$, т.к. число мономов однородной степени d_k растет с ростом d_k).

Рассмотрим поверхность $M_{0,1}$, заданную в окрестности нуля системой уравнений вида:

$\mathrm{Im}\, w_1=F_1(z,\bar{z})$,

$\mathrm{Im}\, w_2=F_2(z,\bar{z})$,

...

$\mathrm{Im}\, w_k=F_k(z,\bar{z})$,

... .

Утверждение 8. *Алгебра* $\mathfrak{g}_+$ *поверхности* $M_{0,1}$ *тривиальна.*

Доказательство. Доказательство того, что все поля, касательные к $M_{0,1}$, должны иметь вид $2\mathrm{Re}(z^L\frac{\partial}{\partial z}+\sum_{j=1}^{\infty}W_j(z,w)\frac{\partial}{\partial w_j})$ (с точностью до умножения на константу), где $W_j(z,w)$ есть линейные функции от w, аналогично доказательству леммы 2. Но в силу выбора полиномов $F_k(z,\bar{z})$ поле такого вида не может быть касательным к $M_{0,1}$.

Утверждение 8 доказано. □

Случай $n=1$ рассмотрен.

Случай n > 1.

Рассмотрим прямую сумму одного экземпляра поверхности $M_{s,1}$ и $(n-1)$ экземпляра поверхности $M_{0,s}$.

А именно, пусть $F(z_n,\bar{z}_n),F_{k,m}(z_m,\bar{z}_m)$, где $1\le m\le n-1$, $1\le k<\infty$, – однородные полиномы степеней $d,...,d_{m,k}>1$, причем $d_{m,1}<...<d_{m,k}<...$; $1<l_1<...<l_s$ – набор натуральных чисел, $X_j=2\mathrm{Re}(z^{l_j}\frac{\partial}{\partial z}),1\le j\le s$.

Пусть $M_{s,n}$ – многообразие, заданное в окрестности нуля системой уравнений:

$\mathrm{Im}\, w_{1,1}-F_{1,1}(z_1,\bar{z}_1)=0$,

...

$\mathrm{Im}\, w_{1,n-1}-F_{1,n-1}(z_{n-1},\bar{z}_{n-1})=0$,

$\text{Im } w_{1,n} - F(z_n, \bar{z}_n) = 0,$
$\text{Im } w_{2,1} - F_{2,1}(z_1, \bar{z}_1) = 0,$
$...$
$\text{Im } w_{2,n-1} - F_{2,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) = 0,$
$\text{Im } w_{2,n-1+j_1} - X_{j_1}(F(z_n, \bar{z}_n)) = 0,\ 1 \leq j_1 \leq s.$
$...$
$\text{Im } w_{k,1} - F_{k,1}(z_1, \bar{z}_1) = 0,$
$...$
$\text{Im } w_{k,n-1} - F_{k,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1}) = 0,$
$\text{Im } w_{k,j_1,...,j_k} - X_{j_1}...X_{j_k}(F(z_n, \bar{z}_n)) = 0,\ 1 \leq j_1, ..., j_k \leq s,$
$...\ .$

Утверждение 9. *Алгебра* $\mathfrak{g}_+$ *поверхности* $M_{s,n}$ *имеет размерность* s.

Доказательство. Предположим, что касательное поле имеет вид $2\text{Re}(f(z_1, ..., z_n, w)\frac{\partial}{\partial z_m}) + \mathcal{W}$, где $f(z_1, ..., z_n)$ – однородный полином веса $\mu > 1$. Аналогично доказанному в лемме 2 получаем, что f не зависит от w и что остальные коэффициенты данного поля являются линейными функциями от компонент вектора w. Запишем условие касания для второго по порядку уравнения, зависящего от переменной z_m (т.е. для уравнения $0 = \text{Im } w_{2,n-1} - F_{2,n-1}(z_{n-1}, \bar{z}_{n-1})$, если $m < n$, или для уравнения $0 = \text{Im } w_{2,n} - X_{j_1}(F(z_n, \bar{z}_n))$, если $m = n$). Получим, что некоторые из мономов делятся на $z_m\bar{z}_m$ и не равны тождественно нулю. Следовательно, компоненты вектора w, от которых зависят коэффициенты рассматриваемого поля, выражаются через переменные $z_m, \bar{z}_m$. Поэтому полином $f(z_1, ..., z_n)$ может зависеть только от переменной z_m, а значит размерность алгебры $\mathfrak{g}_+$ прямого произведения равна сумме размерности алгебр прямых сомножителей.

Утверждение 9 доказано. □

Для поверхностей $M_{s,n}$ имеет место аналог следствия 2.

Пусть $\tilde{M}_{s,n}$ – поверхность, заданная с помощью $\tilde{F}(z_n, \bar{z}_n) = F(z_n, \bar{z}_n) + o(d), \tilde{F}_{k,m}(z_m, \bar{z}_m) = F_{k,m}(z_m, \bar{z}_m) + o(d)$.

Следствие 3. *Алгебра* $\mathfrak{g}_+$ *поверхности* $\tilde{M}_{s,n}$ *имеет размерность* s.

Случай $n > 1$ рассмотрен.

4. Системы дифференциальных уравнений, соответствующие многообразиям $M_{s,n}$

Пусть H – гильбертово пространство с координатами $(z, w) = (z_1, ..., z_n, w)$, где w бесконечномерна, M – подмногообразие H, заданное в окрестности начала координат системой уравнений $\mathcal{F}(z, \bar{z}, w, \bar{w}) = 0$. Для всех точек (ζ, ω) из этой окрестности комплексные подмногообразия $Q(\zeta, \omega) := \{(z, w) : \mathcal{F}(z, \zeta, w, \omega) = 0\}$ называются многообразиями Сегре. Переменные w рассматриваются как зависимые от переменных $z : w = w(z)$.

Для вполне невырожденных многообразий M^n, рассмотренных выше, можно выписать систему дифференциальных уравнений второго порядка, решениями которой являются их многообразия Сегре. Для этого применим конструкцию, описанную в [9]. Данная конструкция переносится на случай бесконечномерного пространства, поскольку теорема о неявной функции, теорема о существовании и единственности решения для систем дифференциальных уравнений и теорема Фробениуса применимы и в бесконечномерном пространстве (см. [10]).

Рассмотрим систему уравнений $2i\mathcal{F}^n(z,\bar{z},w,\bar{w}) = w-\bar{w}$, определяющую M^n в окрестности нуля, и осуществим такую линейную замену координат, что первое уравнение системы примет вид $\tilde{v}_1 = z_1\bar{z}_1 + ... + z_n\bar{z}_n$ (далее для простоты обозначений тильду над w_1 опускаем).

Продифференцировав соответствующее ему уравнение $w_1 - \omega_1 = 2i(z_1\zeta_1 + ... + z_n\zeta_n)$ по переменным $z_1, ..., z_n$, выразим переменные $\zeta_1, ..., \zeta_n$:

$(w_1)_{z_1} = 2i\zeta_1,$

...

$(w_1)_{z_n} = 2i\zeta_n,$

где нижний индекс z_j обозначает частную производную по этой переменной.

Отсюда получаем искомую систему:

$(w_1)_{z_jz_k} = 0,\ 1 \le j,k \le n,$

$\frac{1}{2i}(w_t)_{z_j} = ((\mathcal{F}^n)_t(z,\zeta,w,\omega(\zeta,z,w)))_{z_j},\ 1 \le j \le n,\ t > 1,$

в которую нужно подставить выражения для ζ через производные функции w_1.

Если полиномы $F(z_n,\bar{z}_n), F_{1,m}(z_m,\bar{z}_m),\ 1 \le m \le n-1$, участвующие в определении многообразия $M_{s,n}$, равны соответственно мономам $z_n\bar{z}_n$ и $z_m\bar{z}_m,\ 1 \le m \le n-1$, то для многообразия $M_{s,n}$, заданного с помощью системы $2i\mathcal{F}_{s,n}(z,\bar{z},w,\bar{w}) = w-\bar{w}$, дифференциальные уравнения выписываются аналогично (после линейной замены координат):

$(w_1)_{z_jz_k} = 0,\ 1 \le j,k \le n,$

$\frac{1}{2i}(w_t)_{z_j} = ((\mathcal{F}_{s,n})_t(z,\zeta,w,\omega(\zeta,z,w)))_{z_j},\ 1 \le j \le n,\ t > 1,$

в которую нужно подставить выражения для ζ через производные функции w_1.

Конструкции, описанные для многообразий M^n и $M_{s,n}$, являются частными случаями следующей более общей ситуации. Рассмотрим многообразие M типа (n,k), заданное в окрестности нуля системой уравнений $2i\mathcal{F}(z,\bar{z},w,\bar{w}) = w-\bar{w}$, имеющей вид:

$v_1 = \sum_j |z_j|^2,$

$v_2 = F_2(z,\bar{z},u_1),$

...

$v_l = F_l(z,\bar{z},u_1,...,u_{l-1}),$

... ,

где F_l – однородные полиномы степени d_l, n - CR-размерность, а величины n и k могут быть как конечными, так и бесконечными.

Соответствующие параметры ζ_j выражаются через производные $(w_1)_{z_j}$, а выражения для параметров $\omega_j = \omega_j(\zeta,z,w)$ вычисляются рекуррентным образом.

Получаем аналогичную рассмотренным выше систему:

$(w_1)_{z_jz_k} = 0,\ 1 \le j,k \le n,$

$\frac{1}{2i}(w_t)_{z_j} = ((\mathcal{F})_t(z,\zeta,w,\omega(\zeta,z,w)))_{z_j},\ 1 \le j \le n,\ t > 1,$

в которую нужно подставить выражения для ζ через производные функции w_1.

Пользуясь теоремой о неявной функции, можно также построить систему уравнений для многообразия $\tilde{M}$, заданного в окрестности нуля системой уравнений $2i\tilde{\mathcal{F}}(z,\bar{z},w,\bar{w}) = w-\bar{w}$, имеющей вид:

$$
\begin{aligned}
&v_1 = \sum_j |z_j|^2 + O(3),\\
&v_2 = F_2(z, \bar{z}, u_1) + O(d_1),\\
&...\\
&v_l = F_l(z, \bar{z}, u_1, ..., u_{l-1}) + O(d_l),\\
&... .
\end{aligned}
$$

References

[1] V.K. Beloshapka, *Real submanifolds in complex space: their polynomial models, automorphisms, and classification problems*, Russ. Math. Surv., **57**:1 (2002), 1–41. Zbl 1053.32022

[2] V.K. Beloshapka, *Universal models for real submanifolds*, Math. Notes, **75**:4 (2004), 475–488. Zbl 1063.32010

[3] V.K. Beloshapka, *On holomorphic transformations of a quadric*, Math. USSR, Sb., **72**:1 (1992), 189–205. Zbl 0728.32011

[4] R.V. Gammel', I.G. Kossovskii, *The envelope of holomorphy of a model third-degree surface and the rigidity phenomenon*, Proc. Steklov Inst. Math., **253** (2006), 22–36. Zbl 1351.32059

[5] Jan Gregorovic, *On the Beloshapka's rigidity conjecture for real submanifolds in complex space*, https://arxiv.org/abs/1807.03502

[6] M. Sabzevari, A. Spiro, *On the geometric order of totally nondegenerate CR manifolds*, https://arxiv.org/abs/1807.03076

[7] V.K. Beloshapka, *Model-surface method: an infinite-dimensional version*, Proc. Steklov Inst. Math., **279** (2012), 14–24. Zbl 1302.32039

[8] V.K. Beloshapka, *On the dimension of the group of automorphisms of an analytic hypersurface*, Math. USSR, Izv., **14**:2 (1980), 223–245. Zbl 0456.32015

[9] A.B. Sukhov, *On transformations of analytic CR-structures*, Izv. Math., **67**:2 (2003), 303–332. Zbl 1083.32504

[10] H. Cartan, *Differentsialnoe ischislenie. Differentsialnye formy.* Mir, Moskau, 1971. Zbl 0223.35004

[11] S.S. Chern, J.K. Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta Math., **133**:3-4 (1974), 219–271. Zbl 0302.32015

[12] A.V. Loboda, *Sphericity of rigid hypersurfaces in C^2*, Math. Notes, **62**:3 (1997), 329–349. Zbl 0923.32017

Maria Aleksandrovna Stepanova
Lomonosov Moscow State University,
1, Leninskie Gory,
Moscow, 119991, Russia
E-mail address: step_masha@mail.ru