

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxxУДК 519.61
MSC 65F15РАЗДЕЛЕНИЕ СПЕКТРА МАТРИЦ ОТНОСИТЕЛЬНО
ПРЯМОЙ

Э.А. Бибердорф, Ван Ли

АБСТРАКТ. The paper proposes a new method for separating the matrix spectrum with respect to a straight line, based on a linear-fractional transformation. Compared to approaches based on exponential transformation, it has several advantages. Firstly, its implementation does not require the calculation of the matrix exponent. Second, if it is applied to a matrix pencil, there is no need to calculate the inverse matrix. The examples showed that the scope of its applicability is larger than that of the method using exponential, and the number of iterations required for its convergence is much less.

Keywords: eigenvalues, spectrum dichotomy, invariant subspaces.

ВВЕДЕНИЕ

В данной работе предлагается новый подход к проблеме определения расположения спектра заданной матрицы относительно мнимой оси, которая возникает, в частности, в задачах устойчивости.

Структура работы следующая. В первом разделе обсуждаются различные постановки спектральных задач для несимметричных матриц и их связь с понятием псевдоспектра. В разделе 2 приведены факты, лежащие в основании базовых алгоритмов дихотомии матричного спектра. Далее в разделе 3 описан способ разделения матричного спектра относительно мнимой оси с использованием дробно-линейного преобразования. Затем (раздел 4) приведены результаты его применения в сравнении с другими подходами. Также работа алгоритма демонстрируется на примере спектральной задачи для оператора Орра-Зоммерфельда для плоскопараллельного течения Пуазейля.

Бибердорф Э.А., Ван Ли, Разделение спектра матриц относительно прямой.

© 2022 Бибердорф Э.А., Ван Ли.

Работа выполнена в рамках гос. задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0008).

Received January, 1, 2015, published March, 1, 2015.

1. ПОСТАНОВКИ СПЕКТРАЛЬНЫХ ЗАДАЧ

1.1. Роль псевдоспектра при решении прикладных задач. Информация о расположении спектров линейных операторов используется для решения большого круга прикладных задач. При этом для многих из них характерны общие специфические свойства. Например, для решения задач устойчивости не нужно определение местоположения каждого собственного значения в отдельности. Вместо этого требуется информация о группах собственных значений, находящихся в областях устойчивости или неустойчивости.

Другой общей чертой прикладных задач, сводящихся к спектральной проблеме с несимметричным оператором, является непредсказуемая зависимость спектра от возмущения оператора. Это связано с тем, что модуль непрерывности собственных значений в несимметричном случае может быть довольно большим, а для его определения, в отличие от симметричного случая, не существует удовлетворительных оценок. Известные оценки, например, теорема Островского [1], даже в простых случаях сильно завышены и не могут применяться на практике.

Для иллюстрации и исследования этого феномена удобно использовать ε -спектр или псевдоспектр $\Lambda_\varepsilon(A)$ (см. [2], [3]). По определению к ε -спектру $n \times n$ матрицы A относятся те комплексные числа λ , для которых матрица $A - \lambda I$ «почти вырождена»

$$\sigma_{\min}(A - \lambda I) \leq \varepsilon.$$

Здесь и далее I – единичная матрица соответствующего размера, σ_{\min} – минимальное сингулярное число. Для визуализации структуры ε -спектра можно использовать график функции

$$(1.1) \quad f(\lambda) = \log_{10} \sigma_{\min}(A - \lambda I),$$

представленный, например, с помощью линий уровня (см. пример в разделе 4). Заметим, что изображение псевдоспектра матрицы не гарантирует, что на нем будут видны все собственные значения, лежащие в данной области. Некоторые пятна ε -спектра могут быть настолько небольшими, что их легко пропустить при вычислении значений функции (1.1) даже на сетке с довольно мелкой ячейкой.

Модуль непрерывности зависимости спектра от оператора, т.е. коэффициент пропорциональности между возмущением оператора $\|\Delta A\| \leq \varepsilon$ и возмущением собственных значений $|\lambda_j(A) - \lambda_j(A + \Delta A)|$, определяется размерами пятен ε -спектра для заданного ε . Если спектр лежит в области устойчивости, но часть ε -спектра при малом $\varepsilon > 0$ попадает в область неустойчивости, то возможна парадоксальная только на первый взгляд ситуация, когда, например, решения системы $y' = Ay$ устойчивы, а возмущенной системы $y' = (A + \Delta A)y$ – неустойчивы, либо решение устойчивой системы на начальном временном интервале показывает большой рост (см. примеры в [4]). В таких ситуациях говорят о «практической» неустойчивости, которая в реальности может приводить к разрушениям инженерных конструкций, развитию турбулентности течений и т.д. [5].

Таким образом, для решения большого круга прикладных задач знания расположения точек спектра недостаточно, необходима информация о величине и расположении спектральных пятен. В этом смысле спектральная задача в

классической постановке, которая ориентирована именно на вычисление отдельных собственных значений, с одной стороны избыточна, а с другой стороны - недостаточна.

1.2. Исследования псевдоспектра и критерии расположения спектра в заданной области. На устранение недостатка информации о спектральных пятнах в рамках классической постановки спектральной задачи направлены работы, посвященные разработке методов изображения псевдоспектра (см., например, [6]). Другой возможный подход заключается в исследовании, какие из собственных значений наименее устойчивы к возмущению оператора [7].

В то же время многие известные работы можно трактовать, как поиск альтернативной постановки спектральной задачи. К ним можно отнести статьи, посвященные подбору численного критерия (или критериев), которым образом характеризует часть спектра, находящуюся в фиксированной области в целом. Очевидный пример – теорема Раусса-Гурвица о том, что все корни полинома с вещественными коэффициентами лежат строго в левой полуплоскости тогда и только тогда, когда положительны все главные миноры матрицы Гурвица [8]. Это один из многих результатов (см. обзор [9]), увязывающих расположение корней полиномов и свойства определенных матриц и знакопеременных квадратичных форм.

Для конструирования других критериев можно использовать свойства некоторых интегралов по контуру γ , ограничивающему заданную область. Например, нетрудно проверить, что матрица

$$(1.2) \quad P_{in} = \oint_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} d\lambda$$

является проектором на инвариантное подпространство матрицы A , соответствующее собственным значениям $\lambda_j(A)$, лежащим внутри контура γ . След проектора совпадает с числом этих собственных значений с учетом кратности [2]. Этот факт является матричным аналогом принципа аргумента.

Отметим, что все перечисленные критерии при численной реализации могут приводить к ложному результату, если пятна псевдоспектра для достаточно малого ϵ пересекают границу области.

1.3. Задача дихотомии матричного спектра. Новая постановка спектральной задачи была предложена научной группой под руководством С.К. Годунова в виде задачи о дихотомии матричного спектра. Она состоит в том, чтобы определить

- 1) есть ли на заданной кривой точки спектра матрицы,
- 2) если на кривой отсутствуют точки спектра, определить базисы инвариантных подпространств матрицы, соответствующие собственным значениям, находящимся по разные стороны от кривой, и привести матрицу к клеточно-диагональному виду.

Заметим, что название задачи созвучно с ϵ -дихотомией пространства решений дифференциальных уравнений, описанной в [10]. В этих названиях отражено содержательное сходство обеих задач, подразумевающих разделение пространства на прямую сумму подпространств.

Критерием дихотомии и ответом на первый вопрос задачи является (возможно, с дополнительной нормировкой) интеграл

$$(1.3) \quad H = \oint_{\gamma} (\lambda I - A)^{-1} (\bar{\lambda} I - A^*)^{-1} |d\lambda|,$$

который сходится только при отсутствии собственных значений матрицы на γ , а норма которого зависит от расположения пятен псевдоспектра вблизи кривой γ . В отличие от других матричных критериев [8], [9], матрица H является самосопряженной и положительно определенной. Для ответа на второй вопрос задачи дихотомии используется проектор (1.2). Проектор на инвариантное подпространство матрицы A , соответствующее собственным значениям, лежащим вне кривой γ , имеет вид $P_{out} = I - P_{in}$. Размерность инвариантных подпространств вычисляется по формулам $n_{in} = \text{tr}P_{in}$, $n_{out} = \text{tr}P_{out}$. С помощью сингулярного разложения

$$P_{in} = [U_1, W_1]\Sigma_1 V_1, \quad P_{out} = [U_2, W_2]\Sigma_2 V_2$$

вычисляются ортогональные базисы U_1 , U_2 инвариантных подпространств и матрица перехода $T = [U_1, U_2]$, которая приводит матрицу A к клеточно-диагональному виду (см. раздел 2).

Замечание. В случае разделения спектра относительно единичной окружности или мнимой оси матрицы H и P являются решениями уравнений Ляпунова и их обобщений [2], [11].

На данный момент существуют алгоритмы дихотомии относительно следующих кривых: окружности, мнимой оси [4], [12]-[16], кривых второго порядка [17]-[19], угла [20] и алгоритм дихотомии корней полинома относительно окружности [21]. При этом алгоритм дихотомии относительно единичной окружности можно называть базовым, так как он является основной составляющей частью всех других алгоритмов. Обзор возможностей алгоритмов дихотомии, а также приложения представлены в статье [22].

Важно отметить, что несмотря на то, что в основе метода лежат контурные интегралы, для их вычисления не используется численное интегрирование. Алгоритм дихотомии является итерационным и состоит из последовательности QR-разложений и других матричных операций. Сходимость итераций связана с величиной H и зависит от тех спектральных пятен, которые пересекают границу области. А значит в процессе выполнения алгоритма диагностируется ситуация, когда псевдоспектр может критически повлиять на результат. Подробнее см. в следующем разделе.

2. БАЗОВЫЕ АЛГОРИТМЫ

2.1. Разностная краевая задача. В основе метода дихотомии спектра $n \times n$ матрицы A относительно единичной окружности лежат утверждения о разрешимости краевой задачи для системы разностных уравнений

$$(2.1) \quad \begin{cases} U_{j+1} = AU_j + f_j, & \|f_k\| \leq C < \infty, \\ \|U_j\| \leq C < \infty, & -\infty < j < \infty. \end{cases}$$

Здесь и далее знак $\|\cdot\|$ в применении к вектору и матрице обозначает евклидову и операторную нормы соответственно.

По аналогии с краевой задачей на числовой прямой для системы линейных ОДУ с постоянными коэффициентами (см. [23], [24]) нетрудно доказать, что

однозначная разрешимость задачи (2.1) равносильна отсутствию у матрицы A собственных значений на единичной окружности:

$$(2.2) \quad |\lambda_j(A)| \neq 1,$$

что в свою очередь означает существование разложения:

$$(2.3) \quad A = T \begin{bmatrix} \Lambda_0 & 0 \\ 0 & \Lambda_\infty \end{bmatrix} T^{-1}, \quad |\lambda_i(\Lambda_0)| < 1, \quad |\lambda_i(\Lambda_\infty)| > 1.$$

При этом решение выражается следующим образом

$$(2.4) \quad U_j = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} G_{j-k} f_k$$

через дискретную матричную функцию Грина, которая однозначно определяется условиями

$$\begin{cases} G_{k+1} = AG_k, & k \neq 0, \\ G_1 = AG_0 + I, & \|G_k\| \leq C \leq \infty. \end{cases}$$

Функция Грина существует и единственна тогда и только тогда, когда выполнено условие (2.2). Подстановкой проверяется, что функция Грина, если она существует, имеет вид

$$G_k = \begin{cases} T \begin{bmatrix} \Lambda_0^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1}, & k > 0 \\ T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -\Lambda_\infty^k \end{bmatrix} T^{-1}, & k \leq 0 \end{cases}$$

Функция Грина тесно связана с интегралом по единичной окружности вида (1.3). Например, если рассмотреть нормированный вариант интегрального матричного критерия (1.3)

$$(2.5) \quad H = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (e^{i\varphi} I - A)^{-1} (I + AA^*) (e^{-i\varphi} I - A^*)^{-1} |d\varphi|,$$

и подставить под интеграл выражение для резольвенты

$$\begin{aligned} (e^{i\varphi} I - A)^{-1} &= T \begin{bmatrix} e^{-i\varphi} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ik\varphi} \Lambda_0^k & 0 \\ 0 & - \left(\sum_{j=0}^{\infty} e^{ij\varphi} \Lambda_\infty^{-j} \right) \Lambda_\infty^{-1} \end{bmatrix} T^{-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-i(k+1)\varphi} G_{k+1} + \sum_{j=0}^{\infty} e^{ij\varphi} G_{-(j+1)}, \end{aligned}$$

то получим представление

$$(2.6) \quad H = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G_k G_k^* + \left(\sum_{k=-\infty}^{-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \right) G_k G_k^*$$

При этом матрица $P_{in} = G_1$ является проектором на инвариантное подпространство матрицы A , соответствующее собственным значениям, лежащим внутри единичной окружности.

Обобщая вышесказанное на случай матричных пучков $A - \lambda B$, можно сформулировать следующее утверждение:

Утверждение. На единичной окружности отсутствуют собственные значения пучка $A - \lambda B$ и возможно представление

$$A - \lambda B = T \begin{bmatrix} \Lambda_0 - \lambda I & 0 \\ 0 & I - \lambda \Lambda_\infty \end{bmatrix} S, \quad \det T \neq 0, \quad \det S \neq 0,$$

$$|\lambda_i(\Lambda_0)| < 1, \quad |\lambda_i(\Lambda_\infty)| < 1,$$

тогда и только тогда, когда существует единственное решение краевой задачи

$$(2.7) \quad \begin{cases} AG_{k+1} - BG_k = 0, & k \neq 0, \\ G_1 - G_0 = I, \quad \|G_k\| \leq C < \infty, \end{cases}$$

Причем численным критерием качества дихотомии спектра $A - \lambda B$ является величина (2.6).

Таким образом, задача о разделении матричного спектра единичной окружностью сводится к краевой задаче (2.7), которая имеет постоянные матричные коэффициенты и может быть эффективно решена с использованием метода удвоений и ортогональных исключений [2], [11], [14].

2.2. Дихотомия единичной окружностью и мнимой осью. Приведенные выше факты являются основой алгоритма дихотомии единичной окружностью, который, в свою очередь, является ключевой частью алгоритмов дихотомии относительно остальных кривых. Существует несколько вариантов этого алгоритма. Однако основной цикл каждого из них представляет собой метод удвоений, то есть переход от уравнений $A_k U_j - B_k U_{j+2^k} = 0$ к уравнениям $A_{k+1} U_j - B_{k+1} U_{j+2^{k+1}} = 0$ путем исключения промежуточного слагаемого при помощи QR-разложения соответствующей матрицы.

Заметим также, что условия сходимости основного цикла могут быть сформулированы по разному (см. раздел 4). Можно следить за абсолютной сходимостью, как в это сделано ниже, или за относительной. В условие можно также включать сходимость проектора P_k . Кроме того, опираясь на оценки сходимости (например, [21], теорема 5), можно априорно оценить число итераций, необходимых для сходимости алгоритма при условии $\|H\| \leq \omega_{max}$. Эту оценку также можно использовать в качестве верхней границы числа итераций. При этом нужно принимать во внимание, что она, как правило, очень завышена, так как в обычной ситуации для сходимости с высокой точностью достаточно нескольких итераций.

Если $\|H_k\|$, вычисленная на шаге k , превосходит заданное значение ω_{max} , это значит, что окружность пересекает пятна ε -спектра для достаточно малого ε . Таким образом алгоритм диагностирует ситуацию, когда внутренняя и внешняя части спектра не могут быть разделены достаточно надежно. В этом случае алгоритм прекращает свою работу, проектор не вычисляется.

Алгоритм дихотомии матричного спектра относительно единичной окружности

Дано: матричный пучок $A_0 - \lambda B_0$, ε_{it} – требуемая точность итерационного процесса, ω_{max}, μ_{max} – максимальные значения критерия дихотомии и числа обусловленности матрицы.

Если $\text{cond}(A_0 - B_0) > \mu_{max}$,

то дихотомия невозможна, конец расчетов.

иначе

$$H^{(0)} = (A_0 - B_0)^{-1}(A_0 A_0^* + B_0 B_0^*)(A_0^* - B_0^*)^{-1}$$

Цикл пока $\|H^{(k)} - H^{(k-1)}\| > \varepsilon_{it}$

Если $\|H^{(k)}\| \geq \mu_{max}$ или $\text{cond}(A_k + B_k) > \mu_{max}$,
то дихотомия невозможна, конец расчетов.

иначе

$$V^{(k+1)} = (A_k + B_k)^{-1} A_k, U^{k+1} = I_n - V^{(k+1)}$$

$$H^{(k+1)} = U^{(k+1)} H^k U^{(k+1)*} + V^{(k+1)} H^k V^{(k+1)*}$$

$$qr \left(\begin{bmatrix} -B_k & A_k & 0 \\ A_k & 0 & -B_k \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & A_{k+1} & -B_{k+1} \end{bmatrix}$$

$$P_k = -(A_{k+1} - B_{k+1})^{-1} B_{k+1};$$

Конец цикла

Результат: критерий дихотомии ω , проектор P

О точности полученных результатов можно судить по величине невязки равенства $P^2 = P$, определяющего проектор. В случае задачи о спектре матрицы A (не пучка) для проверки точности можно использовать свойство перестановочности $AP = PA$ матрицы и проектора на инвариантное подпространство [2]. Для матричного пучка $A - \lambda B$ аналогом этого равенства служат соотношения $QA = AP$ и $QB = BP$, где Q – проектор на левое приводящее подпространство. Как правило для решения задачи не требуется вычислять проектор Q , поэтому эти равенства для проверки точности обычно не используются.

Подход к разделению спектра матрицы A относительно мнимой оси, применявшийся до сих пор, основан на свойствах экспоненциального отображения, которое переводит левую полуплоскость в единичный круг. Важно, что инвариантные подпространства матрицы, соответствующие собственным значениям, лежащим по разные стороны от мнимой оси, совпадают с инвариантными подпространствами матричной экспоненты, соответствующими частям спектра внутри и вне единичной окружности. Поэтому для решения задачи дихотомии мнимой осью достаточно применить представленный выше алгоритм к матричному пучку $A_0 - \lambda B_0 = e^{\tau A} - \lambda I$. Выбор параметра τ , например, $\tau \approx 1/2\|A\|$, обеспечивает быструю сходимость при вычислении матричной экспоненты. Но в случае матриц с большой нормой, в частности, аппроксимирующих дифференциальные операторы, это может приводить к ложным результатам. Поэтому для таких матриц используется прием, описанный в [4], заключающийся в выборе τ в виде степени двойки $\tau = 2^{-K}$ и последующем применении K дополнительных итераций.

3. НОВЫЙ СПОСОБ РАЗДЕЛЕНИЯ МАТРИЧНОГО СПЕКТРА ОТНОСИТЕЛЬНО МНИМОЙ ОСИ

Пусть A – произвольная матрица. В качестве альтернативы экспоненциальному преобразованию рассмотрим дробно-линейное преобразование комплексной плоскости $\lambda \rightarrow \xi$, переводящее мнимую ось в единичную окружность:

$$(3.8) \quad \lambda = \frac{\xi + 1}{\xi - 1} \quad \text{или} \quad \xi = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1}$$

где λ, ξ – комплексные числа. Подставим выражение для λ в уравнение определяющее собственные значения

$$\det(A - \lambda I) = \det\left(A - \frac{\xi + 1}{\xi - 1}I\right) = 0$$

Мы можем считать, что $|\lambda| < \infty$, так как собственные значения матрицы лежат в круге радиуса $\|A\|$. Поэтому $\xi \neq 1$, а следовательно, последнее равенство равносильно тому, что

$$\det((\xi - 1)A - (\xi + 1)I) = 0 \quad \text{или} \quad \det(\xi(A - I) - (A + I)) = 0$$

Это означает, что проблема разделения спектра матрицы A относительно мнимой оси эквивалентна задаче о локализации спектра матричного пучка относительно единичной окружности

$$(3.9) \quad A_0 - \xi B_0 = (A + I) - \xi(A - I).$$

Аналогичный подход может быть применен к задаче о разделении спектра матричного пучка $A - \lambda B$. Будем предполагать, что пучок не является сингулярным, то есть для некоторых λ имеет место неравенство

$$\det(A - \lambda B) \neq 0.$$

Замечание. Если пучок является сингулярным, то сначала необходимо редуцировать его до регулярной части, например, с помощью сингулярного исчерпывания [25].

Заменим спектральный параметр по формуле (3.8). При этом следует обратить внимание на то, что среди собственных значений пучка могут быть бесконечные в случае, если матрица B вырождена. Им соответствуют значения $\xi = 1$.

Таким образом спектральная задача о разделении спектра пучка $A - \lambda B$ равносильна разделению спектра пучка

$$(3.10) \quad A_0 - \xi B_0 = (A + B) - \xi(A - B).$$

относительно единичной окружности.

Предположим, что у исходного пучка $A - \lambda B$ отсутствуют собственные значения на мнимой оси. Тогда имеет место разложение

$$(3.11) \quad A - \lambda B = T \begin{pmatrix} \Lambda_- & \\ & \Lambda_+ \end{pmatrix} S^{-1} - \lambda T S^{-1},$$

где спектры подматрицы Λ_- , Λ_+ лежит соответственно в левой и правой полуплоскостях. При этом матрицы $T = [T_1|T_2]$ и $S = [S_1|S_2]$ невырождены, а подматрицы T_1, T_2, S_1, S_2 представляет собой объединение базисных векторов в приводящих подпространствах, соответствующих собственным значениям в левой и правой полуплоскостях.

Для пучка, полученного после замены спектрального параметра, будет верно представление

$$\begin{aligned} A_0 - \xi B_0 &= T \begin{pmatrix} (\Lambda_- + I) - \xi(\Lambda_- - I) & \\ & (\Lambda_+ + I) - \xi(\Lambda_+ - I) \end{pmatrix} S^{-1} = \\ &= T_0 \begin{pmatrix} \Lambda_0 - \xi I & \\ & I - \xi \Lambda_\infty \end{pmatrix} S^{-1}, \end{aligned}$$

где

$$T_0 = T \begin{pmatrix} \Lambda_- - I & \\ & \Lambda_+ + I \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_0 = (\Lambda_- + I)(\Lambda_- - I)^{-1}, \quad \Lambda_\infty = (\Lambda_+ - I)(\Lambda_+ + I)^{-1}.$$

Из этого следует, что проекторы на правые приводящие подпространства пучка $A - \lambda B$, соответствующие частям спектра, лежащим в левой и правой полуплоскостях, совпадают с проекторами на правые приводящие подпространства пучка $A_0 - \xi B_0$, соответствующие собственным значениям внутри и вне единичной окружности, и имеют вид

$$(3.12) \quad P = S \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1}, \quad I - P = S \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} S^{-1}$$

Итак, для разделения спектра пучка $A - \lambda B$ относительно мнимой оси нужно применить алгоритм дихотомии единичной окружностью к пучку (3.10). Полученные при этом матрицы H и P являются искомыми критерием дихотомии и проектором на правое приводящее подпространство пучка, соответствующее собственным значениям, лежащим в левой полуплоскости.

3.1. Балансировка пучка. Следует отметить, что расположение спектра пучка $A - \lambda B$ не меняется при умножении его на невырожденную матрицу справа или слева. Чтобы исключить зависимость критерия дихотомии от такой матричной нормировки, рекомендуется произвести балансировку пучка (см. [14]). То есть нужно найти такую невырожденную матрицу X , что

$$A = XA_0, \quad B = XB_0, \quad A_0A_0^* + B_0B_0^* = I.$$

Для этого достаточно сделать QR-разложение

$$\text{qr} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0^* & * \\ B_0^* & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^* \\ 0 \end{pmatrix}$$

При такой нормировке проекторы на правые приводящие подпространства не меняются.

4. ПРИМЕРЫ

В этом разделе свойства нового подхода будут продемонстрированы на двух примерах с помощью спектральных портретов (см. ниже).

Отметим еще раз, что составляющей частью алгоритма разделения спектра относительно прямой является алгоритм дихотомии единичной окружностью (см. раздел 2.2). В нем мы использовали следующие константы

$$\omega_{\max} = 10^{16}, \quad \mu_{\max} = 10^{10}, \quad \varepsilon_{it} = 10^{-10}.$$

Критерием останова итераций является либо одновременное выполнение неравенств

$$\|H_{k-1} - H_k\| \leq \varepsilon_{it}\|H_k\|, \quad \|P_{k-1} - P_k\| \leq \varepsilon_{it}\|P_k\|$$

либо превышение предельно допустимого значения критерия дихотомии $\|H_k\| > \omega_{\max}$.

4.1. Линейный спектральный портрет. Одномерные спектральные портреты – это эффективный способ визуализации спектра, основанный на методе дихотомии матричного спектра. Пусть $\gamma(x) = \{\lambda, \operatorname{Re}\lambda = x\}$ – параметризованное семейство прямых на комплексной плоскости, параллельных мнимой оси. Заметим, что разделение спектра пучка $A - \lambda B$ относительно прямой $\gamma(x)$ равносильно разделению спектра пучка $A - (\lambda + x)B = (A - xB) - \lambda B$ со сдвинутым параметром относительно мнимой оси. Таким образом, каждому значению параметра x можно сопоставить норму матричного критерия дихотомии $H(x)$, вычисленного для пучка $(A - xB) - \lambda B$. График функции $\log_{10} \|H(x)\|$ дает следующую информацию о расположении спектра. Если для фиксированного x значение этой функции ограничено, то на прямой $\gamma(x)$ отсутствуют собственные значения пучка $A - \lambda B$. Если в окрестности точки x функция $\log_{10} \|H(x)\|$ неограниченно растет (график функции образует «пик»), то вблизи прямой $\gamma(x)$ лежат точки спектра пучка.

Так как в процессе выполнения алгоритма дихотомии наряду с матричным критерием H вычисляется матрица проектора P , то дополнительную информацию о спектре можно получить из графика функции $\operatorname{tr}P(x)$. Это кусочно-постоянная функция, значение которой в точке x совпадает с числом собственных значений, лежащих левее прямой $\gamma(x)$. Функция $\operatorname{tr}P(x)$ меняет свое значение (график образует «ступеньку»), если на прямой $\gamma(x)$ лежат собственные значения пучка. Очевидно, что число собственных значений, лежащих вблизи $\gamma(x)$ совпадает с высотой «ступеньки».

Также для иллюстрации работы итерационного алгоритма дихотомии будем использовать функцию $N(x)$, значения которой будут совпадать с числом итераций, потребовавшихся для сходимости.

4.2. Сравнение с другими методами. Рассмотрим двухдиагональную матрицу A размера 10×10 , у которой на главной диагонали стоят числа $1, 2, \dots, 10$, а на побочной $-1, 2, \dots, 9$. Пятна псевдоспектра этой матрицы изображены на рис. 1 в виде линий уровня функции $\log_{10} \sigma_{\min}(A - \lambda I)$.

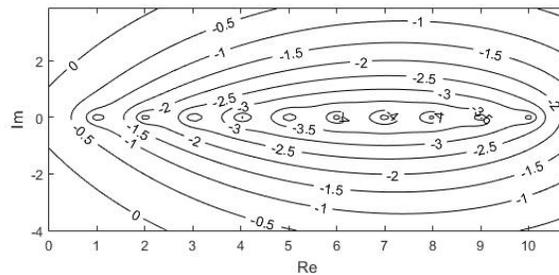


FIG. 1. Спектральный портрет матрицы A .

Для данной матрицы мы построим спектральные портреты, используя три варианта сведения задачи о разделении спектра относительно прямой к задаче о единичной окружности. Первый способ – использование экспоненциального преобразования $e^{\tau A}$ [2], [14]. Второй способ – использование экспоненты со специальной нормировкой $\tau = 2^{-K} \approx 1/2\|A\|$ и проведение K дополнительных

итераций алгоритма дихотомии единичной окружностью [4]. Третий способ – использование дробно-линейного преобразования.

На рис. 2 изображены графики функций $\log_{10} \|H(x)\|$ и $N(x)$, полученные тремя способами. Из них видно, что новый метод дает наименьшие значения для обеих функций. Практическое значение этой особенности можно оценить, если рассмотреть подробнее окрестность прямой, на которой находится собственное значение (см. рис. 3). На этом рисунке можно видеть, что все три графика в окрестности прямой $x = 8$, на которой лежит собственное значение матрицы, образуют полочку вместо того, чтобы стремиться к бесконечности. Это происходит из-за того, что если в процессе итераций текущий параметр $\omega = \|H(x)\|$ превышает предельно допустимое значение, то алгоритм прерывает свою работу, выходным значением параметра дихотомии объявляется ω_{\max} , а проектор $P(x)$ не вычисляется. Заметим, что наиболее широкую полочку имеет график, полученный с использованием экспоненциального преобразования. Остальные два графика довольно близки и имеют значительно более узкую полочку. Это означает, что метод, использующий экспоненциальное преобразование со специальной нормировкой и предложенный нами метод, основанный на дробно-линейном преобразовании, имеют более широкую область применимости и могут эффективно работать в окрестности прямых, на которых лежат собственные значения.

Отметим также, что во всех точках x , в которых вычислялся проектор $P(x)$, вне зависимости от использованного метода имеют место следующие относительные оценки

$$\frac{\|P^2(x) - P(x)\|}{\|P(x)\|} \leq 10^{-10}, \quad \frac{\|AP(x) - P(x)A\|}{\|A\|\|P(x)\|} \leq 10^{-13}.$$

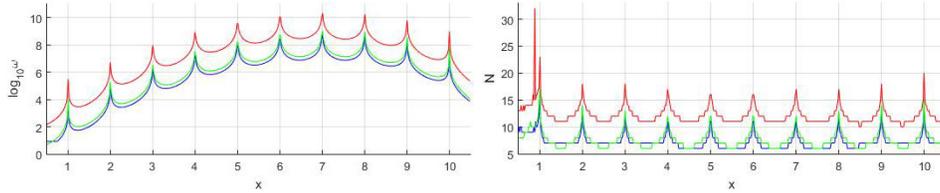


FIG. 2. Линейный спектральный портрет матрицы A (слева) и число потребовавшихся итераций (справа). Использование экспоненциального отображения – красный цвет, экспоненциального отображения со специальной нормировкой – зеленый, дробно-рационального отображения – синий.

4.3. Спектр оператора Орра-Зоммерфельда. Рассмотрим спектральную задачу для уравнения Орра-Зоммерфельда для плоскопараллельного течения Пуазейля вязкой несжимаемой жидкости

$$(4.13) \quad \left(i(\alpha U - \omega) \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) - i\alpha U'' - \frac{1}{Re} \left(\frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 \right) \hat{v} = 0,$$

$$\hat{v}|_{y=\pm 1} = 0, \quad \hat{v}'|_{y=\pm 1} = 0,$$

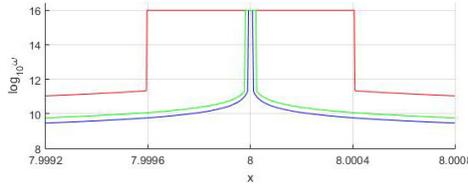


FIG. 3. Линейный спектральный портрет матрицы A . Использование экспоненциального отображения – красный цвет, экспоненциального отображения со специальной нормировкой – зеленый, дробно-рационального отображения – синий.

возникающую при исследовании устойчивости течений, описываемых системой уравнений Навье-Стокса. Здесь ω и $\hat{v}(y)$ – искомые собственные значения и функции, α и $\kappa^2 = \alpha^2 + \beta^2$ – заданные спектральные параметры, Re – число Рейнольдса, $U(y) = 1 - y^2$, $-1 \leq y \leq 1$ – профиль основного течения Пуазейля. Далее будем полагать $Re = 6000$, $\alpha = 1.02$, $\beta = 0$.

Исследование спектра оператора Орра-Зоммерфельда представляет собой нетривиальный, но при этом хорошо изученный вопрос, которому посвящено множество работ, например, [4], [5], [7], [26], [27] и др. Таким образом оператор Орра-Зоммерфельда является идеальным объектом для апробации новых вычислительных методов.

Заметим, что в данной области физики областью неустойчивости для спектрального параметра ω является верхняя полуплоскость. То есть если у оператора (4.13) есть собственное значение $\text{Im } \omega > 0$, то стационарное плоскопараллельное течение Пуазейля неустойчиво.

Пусть матричный пучок $A - \lambda B$ представляет собой дискретную аппроксимацию оператора Орра-Зоммерфельда [28], [29]

$$(4.14) \quad A = \alpha \text{diag}(U)(D_2 - \kappa^2 I) + 2\alpha I + \frac{i}{Re}(D_4 - 2\kappa^2 D_2 + \kappa^4 I), \quad B = i(D_2 - \kappa^2 I).$$

Здесь D_2 , D_4 – матрицы коллокационных производных второго и четвертого порядков, учитывающие однородные условия Дирихле и Неймана, I – единичная матрица, $\text{diag}(U)$ – диагональная матрица, на диагонали которой стоят значения функции U в точках Гаусса-Лобатто $y_j = \cos j\pi/n$. При построении матриц пучка мы учитываем соотношения собственных значений $\lambda = -i\omega$. То есть для дискретизированного оператора областью неустойчивости будет правая полуплоскость, так как это принято в теории устойчивости Ляпунова.

На рисунке 4 изображены спектральные портреты для матричных пучков (4.14) для $n = 50$ и $n = 100$ при $-0.1 \leq \text{Im } \omega \leq 0.02$, шаг по оси ординат $h = 8 \cdot 10^{-5}$. Положение соответствующих собственных значений на комплексной плоскости дано на рис. 5.

На графиках функции $\log_{10} \|H\|$ (синяя линия рис. 4) мы видим четыре пика слева и только два справа. Однако графики, изображенные зеленым цветом, которые показывают, сколько собственных значений пучка (4.14) лежит правее данной точки, совпадают. Это означает, что при $n = 100$ соответствующее пятна псевдоспектра для собственных значений, обозначенных на рис. 5 цифрами 2,3 и 5,6 настолько мало, что на сетке с шагом $h = 8 \cdot 10^{-5}$ не обнаруживается. Возможность таких ситуаций была упомянута нами в разделе 1.1. Однако так

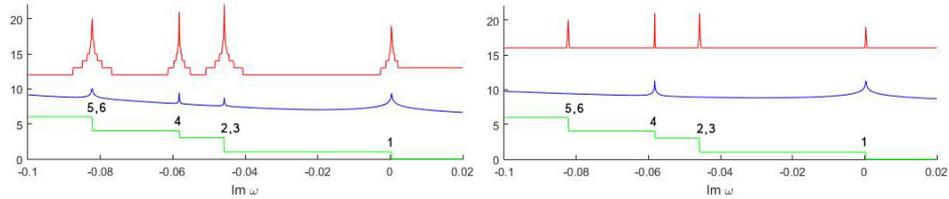


FIG. 4. Спектральный портрет дискретизированного оператора Орра-Зоммерфельда при $n = 50$ слева, при $n = 100$ справа. Функция $\log_{10} \|H\|$ – синий цвет, число итераций – красный, $\text{tr}(I - P)$ – зеленый.

как функция $\text{tr}(I - P)$ (зеленый цвет) целочисленная, то изменение ее значения позволяет выявить положение собственных значений даже в таких ситуациях.

Обратим внимание на то, что пик 1 функции $\log_{10} \|H\|$ (синяя линия рис. 4), соответствующий собственному числу 1 (рис. 5), приходится на положительное значение $\text{Im } \omega$. Это означает неустойчивость течения, что вполне соответствует тому, что при заданных α, β критическим значением числа Рейнольдса является $Re = 5772.22$.

На рис.6 изображены графики вещественных (сплошная линия) и мнимых (штриховая линия) частей собственных функций, соответствующих собственным значениям 1,2,3 (слева) и 4,5,6 (справа). Можно обратить внимание на то, что парам собственных значений 2,3 и 5,6, которые на рис. 5 совпадают, соответствуют пары четных и нечетных собственных функций, что уже отмечалось ранее, например, в [28].

Также отметим, что число потребовавшихся итераций не превышает 22-х и в среднем равно 12 для $n = 50$ и 16 для $n = 100$.

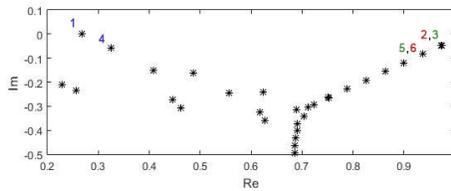


FIG. 5. Расположение на комплексной плоскости собственных значений дискретизированного оператора Орра-Зоммерфельда при $n = 100$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ.

В работе предложен новый способ разделения матричного спектра относительно прямой, основанный на дробно-линейном преобразовании. По сравнению с подходами, основанными на экспоненциальном преобразовании, он обладает несколькими преимуществами. Во-первых, для его реализации не требуется вычисление матричной экспоненты. Во-вторых, в случае его применения к матричному пучку нет необходимости вычислять обратную матрицу. На примерах было показано, что область его применимости больше, чем у метода,

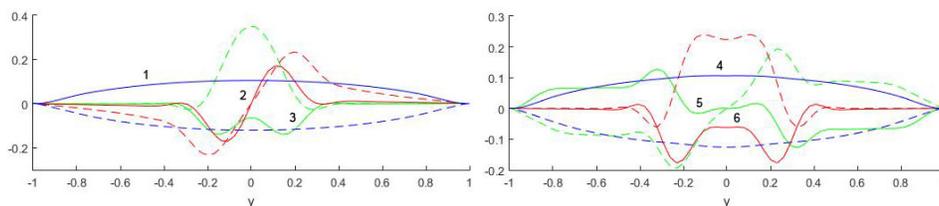


FIG. 6. Собственные функции, соответствующие собственным значениям, слева: 1 (синий), 2,3 (зеленый, красный), справа: 4 (синий), 5,6 (зеленый, красный).

использующего экспоненту, а число итераций, требующихся для его сходимости значительно меньше.

REFERENCES

- [1] Уилкинсон Дж. Алгебраическая проблема собственных значений. Москва: Наука, 1970. 565 с.
- [2] Годунов С.К. Современные аспекты линейной алгебры. Новосибирск: Научная книга, 1997. С. 388.
- [3] Trefethen L.N., Embree M. Spectra and Pseudospectra. Princeton University Press. 2005. P. 606
- [4] Бибердорф Э.А., Блинова М.А., Попова Н.И. Модификации метода дихотомии матричного спектра и их применение к задачам устойчивости// СибЖВМ. **21:2** (2018) с. 139-153.
- [5] Trefethen L.N., Trefethen A.E., Satish C.R., Tobin A. Hydrodynamic Stability Without Eigenvalues. Science, New Series. **261:5121** (1993) P. 578-584.
- [6] Toh K.-Ch., Trefethen L. Calculation Of Pseudospectra By The Arnoldi Iteration. SIAM J. Sci. Comput. **17:1** (1999) P. 1-15.
- [7] Reddy S.C., Schmid P.J., Henningson D.S. Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld Operator. SIAM J. on Applied Mathematics. **53:1** (1993) P. 15-47.
- [8] Постников М.М. Устойчивые многочлены. М.: Наука, 1981. С. 176.
- [9] Крейн М.Г., Неймарк М.А. Метод симметрических и эрмитовых форм в теории отделения корней алгебраических уравнений. ГНТИ Украины, Харьков, 1936. С.40.
- [10] Далецкий Ю.Г., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. С. 534.
- [11] Бибердорф Э.А. Гарантированная точность в прикладных задачах линейной алгебры. РИЦ НГУ. Новосибирск. 2008. С. 145.
- [12] Годунов С. К. Круговая дихотомия матричного спектра// Сиб. мат.журн. **27:5** (1986) С.24-37.
- [13] Булгаков А.Я., Годунов С. К. Круговая дихотомия матричного спектра// Сиб. мат. журн. **29:5** (1988) С.59-70.
- [14] Малышев А.Н. Введение в вычислительную линейную алгебру. Новосибирск: Наука, Сибирское отделение. 1991. С. 228.
- [15] Godunov S. K., Sadkane M. Spectral Analysis of Symplectic Matrices with Application to the Theory of Parametric Resonance// SIAM J. on Matrix Analysis and Applications. **28:4** (2006) С. 1083-1096.
- [16] Буньков В.Г., Годунов С.К., Курзин В.Б., Садкани М. Применение нового математического аппарата «Одномерные спектральные портреты матрицы» к решению проблемы аэроупругих колебаний решеток лопастей// Ученые записки ЦАГИ. **40:6** (2009) С. 3-13.
- [17] Godunov S. K., Sadkane M. Elliptic dichotomy of a matrix spectrum// Linear Algebra and its Applications. **248** (1996) P. 205-232.
- [18] Malyshev A. N., Sadkane M. On parabolic and elliptic spectral dichotomy// SIAM Journal on Matrix Analysis and its Applications. **18** (1997) P. 265-278.

- [19] *Блинова М.А., Попова Н.И., Бибердорф Э.А.* Приложение дихотомии матричного спектра к исследованию устойчивости течений // Марчуковские научные чтения - 2017. Труды Международной научной конференции. 2017. С. 106-112.
- [20] *Бибердорф Э.А.* Алгоритм разделения матричного спектра относительно угла // ЖВ-МнМФ. **62**:5 (2022) с. 742-756
- [21] *Бибердорф Э.А.* Критерий дихотомии корней полинома единичной окружностью // Сиб. журн. индустр. матем. **3**:1 (2000) С. 16-32.
- [22] *Viberdorf E.* Development of the matrix spectrum dichotomy method // Continuum mechanics, applied mathematics and scientific computing: Godunov's legacy - A liber amicorum to Professor Godunov; Book series: Advanced Structured Materials. 2020. P. 37-43.
- [23] *Демиденко Г.В., Матвеева И.И.* Обыкновенные дифференциальные уравнения в задачах. Новосибирск: ИПЦ НГУ. 2021. С. 246.
- [24] Годунов С.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд. НГУ. 1994. С. 263.
- [25] *Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилук О.П., Костин В.И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах // Новосибирск: Наука. 1988. С. 456.
- [26] *Курочкин С.В.* Метод выявления неустойчивости и поиска неустойчивых собственных значений в задаче Орра-Зоммерфельда. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **41**:1 (2001) С. 86-94.
- [27] *Скорыходов С. Л.* Численный анализ спектра задачи Орра-Зоммерфельда. Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **47**:10 (2007) С. 1672-1691.
- [28] *Бойко А.А., Грек Г.Р., Довгаль А.В., Козлов В.В.* Физические механизмы перехода к турбулентности в открытых течениях. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2006. С. 301.
- [29] *Trefethen L.N.* Spectral Methods in MATLAB. SIAM. Philadelphia. 2000. P. 163.

БИБЕРДОРФ Элина Арнольдовна
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМ. С.Л. СОБОЛЕВА,
пр. Коптюга, 4,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: biberdorf@ngs.ru

Ван Ли
Новосибирский Государственный Университет,
ул. Пирогова, 1,
630090, Новосибирск, Россия
E-mail address: l.van3@ng.nsu.ru