Рецензия статьи “Разделение спектра матриц относительно прямой” авторов Э.А. Бибердорф и Ван Ли, представленной для публикации в журнал Сибирские электронные математические известия

Статья начинается пересказом известных фактов и алгоритмов, которые уже опубликованы неоднократно. Секции 1.1, 1.2, 1.3, 2.1, 2.2 можно и нужно исключить из представленной статьи, сделав соответствующие ссылки на оригинальные работы, где эти факты и алгоритмы были впервые рассмотрены и доказаны.

Мотивация для понятий матричного псевдоспектра и спектральной дихотомии очень хорошо изложена в книге С.К. Годунова “Современные аспекты линейной алгебры” (1997). Достаточно сослаться на соответствующие страницы этой книги, а не пересказывать их в представленной статье.

Результаты представленной статьи опираются на алгоритм дихотомии для матричных пучков, который впервые появился и был детально разработан в следующих статьях. Ни одна из этих статей не процитирована.

1. А.Н. Малышев, “Вычисление инвариантных подпространств регулярного линейного пучка матриц”, Сиб. матем. журн., **30**:4 (1989), 76–86; Siberian Math. J., **30**:4 (1989), 559–567.

2. А.Н. Малышев, “Гарантированная точность в спектральных задачах линейной алгебры”, Тр. Ин-та математики, **17** (1990), 19–104.

По существу представленная статья начинается с секции 3, где предлагается использовать дробно-линейное преобразование, известное под именем Кэли, переводящее левую полуплоскость комплексных чисел в единичный круг и наоборот. Новизны тут особой нет, поскольку это преобразование давно и широко используется специалистами в линейной алгебре. Например, есть такая довольно длинная статья, которая целиком посвящена дробно-линейным преобразованиям для спектральных задач:

D. S. Mackey, N. Mackey, Ch. Mehl, V. Mehrmann, “Möbius transformations of matrix polynomials”, Linear Algebra Appl., **470** (2015) 120–184.

Кстати, матричный пучок в формуле (3.9) используется в работе

A.N. Malyshev, “Parallel algorithm for solving some spectral problems of linear algebra”, Linear Algebra Appl., **188/189** (1993), 489–520,
в контексте интерпретации метода матричной сигнум-функции для матрицы A как алгоритма вычисления дихотомии пучка $\lambda(I-A)+(I+A)$ неортогональным вариантом метода статьи 1, указанной выше.

На странице 151 представленной статьи есть замечание. Было бы очень и очень любопытно узнать, как авторы смогут редуцировать сингулярный пучок до регулярной части с помощью сингулярного исчерпывания из [25].

Достаточно трудоемкое вычисление дихотомии для матричной экспоненты e^A делается только ради получения параметра дихотомии в виде $\|\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(i\xi I-A)^{-*}(i\xi I-A)^{-1}d\xi\|$. В представленной статье ничего не говорится о параметре дихотомии, который по факту вычисляется после преобразования Кэли, в том числе в примерах статьи.

Подведем итоги. В представленной работе просчитана пара примеров. Несложных, поскольку первый пример совсем простенький, а для оператора Орра-Зомерфельда спектральная дискретизация давно и хорошо известна всем специалистам и даже использовалась в работе первого автора [20] для алгоритма дихотомии. Новых теоретических результатов нет. Текст написан хорошо, читается легко.