S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 804–808 (2022) УДК 512.54
DOI 10.33048/semi.2022.19.067 MSC 20B05

ФОРМУЛА МАКСИМАЛЬНО ВОЗМОЖНОГО РАНГА КОММУТАНТОВ КОНЕЧНЫХ p-ГРУПП

Б.М. ВЕРЕТЕННИКОВ

Abstract. All groups in the abstract are finite. We define rank $d(G)$ of a p-group G as the minimal number of generators of G. In this paper, we obtain a compact formula for the strict upper bound of the ranks of commutator subgroups of finite p-groups generated by elements of given orders. This bound was described in a recent article of the author. But the corresponding formula was very complicated although containing some useful information. The new formula is much more simple and clear.

Keywords: finite p-group generated by elements of orders $p^{k_1}, \dots, p^{k_n}$, number of generators of commutator subgroup of a finite p-group.

1. Введение

В данной статье мы рассматриваем вопрос о максимально возможном ранге коммутантов конечных p-групп в зависимости от порядков порождающих элементов этих групп.

В теоремах 3 и 5 статьи [1] этот вопрос был решен, однако соответствующая формула максимально возможного ранга получилась очень сложной и малодоступной для использования. В предлагаемой статье получена компактная и довольно простая формула, решающая окончательно поставленный вопрос.

Заметим однако, что результаты [1] имеют самостоятельный интерес и новая формула не отменяет эти результаты.

Во втором разделе статьи приводятся некоторые обозначения и результаты из [1].

В третьем разделе доказывается основной результат статьи.

Veretennikov, B.M., The formula of maximal possible rank of commutator subgroups of finite p-groups .

Поступила 27 марта 2022 г., опубликована 11 ноября 2022.

Теорема 1. *Пусть конечная p-группа G порождается элементами $a_1, \dots, a_n$, где $n \geq 2$, порядков $p^{k_1}, \dots, p^{k_n}$, соответственно, k_i – положительные числа. Тогда*

$$d(G') \leq (n-1)p^{k_1+\dots+k_n} - \sum_{i=1}^{n} p^{k_1+\dots+\widehat{k_i}+\dots+k_n} + 1,$$

причем для некоторой конечной p-группы G данное неравенство является равенством.

Здесь "символ $\widehat{\ }$" над k_i в сумме $k_1 + \dots + \widehat{k_i} + \dots + k_n$ означает, что k_i исключается из суммы $\sum\limits_{j=1}^{n} k_j$.

Следствие 1. *Если конечная p-группа G порождается n элементами порядка p, то*

$$d(G') \leq (n-1)p^n - np^{n-1} + 1,$$

причем это неравенство не улучшаемо.

При $p = 2$ получается неравенство $d(G') \leq (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1$.

Этот результат был получен в [2] в виде:

$$d(G') \leq \tbinom{n}{2} + 2\tbinom{n}{3} + \dots + (n-1)\tbinom{n}{n}.$$

То, что правые части в последних двух неравенствах равны, доказывается во втором разделе статьи.

В заключение статьи исправляется ошибка в примере 1 статьи [1].

2. Обозначения и предварительные результаты

Мы используем стандартные понятия и обозначения теории групп. Отметим лишь, что m-й член нижнего центрального ряда группы G обозначается G_m. Таким образом,

$$G_m = \langle [g_1, \dots, g_m] | g_i \in G, i = \overline{1, m} \rangle = [G_{m-1}, G],$$

для любого $m \geq 2$ и $G_1 = G$.

Лемма 1. *Для любого натурального $n \geq 2$ справедливо равенство*

$$\tbinom{n}{2} + 2\tbinom{n}{3} + \dots + (n-1)\tbinom{n}{n} = (n-1)2^n - n2^{n-1} + 1.$$

Доказательство. Сначала имеем для любого $k \geq 1$:

$$(n-1)\tbinom{n}{k} - n\tbinom{n-1}{k} =$$
$$(n-1)\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} - n\frac{(n-1)\dots(n-k)}{k!} =$$
$$\frac{(n-1)\dots(n-k+1)}{k!}(n(n-1) - n(n-k)) = (k-1)\tbinom{n}{k}.$$

Следовательно,

$$(n-1)2^n - n2^{n-1} + 1 =$$
$$(n-1)(\tbinom{n}{0} + \tbinom{n}{1} + \dots + \tbinom{n}{n}) - n\left(\tbinom{n-1}{0} + \tbinom{n-1}{1} + \dots + \tbinom{n-1}{n-1}\right) + 1 =$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}\left((n-1)\tbinom{n}{k} - n\tbinom{n-1}{k}\right) + (n-1)\tbinom{n}{n} + 1 =$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}(k-1)\tbinom{n}{k} + (n-1)\tbinom{n}{n} + 1 =$$

$$-1+\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+\cdots+(n-2)\binom{n}{n-1}+(n-1)\binom{n}{n}+1=$$

$$\binom{n}{2}+2\binom{n}{3}+\cdots+(n-1)\binom{n}{n}.$$

□

Лемма 2. *Пусть $G=\langle a_1,\ldots,a_n\rangle$, где все элементы a_i имеют конечные порядки. Тогда для любого $m\geq 2$*

$$G_m=\langle [a_{i_1},\ldots,a_{i_s}] | s\geq m\rangle.$$

Доказательство. Обозначим правую часть доказываемого равенства буквой K. Ясно, что $K\leq G_m$.

С другой стороны, любой элемент x из G в силу конечности порядков элементов a_i имеет вид:

$$x=a_{j_1}\ldots a_{j_t}.$$

Тогда в силу основных коммутаторных соотношений

$$[ab,c]=[a,c]^b[b,c],$$

$$[a,bc]=[a,c][a,b]^c,$$

любой коммутатор

$$[x_1,\ldots,x_m],$$

где все $x_i\in G$, может быть записан в виде произведения коммутаторов вида $[a_{i_1},\ldots,a_{i_s}]$, где $s\geq m$. Таким образом, $G_m\leq K$. □

Лемма 3 ([1], лемма 1)**.** *Если G — метабелева группа, то для любого $x\in G'$ и любых $y_1,\ldots,y_m$ из G значение коммутатора $[x,y_1,\ldots,y_m]$ не меняется при любой перестановке местами элементов $y_1,\ldots,y_m$ в этом коммутаторе.*

Лемма 4 ([1], теорема 1)**.** *Пусть p – простое число, $n\geq 2$, G–конечная p-группа, порожденная элементами $a_1,\ldots,a_n$ порядков $p^{k_1},\ldots,p^{k_n}$, соответственно, где все k_i – положительные числа. Тогда если G' – элементарная абелева группа, то*

a) *любой коммутатор $[a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_k}]$, в последовательности индексов которого $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ какое-либо число j из $[1,n]$ встречается больше $p^{k_j}-1$ раз, равен 1;*
b) *G' порождается коммутаторами вида $[a_{i_1},a_{i_2},\ldots,a_{i_k}]$, где $k\geq 2$, $i_1>i_2$, $i_2\leq i_3\leq\cdots\leq i_k$, причем для любого j из $[1,n]$ число j может встречаться в последовательности $(i_1,i_2,\ldots,i_k)$ не более $p^{k_j}-1$ раз.*

3. Доказательство теоремы 1

В виду того, что в любой конечной p-группе G справедливо то, что $G'/\Phi(G')$ – элементарная абелева группа и $d(G'/\Phi(G'))=d(G')$, можно считать G' элементарной абелевой группой.

Кроме того, в виду условия a) в лемме 4 мы можем считать, что в любом рассматриваемом коммутаторе, составленном из порождающих группу G' элементов a_i, для любого i элемент a_i встречается не более $p^{k_i}-1$ раз.

Посчитаем количество таких коммутаторов вида $[a_n,a_{n-1},a_{i_3},\ldots]$. Поскольку $n-1\leq i_3\leq\ldots$, то число таких коммутаторов равно

$$(p^{k_{n-1}}-1)(p^{k_n}-1).$$

Это следует из того, что в последовательности $a_{i_3}, a_{i_4}, \dots$ сначала идут элементы a_{n-1} в количестве от 0 до $p^{k_{n-1}} - 2$, а потом элементы a_n в количестве от 0 до $p^{k_n} - 2$.

При подсчете количества коммутаторов вида

$$[a_n, a_{n-2}, a_{i_3}, \dots],$$

где $n-2 \le i_3 \le \dots$ мы учитываем, что в последовательности $a_{n-2}, a_{i_3}, \dots$ сначала идут элементы a_{n-2} в количестве от 0 до $p^{k_{n-2}} - 2$, затем элементы a_{n-1} в количестве от 0 до $p^{k_{n-1}} - 1$, и затем элементы a_n в количестве от 0 до $p^{k_n} - 2$.

Таким образом, число коммутаторов вида

$$[a_n, a_{n-2}, a_{i_3}, \dots],$$

где $n-2 \le i_3 \le \dots$, равно

$$(p^{k_n} - 1)p^{k_{n-1}}(p^{k_{n-2}} - 1).$$

Продолжая таким образом, найдем, что количество коммутаторов вида

$$[a_n, a_1, a_{i_3}, \dots],$$

где $1 \le i_3 \le \dots$, равно

$$(p^{k_n} - 1)p^{k_{n-1}}p^{k_{n-2}} \dots p^{k_2}(p^{k_1} - 1).$$

Складывая полученные количества коммутаторов вида

$$[a_n, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots],$$

где $n > i_2$, $i_2 \le i_3 \le \dots$ при фиксированных i_2 от $n-1$ до 1, получим общее количество коммутаторов указанного вида

$$\begin{gathered}(p^{k_n} - 1)(p^{k_{n-1}} - 1) + (p^{k_n} - 1)p^{k_{n-1}}(p^{k_{n-2}} - 1) + \\ (p^{k_n} - 1)p^{k_{n-1}}p^{k_{n-2}}(p^{k_{n-3}} - 1) + \dots + (p^{k_n} - 1)p^{k_{n-1}}p^{k_{n-2}} \dots p^{k_2}(p^{k_1} - 1) = \\ (p^{k_n} - 1)((p^{k_{n-1}} - 1) + p^{k_{n-1}}(p^{k_{n-2}} - 1) + p^{k_{n-1}}p^{k_{n-2}}(p^{k_{n-3}} - 1) + \dots + \\ p^{k_{n-1}}p^{k_{n-2}} \dots p^{k_2}(p^{k_1} - 1)) = \\ (p^{k_n} - 1)(p^{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}} - 1)\end{gathered}$$

Рассуждая аналогичным образом, получим, что число коммутаторов вида

$$[a_{n-1}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots],$$

где $n-1 > i_2$, $i_2 \le i_3 \le \dots$, равно

$$(p^{k_{n-1}} - 1)(p^{k_1+k_2+\dots+k_{n-2}} - 1)p^{k_n},$$

число коммутаторов вида

$$[a_{n-2}, a_{i_2}, a_{i_3}, \dots],$$

где $n-2 > i_2$, $i_2 \le i_3 \le \dots$, равно

$$(p^{k_{n-2}} - 1)(p^{k_1+k_2+\dots+k_{n-3}} - 1)p^{k_n}p^{k_{n-1}},$$

и так далее.

Тогда общее число S коммутаторов вида

$$[a_j, a_i, a_{i_3}, \dots],$$

где $j > i$, $i \le i_3 \le \dots$ и каждый элемент a_m при $1 \le m \le n$ встречается не более $p^{k_m} - 1$ раз, равно

$$(p^{k_n} - 1)(p^{k_1+k_2+\dots+k_{n-1}} - 1) +$$

$$(p^{k_{n-1}}-1)(p^{k_1+k_2+\dots+k_{n-2}}-1)p^{k_n}+$$
$$(p^{k_{n-2}}-1)(p^{k_1+k_2+\dots+k_{n-3}}-1)p^{k_n}p^{k_{n-1}}+\dots+$$
$$(p^{k_2}-1)(p^{k_1}-1)p^{k_n}p^{k_{n-1}}\dots p^{k_3}.$$

Преобразуя полученное выражение S, получим требуемый результат:

$$S=(n-1)p^{k_1+\dots+k_n}-$$
$$p^{k_1+\dots+k_{n-1}}-p^{k_1+\dots+k_{n-2}+k_n}-p^{k_1+\dots+k_{n-3}+k_{n-1}+k_n}-\dots-$$
$$p^{k_1+k_3+\dots+k_n}-p^{k_n}-p^{k_{n-1}}p^{k_n}-p^{k_{n-2}}p^{k_{n-1}}p^{k_n}-\dots-$$
$$p^{k_2}p^{k_3}\dots p^{k_n}+1+$$
$$p^{k_n}+p^{k_n}p^{k_{n-1}}+\dots+p^{k_n}p^{k_{n-1}}\dots p^{k_3}=$$
$$(n-1)p^{k_1+\dots+k_n}-\sum_{i=1}^{n}p^{k_1+\dots+\widehat{k_i}+\dots+k_n}+1,$$

где “символ$\widehat{\ }$” над k_i в сумме $k_1+\dots+\widehat{k_i}+\dots+k_n$ означает, что k_i исключается из этой суммы.

Теперь справедливость нашей теоремы следует из леммы 4, а также теоремы 2 из [1].

В примере 1 в [1] посчитано, что максимально возможный ранг коммутанта конечной 2-группы, порожденной элементами 8, 4 и 2, равен 69.

Однако, равенство $M_k(7,3,2)=5$ в этом примере верно только при $k=2$, а при $3\le k\le 6$ имеем $M_k(7,3,2)=6$. Поэтому $M(7,3,2)=41$, а не 37, и $D(3,2,1,2)=73$. Следовательно, максимально возможный ранг коммутантов 2-групп из этого класса равен не 69, а 73. Это соответствует формуле из теоремы 1, доказанной выше:

$$2\cdot 2^{3+2+1}-2^{3+1}-2^{3+2}-2^{2+1}+1=73.$$

References

[1] B.M. Veretennikov, *The strict upper bound of ranks of commutator subgroups of finite p-groups*, Sib. Èlectron. Mat. Izv., **16** (2019), 1885–1900. Zbl 1436.20040

[2] B.M. Veretennikov, *On the commutator subgroups of finite 2-groups generated by involutions*, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **2**3:4 (2017), 77–84.

Boris Michailovich Veretennikov
Ural Federal University,
19 Mira street,
620002 Ekaterinburg, Russia
Email address: boris@veretennikov.ru