Chechen State Pedagogical University, 62 Kh. Isaev Ave., Grozny 364068, Russia, Professor; Kadyrov Chechen State University, 32 Sheripova St., Grozny 364024, Russia,
S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.968.4
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 45J05

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ВОЛЬТЕРРОВСКОГО ТИПА С СУММАРНО-РАЗНОСТНЫМ ЯДРОМ И СТЕПЕННОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

С.Н. АСХАБОВ

Abstract. Exact a priori estimates are obtained for solutions of a nonlinear integro-differential equation with a sum-difference kernel in the cone of the space of functions continuous on the positive semiaxis. On the basis of these estimates, the method of weighted metrics is used to prove a global theorem on the existence, uniqueness, and method of finding a non-trivial solution of the indicated equation. It is shown that this solution can be found by the method of successive approximations of the Picard type and an estimate is given for the rate of their convergence in terms of the weight metric. Conditions under which only a trivial solution exists are indicated. Examples are given to illustrate the results obtained.

Keywords: Volterra integro-differential equation, sum-difference kernel, power nonlinearity.

1. Введение

Многие задачи современной математики, физики, механики и биологии приводят к нелинейным интегральным уравнениям с суммарными и разностными ядрами (см. монографии [1], [2] и приведенную в них библиографию). Например, описание процесса распространения ударных волн в трубах, наполненных

Askhabov, S.N., Volterra type integro-differential equation with a sum-difference kernel and power nonlinearity.

Работа поддержана Минобрнауки РФ (FEGS-2020-0001).
Поступила 1 января 2022 г., опубликована 31 декабря 2022 г.

газом или процесса инфильтрации жидкости из цилиндрического резервуара в изотропную однородную пористую среду приводит к нелинейным уравнениям с разностными ядрами [3], [4], [5], а нелинейные уравнения с суммарными ядрами возникают в теории лучистого равновесия и в теории переноса тепла излучением [6], [7].

В настоящее время теория интегральных и интегро-дифференциальных уравнений вольтерровского типа с разностными ядрами, т.е. теория уравнений типа свертки, разработана значительно полнее, чем соответствующая теория уравнений с суммарными ядрами. В частности, это связано с тем, что исследование интегро-дифференциальных уравнений с чисто суммарными ядрами оказывается затруднительным, так как операторы вольтерровского типа с суммарными ядрами не обладают, в отличие от операторов с разностными ядрами, свойством коммутативности.

В данной работе изучается нелинейное интегро-дифференциальное уравнение с суммарно-разностным ядром

$$u^{\alpha}(x) = \int\limits_0^x H(x+t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x K(x-t)u'(t)\,dt, \quad x>0, \quad \alpha>1, \tag{1.1}$$

где функции $H(x)$ и $K(x)$ удовлетворяют следующим основным условиям:

$$H \in C^1[0,\infty), H(x) \text{ не убывает на } [0,\infty) \text{ и } H(0) \geq 0, \tag{1.2}$$

$$K \in C^1[0,\infty), K'(x) \text{ не убывает на } [0,\infty),\ K(0)=0 \text{ и } K'(0)>0. \tag{1.3}$$

Теоретический и прикладной интерес представляют нетривиальные решения уравнений вида (1.1), поэтому они разыскиваются в классе

$$Q_0^1 = \{u(x):\ u \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty),\ u(0)=0 \text{ и } u(x)>0 \text{ при } x>0\}.$$

Очевидно, что тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ уравнения (1.1) не принадлежит классу Q_0^1.

Цель данной работы доказать глобальную теорему о существовании, единственности и способе нахождения нетривиального решения уравнения (1.1), а также получить точные двусторонние оценки для этого решения.

Наряду с интегро-дифференциальным уравнением (1.1) будет исследовано также тесно связанное с ним интегральное уравнение с ядром Теплица-Ганкеля $H(x+t)+K'(x-t)$:

$$u^{\alpha}(x) = \int\limits_0^x \left[H(x+t)+K'(x-t)\right]u(t)\,dt, \quad x>0, \quad \alpha>1. \tag{1.4}$$

Уравнения с разностным ядром Теплица $p(x-t)$ или суммарным ядром Ганкеля $q(x+t)$ привлекают внимание многих авторов, поскольку они встречаются в таких разнообразных областях как гидродинамика, обратные задачи рассеяния в квантовой механике, проблемы передачи радиационных волн, а также находят приложения в медицине и биологии (см. [8]). В работе [9] изучено линейное уравнение вида (1.4) с ядром Теплица-Ганкеля $p(x-t)+q(x+t)$. Ядра Теплица-Ганкеля возникают при исследовании кругового штампа, проникающего в упругий слой конечной толщины, опирающийся на жесткий фундамент, а также при изучении фильтрации стационарных случайных процессов с наблюдениями, атмосферного рассеяния и динамики разреженного газа [10].

Заметим, что уравнение (1.4) имеет тривиальное решение $u(x) \equiv 0$ в конусе

$$Q = \{u(x): \ u \in C[0,\infty) \text{ и } u(x) \geq 0 \text{ при } x \geq 0\},$$

состоящем из неотрицательных непрерывных на полуоси $[0,\infty)$ функций, и, вообще, любое решение этого уравнения в конусе Q удовлетворяет условию $u(0) = 0$. Кроме того, если интегральное уравнение (1.4) имеет нетривиальное решение $u \in Q$, то его сдвиги

$$u_\delta(x) = \begin{cases} u(x-\delta), & \text{если } x > \delta, \\ 0, & \text{если } x \leq \delta; \end{cases}$$

$$u_{-\delta}(x) = u(x+\delta), \quad \text{если } x > 0;$$

также являются решениями этого уравнения при любом $\delta > 0$, т.е. уравнение (1.4) может иметь континуум решений. Поэтому, для того, чтобы задачу нахождения нетривиальных решений уравнения (1.4) сделать корректной и в связи с тем, что с прикладной и теоретической точек зрения особый интерес представляют непрерывные положительные при $x > 0$ решения уравнения (1.4), будем искать его решения в классе

$$Q_0 = \{u(x): \ u \in C[0,\infty), \ u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}.$$

Заметим, что теория линейных интегральных уравнений типа свертки, т.е. уравнений с разностными ядрами, в настоящее время достаточно хорошо разработана и ее основные результаты приведены, например, в монографии [11]. Что касается соответствующих линейных интегральных уравнений с суммарными ядрами, то, как отмечено в работе [12], они изучены, в отличие от уравнений с разностными ядрами, сравнительно мало. Это замечание справедливо также относительно нелинейных интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

2. Свойства неотрицательных решений

Прежде чем доказать теорему о существовании, единственности и способе нахождения решений уравнения (1.1), выясним сначала какими свойствами должны обладать эти решения, если они существуют.

Справедливы следующие две простые леммы.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия (1.2) и (1.3). Если $u \in Q_0$ является решением уравнения (1.4), то функция $u(x)$ не убывает на $[0,\infty)$ и непрерывно-дифференцируема на $(0,\infty)$, т.е. $u \in C^1(0,\infty)$.*

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ и является решением уравнения (1.4). Докажем сначала, что тогда функция $u(x)$ не убывает на полуоси $[0,\infty)$. Для любых $x_1, x_2 \in [0,\infty)$ таких, что $x_2 > x_1$, с учетом условий (1.2) и (1.3), имеем

$$u^\alpha(x_2) - u^\alpha(x_1) = \int\limits_0^{x_1} [H(x_2+t) + K'(x_2-t) - H(x_1+t) - K'(x_1-t)]u(t)\,dt +$$

$$+ \int\limits_{x_1}^{x_2} [H(x_2+t) + K'(x_2-t)]u(t)\,dt \geq 0,$$

т.е. $u(x_2) \geq u(x_1)$ - что и требовалось.

Докажем теперь, что решение $u(x)$ непрерывно дифференцируемо на $(0,\infty)$. Так как по условию (1.3) первая производная $K'(x)$ не убывает на $[0,\infty)$, то по теореме Лебега почти всюду на $[0,\infty)$ существует вторая производная $K''(x)$, которая локально суммируема. Следовательно, правая часть тождества (1.4) дифференцируема и в силу известной формулы производной интеграла зависящего от параметра в случае когда и пределы интеграла зависят от параметра, имеем

$$\left(\int\limits_0^x [H(x+t)+K'(x-t)]u(t)\,dt\right)' =$$

$$= \int\limits_0^x H'(x+t)u(t)\,dt + H(2x)u(x) + \int\limits_0^x K''(x-t)u(t)\,dt + K'(0)u(x) =$$

$$= \int\limits_0^x H'(x+t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x u(x-t)K''(t)\,dt + [H(2x)+K'(0)]u(x). \tag{2.1}$$

Так как $u(x)$ не убывает, а $K''(x)$ локально суммируема, то по лемме 1 [13] свертка

$$\int\limits_0^x u(x-t)K''(t)\,dt = \int\limits_0^x K''(x-t)u(t)\,dt$$

непрерывна на $[0,\infty)$.

Таким образом, производная правой части тождества (1.4), в силу равенства (2.1), существует и непрерывна на всей полуоси $[0,\infty)$. Но тогда существует и непрерывна производная левой части тождества (1.4), причем для любого $x>0$ справедливо равенство:

$$u'(x) = \frac{1}{\alpha}u^{1-\alpha}(x)\left(\int\limits_0^x [H'(x+t)+K''(x-t)]u(t)\,dt + [H(2x)+K'(0)]u(x)\right). \tag{2.2}$$

Из равенства (2.2) вытекает, что функция $u(x)$ непрерывно дифференцируема на всей положительной полуоси $(0,\infty)$, исключая точку $x=0$, т.к. $1-\alpha<0$ и $u(0)=0$. □

Лемма 2. *Пусть выполнены условия (1.2) и (1.3). Если $u\in Q_0^1$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1.1), то $u\in Q_0$ и является решением уравнения (1.4). Обратно, если $u\in Q_0$ является решением интегрального уравнения (1.4), то $u\in Q_0^1$ и является решением уравнения (1.1).*

Доказательство. Докажем сначала первую часть леммы. Пусть $u\in Q_0^1$ и является решением уравнения (1.1). Так как $Q_0^1\subset Q_0$, то $u\in Q_0$. Интегрируя по частям и используя равенства $K(0)=u(0)=0$, из тождества (1.1) получаем

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x H(x+t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x K(x-t)\,du(t) = \int\limits_0^x H(x+t)u(t)dt + \int\limits_0^x K'(x-t)u(t)\,dt,$$

т.е. $u(x)$ является решением интегрального уравнения (1.4).

Обратно, пусть $u \in Q_0$ и является решением интегрального уравнения (1.4). Тогда, согласно лемме 1, $u \in C^1(0,\infty)$ и, значит, $u \in Q_0^1$. Используя дважды коммутативность свертки, формулу интегрирования по частям и равенства $K(0) = u(0) = 0$, из тождества (1.4) имеем

$$u^\alpha(x) = \int_0^x H(x+t)u(t)\,dt + \int_0^x K'(t)u(x-t)\,dt =$$

$$= \int_0^x H(x+t)u(t)\,dt + \int_0^x K(t)u'(x-t)dt = \int_0^x H(x+t)u(t)\,dt + \int_0^x K(x-t)u'(t)\,dt,$$

т.е. $u(x)$ является решением интегро-дифференциального уравнения (1.1). □

Далее нам понадобятся следующие два неравенства

$$\int_0^x a(x+t)b(t)\,dt \le \int_0^x [2a(2t) - a(t)]b(t)\,dt, \quad x > 0, \tag{2.3}$$

$$\int_0^x a(x-t)b(t)\,dt \le \int_0^x a(t)b(t)\,dt, \quad x > 0, \tag{2.4}$$

справедливые для любых неотрицательных неубывающих на полуоси $[0,\infty)$ функций $a(x)$ и $b(x)$. Неравенство (2.3) подробно доказано в [14, Лемма 1], а неравенство (2.4) известно как интегральное неравенство Чебышева [15, с. 120] (см., также, [1, с. 121], где приведены два различных его доказательства).

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (1.2) и (1.3). Если $u \in Q_0$ является решением уравнения (1.4), то для любого $x \in [0,\infty)$ выполняются неравенства:*

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} \le u(x) \le$$

$$\le \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $u \in Q_0$ является решением уравнения (1.4). Докажем первое неравенство из (2.5). Используя условия (1.2) и (1.3), из тождества (1.4) получаем

$$u^\alpha(x) \ge \int_0^x [H(2t) + K'(0)]u(t)\,dt$$

или

$$u(x) \ge \left(\int_0^x [H(2t) + K'(0)]u(t)\,dt\right)^{1/\alpha} \quad \text{для любого} \quad x > 0 \tag{2.6}$$

или

$$u(t) \geq \left(\int_0^t [H(2s) + K'(0)]u(s)\,ds \right)^{1/\alpha} \qquad \text{для любого} \quad t > 0,$$

откуда

$$\left(\int_0^t [H(2s) + K'(0)]u(s)\,ds \right)^{-1/\alpha} [H(2t) + K'(0)]u(t) \geq H(2t) + K'(0).$$

Интегрируя обе части последнего неравенства в пределах от 0 до x, имеем

$$\left(\int_0^x [H(2s) + K'(0)]u(s)\,ds \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \geq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt$$

или

$$\left(\int_0^x [H(2t) + K'(0)]u(t)\,dt \right)^{1/\alpha} \geq \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Используя эту оценку, из (2.6) непосредственно получаем первое неравенство из (2.5).

Докажем, наконец, второе неравенство из (2.5). Используя неравенства (2.3) и (2.4), имеем

$$u^\alpha(x) = \int_0^x H(x+t)u(t)\,dt + \int_0^x K'(x-t)u(t)\,dt \leq$$

$$\leq \int_0^x [2H(2t) - H(t)]u(t)\,dt + \int_0^x K'(t)u(t)dt = \int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]u(t)\,dt,$$

откуда, обозначив $A(t) = 2H(2t) - H(t) + K'(t)$, для любого $x > 0$ имеем

$$u(x) \leq \left(\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]u(t)\,dt \right)^{1/\alpha} = \left(\int_0^x A(t)u(t)\,dt \right)^{1/\alpha}. \tag{2.7}$$

Из неравенства (2.7) непосредственно получаем

$$\left(\int_0^t A(s)u(s)\,ds \right)^{-1/\alpha} A(t)u(t) \leq A(t) \quad \text{для любого} \quad t > 0.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства в пределах от 0 до x, имеем

$$\left(\int_0^x A(s)u(s)ds \right)^{(\alpha-1)/\alpha} \leq \frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x A(t)\,dt$$

или, что то же самое,

$$\left(\int_0^x A(s)u(s)ds \right)^{1/\alpha} \leq \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int_0^x A(t)\,dt \right)^{1/(\alpha-1)} =$$

$$= \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int\limits_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Используя эту оценку, из (2.7) непосредственно получаем второе неравенство из (2.5). □

В силу леммы 2, исследование интегро-дифференциального уравнения (1.1) сводится к исследованию интегрального уравнения (1.4). Из лемм 1 и 3, в частности, следует, что если $u \in Q_0^1$ и является решением уравнения (1.1), то оно не убывает на $[0, \infty)$ и удовлетворяет неравенствам (2.5).

Отметим, что при $H(x) = C_1$ и $K(x) = C_2 x$, где $C_1 \geq 0$ и $C_2 > 0$ есть константы, неравенства в (2.5) обращаются в равенства и дают решение как уравнения (1.4), так и уравнения (1.1), что свидетельствует о точности полученных в лемме 3 априорных оценок решения интегрального уравнения (1.4).

Заметим также, что неравенство Чебышева (2.4) справедливо как в случае неубывающих, так и в случае невозрастающих на полуоси $[0, \infty)$ функций $a(x)$ и $b(x)$, причем требование неотрицательности этих функций излишне в обоих случаях (подробнее, см. [1]).

3. Теоремы существования и единственности решения

Из леммы 3 вытекает, что решения уравнения (1.4) естественно разыскивать в классе

$$P = \{u(x) : \ u \in C[0, \infty) \text{ и } F(x) \leq u(x) \leq G(x) \text{ для любого } x \in [0, \infty)\},$$

где

$$F(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int\limits_0^x [H(2t) + K'(0)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)},$$

$$G(x) = \left(\frac{\alpha - 1}{\alpha} \int\limits_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\, dt \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Запишем уравнение (1.4) в операторном виде: $u = Tu$, где

$$(Tu)(x) = \left(\int\limits_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]u(t)\, dt \right)^{1/\alpha}.$$

Лемма 4. *Пусть выполнены условия (1.2) и (1.3). Тогда класс P инвариантен относительно оператора T, т.е. $T : P \to P$.*

Доказательство. Пусть $u \in P$, т.е. $u \in C[0, \infty)$ и $F(x) \leq u(x) \leq G(x)$. Нужно доказать, что тогда $Tu \in C[0, \infty)$ и $F(x) \leq (Tu)(x) \leq G(x)$, т.е. $Tu \in P$.

1). То, что $Tu \in C[0, \infty)$ вытекает из монотонности функций $H(x)$, $K'(x)$ и непрерывности функции $u(x)$ (см., например, [16, с. 288] и [1, с. 120]).

2). Докажем, что $(Tu)(x) \geq F(x)$. Так как $u(x) \geq F(x)$, то

$$[(Tu)(x)]^\alpha = \int\limits_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]u(t)\, dt \geq \int\limits_0^x [H(2t) + K'(0)]F(t)\, dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int\limits_0^x [H(2t)+K'(0)] \left(\int\limits_0^t [H(2s)+K'(0)]\, ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \int\limits_0^x \left(\int\limits_0^t [H(2s)+K'(0)] ds\right)^{1/(\alpha-1)} d\left(\int\limits_0^t [H(2s)+K'(0)] ds\right) =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(\int\limits_0^t [H(2s)+K'(0)]\, ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \Bigg|_0^x =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \left(\int\limits_0^x [H(2s)+K'(0)]\, ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \equiv [F(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \geq F(x)$.

3). Докажем, наконец, что $(Tu)(x) \leq G(x)$. Так как $u(x) \leq G(x)$, то используя интегральные неравенства (2.3) и (2.4), имеем

$$[(Tu)(x)]^\alpha = \int\limits_0^x H(x+t)u(t)\, dt + \int\limits_0^x K'(x-t)u(t)\, dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^x H(x+t)G(t)\, dt + \int\limits_0^x K'(x-t)G(t)\, dt \leq$$

$$\leq \int\limits_0^x [2H(2t)-H(t)]G(t)\, dt + \int\limits_0^x K'(t)G(t)\, dt =$$

$$= \int\limits_0^x [2H(2t)-H(t)+K'(t)] \left(\frac{\alpha-1}{\alpha} \int\limits_0^t [2H(2s)-H(s)+K'(s)] ds\right)^{1/(\alpha-1)} dt =$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)} \frac{\alpha-1}{\alpha} \left(\int\limits_0^t [2H(2s)-H(s)+K'(s)] ds\right)^{\alpha/(\alpha-1)} \Bigg|_0^x = [G(x)]^\alpha,$$

т.е. $(Tu)(x) \leq G(x)$. □

Рассмотрим теперь класс

$$P_b = \{u(x):\ u \in C[0,b] \text{ и } F(x) \leq u(x) \leq G(x) \text{ для любого } x \in [0,b]\},$$

где $b > 0$ есть любое число, и определим в нем расстояние следующим образом

$$\rho(u,v) = \sup_{0<x\leq b} \frac{|u(x)-v(x)|}{G(x)}. \tag{3.1}$$

Лемма 5. *Пара (P_b, ρ) образует полное метрическое пространство.*

Лемма 5 доказывается аналогично лемме 4 из [14].

Из леммы 4 непосредственно вытекает, что оператор T действует из P_b в P_b. Докажем, что при следующем дополнительном предположении

$$q = \sup_{0<x\le b} \frac{\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\,dt}{\alpha \int\limits_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt} < 1, \tag{3.2}$$

оператор T является сжимающим в метрическом пространстве P_b.

Воспользуемся теоремой Лагранжа (формулой конечных приращений), согласно которой при любых $z_1 > 0$ и $z_2 > 0$ справедливо равенство

$$z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}\theta^{(1-\alpha)/\alpha}(z_1 - z_2),$$

где $\theta > 0$ некоторое число, лежащее между z_1 и z_2. Из этого равенства следует, что если $z_1 \ge z_0$ и $z_2 \ge z_0$, где $z_0 > 0$, то $\theta > z_0$ и, значит, справедливо неравенство

$$|z_1^{1/\alpha} - z_2^{1/\alpha}| \le \frac{1}{\alpha}\frac{|z_1 - z_2|}{z_0^{(\alpha-1)/\alpha}}. \tag{3.3}$$

Пусть $u, v \in P_b$ и $x \in (0, b]$. Тогда, в силу неравенства (3.3), в котором роль z_0 играет $F^\alpha(x)$, с учетом неравенства (2.1), последовательно получаем

$$|(Tu)(x) - (Tv)(x)| \le \frac{1}{\alpha}\frac{\int_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]|u(t) - v(t)|\,dt}{\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt} \le$$

$$\le \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt}\int\limits_0^x [H(x+t) + K'(x-t)]G(t)\,dt \le$$

$$\le \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt}\int\limits_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(x-t)]G(t)\,dt \le$$

$$\le \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt}\times$$

$$\times\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\right)^{1/(\alpha-1)}\int\limits_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\left(\int\limits_0^t [2H(2s) - H(s) + K'(s)]\,ds\right)^{1/(\alpha-1}dt =$$

$$= \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt}G^\alpha(x).$$

Следовательно,

$$\frac{|(Tu)(x) - (Tv)(x)}{G(x)} \le \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt}G^{\alpha-1}(x) =$$

$$= \frac{\rho(u,v)}{(\alpha-1)\int_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt}\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\,dt \le q\cdot\rho(u,v),$$

откуда

$$\rho(Tu, Tv) \le q\cdot\rho(u,v), \tag{3.4}$$

где положительное число $q < 1$ определено равенством (3.2). Следовательно, оператор T является сжимающим - что и требовалось доказать.

Полученные выше результаты позволяют доказать следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (1.2), (1.3) и (3.2). Тогда интегральное уравнение (1.4) имеет в конусе Q_0 (и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$. Это решение можно найти в пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике ρ. При этом справедлива оценка скорости сходимости:*

$$\rho(u_n, u^*) \leq \frac{q^n}{1-q}\rho(Tu_0, u_0), \quad n \in \mathbb{N}, \tag{3.5}$$

где число $q < 1$ определено в условии (3.2), а $u_0 \in P_b$ есть начальное приближение (произвольная функция).

Доказательство. Запишем уравнение (1.4) в операторном виде: $u = Tu$. Из леммы 5 и оценки (3.4) вытекает, что для уравнения (1.4) выполнены все требования принципа сжимающих отображений. Следовательно, уравнение (1.4) имеет единственное решение $u^* \in P_b$ и это решение можно найти методом последовательных приближений по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, для которых справедлива оценка скорости сходимости (3.5).

Утверждение теоремы о единственности этого решения в конусе Q_0 доказывается точно так же как и в теореме 3 [17]. $\square$

Используя лемму 2, теорему 1 и равенства (см. [14, Лемма 2] и [1, с. 120], соответственно)

$$\int\limits_0^x H(x+t)\,dt = \int\limits_0^x [2H(2t) - H(t)]\,dt \quad \text{и} \quad \int\limits_0^x K'(x-t)\,dt = \int\limits_0^x K'(t)\,dt$$

мы можем теперь сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 2. *Пусть $\alpha > 1$ и выполнены условия (1.2), (1.3) и (3.2). Тогда интегро-дифференциальное уравнение*

$$u^\alpha(x) = \int\limits_0^x H(x+t)u(t)\,dt + \int\limits_0^x K(x-t)u'(t)\,dt, \quad x > 0, \tag{1.1}$$

имеет в конусе

$$Q_0^1 = \{u(x) :\ u \in C[0,\infty) \cap C^1(0,\infty),\ u(0) = 0 \text{ и } u(x) > 0 \text{ при } x > 0\}$$

(и в P_b при любом $b > 0$) единственное решение $u^*(x)$, причем для любого $x \in [0,\infty)$ выполняются неравенства

$$\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x [H(2t) + K'(0)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)} \leq u^*(x) \leq$$

$$\leq \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}\int\limits_0^x [H(x+t) + K'(t)]\,dt\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Это решение можно найти в пространстве P_b методом последовательных приближений пикаровского типа по формуле $u_n = Tu_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$, со сходимостью по метрике ρ, определенной равенством (3.1). При этом справедлива оценка скорости сходимости (3.5).

Легко показать, что в случае когда $0 < \alpha < 1$ уравнение (1.1) не имеет решений в конусе Q_0^1. В самом деле, если допустить противное, что $u \in Q_0^1$ и является решением уравнения (1.1), то с учетом того, что оно не убывает и тогда, когда $0 < \alpha < 1$ (см. доказательство леммы 1), из тождества (1.1) после интегрирования по частям получим

$$u^\alpha(x) \le u(x) \int_0^x H(x+t)dt + u(x) \int_0^x K'(x-t)dt, \quad x > 0,$$

откуда

$$u^{\alpha-1}(x) \le \int_0^x [2H(2t) - H(t)]\, dt + K(x).$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $x \to 0$ приходим к противоречию: $\infty \le 0$.

Замечание 1. *В линейном случае (т.е. при $\alpha = 1$), как и в случае, когда $0 < \alpha < 1$, интегро-дифференциальное уравнение (1.1) имеет в конусе Q лишь тривиальное решение $u(x) \equiv 0$.*

Из теоремы 2 следует, что при $\alpha > 1$ уравнение (1.1) может иметь нетривиальное решение и в этом состоит принципиальное отличие нелинейных интегральных уравнений вольтерровского типа от соответствующих однородных линейных уравнений, которые могут иметь лишь тривиальное решение. Приведем два примера.

Пример 1. Если $H(x) = C_1 \ge 0$ и $K(x) = C_2 x$, $C_2 > 0$, то кроме тривиального решения уравнение (1.1) имеет в конусе Q и нетривиальное решение:

$$u(x) = C \cdot x^{1/(\alpha-1)}, \quad \text{где} \quad C = \left(\frac{\alpha-1}{\alpha}[C_1 + C_2]\right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Пример 2. Если $\alpha = 2$, $H(x) = e^x$, $K(x) = e^x - 1$, то кроме тривиального решения уравнение (1.1) имеет в конусе Q и нетривиальное решение:

$$u(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{x/2} - 1.$$

В связи с условием (3.2) заметим, что

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x [2H(2t) - H(t) + K'(t)]\, dt}{\alpha \int_0^x [H(2t) + K'(0)]\, dt} = \lim_{x\to 0} \frac{2H(2x) - H(x) + K'(x)}{\alpha \cdot [H(2x) + K'(0)]} = \frac{1}{\alpha} < 1.$$

Значение этого предела подтверждает корректность условия (3.2). Более того, в случае ядер $H(x) = C_1 \ge 0$ и $K(x) = C_2 x$, $C_2 > 0$, удовлетворяющих, очевидно, основным условиям (1.2) и (1.3), дополнительное условие (3.2) также выполняется и при этом значение $q = 1/\alpha$.

В заключение отметим, что следуя работам [11] и [14] теорему 2 можно обобщить на случай уравнения вида (1.1) с неоднородностью в правой части, а в случае показателя α специального вида такое уравнение можно исследовать в пространстве Лебега $L_{1+\alpha}(0,\infty)$ методом монотонных по Браудеру-Минти операторов (см., например, [18]).

References

[1] S.N. Askhabov, *Nonlinear equations of convolution type*, Fizmatlit, Moscow, 2009.

[2] H. Brunner, *Volterra integral equations: an introduction to the theory and applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 2017.

[3] J.J. Keller, *Propagation of simple nonlinear waves in gas filled tubes with friction*, Z. Angew. Math. Phys., **32**:2 (1981), 170–181.

[4] W.R. Schneider, *The general solution of a nonlinear integral equation of the convolution type*, Z. Angew. Math. Phys., **33**:1 (1982), 140–142.

[5] W. Okrasinski, *Nonlinear Volterra equations and physical applications*, Extracta Math., **4**:2 (1989), 51–74.

[6] V.A. Kakichev, V.S. Rogozhin, *A generalization of an equation of Chandrasekhar*, Differ. Uravn., **2**:9 (1966), 1264–1270.

[7] A. F. Izmailov, *2-regularity and bifurcation theorems*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., **65** (1999), 90–117.

[8] P. K. Anh, N. M. Tuan, P. D. Tuan, *The finite new convolutions and solvability of the integral equations with Toeplitz plus Hankel kernels*, J. Math. Anal. Appl., **397**:3 (2013), 537–549.

[9] J. N. Tsitsiklis, B. C. Levy, *Integral equation and resolvents of Toeplitz plus Hankel kernels*, Technical report LIDS-P-1170, Laboratory for Information and Decision System. Cambridge: Massachusetts Institute of Technology, (1981), 1–19.

[10] T. Tuan, P. V. Hoang, N. T. Hong, Integral equation of Toeplitz plus Hankel's type and parabolic equation related to the Kontorovich-Lebedev-Fourier generalized convolutions, Math. Meth. Appl. Sci., (2018), 1–11. https://doi.org/10.1002/mma.5279

[11] F. D. Gakhov, Yu. I. Cherskii, *Convolution type equations*, Nauka, Moscow, 1978.

[12] V. G. Antipov, *A singular integral equation with a "sum" kernel*, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 6 (1959), 9–13.

[13] S.N. Askhabov, *System of integro-differential equations of convolution type with power nonlinearity*, Journal of Applied and Industrial Mathematics, **15**:3 (2021), 365–375.

[14] S.N. Askhabov, *On an integral equation with sum kernel and an inhomogeneity in the linear part*, Differential Equations, **57**:9 (2021), 1185–1194.

[15] V. A. Sadovnichii, A. A. Grigor'yan, S. V. Konyagin, *Problems of student mathematical olympiads*, Moscow State Univ., Moscow, 1987.

[16] N. N. Luzin, *Integral and trigonometric series*, GITTL, Moscow, 1951.

[17] S.N. Askhabov, *Integro-differential equation of the convolution type with a power nonlinearity and an inhomogeneity in the linear part*, Differential Equations, **56**:6 (2020), 775—784.

[18] S.N. Askhabov, N.K. Karapetyants, A.Ya. Yakubov, *Integral equations of convolution type with a power non-linearity, and their systems*, Sov. Math., Dokl. **41**:2 (1990), 323–327.

Sultan Nazhmudinovich Askhabov
Kadyrov Chechen State University,
32 Sheripova St.,
364024, Grozny, Russia

Chechen State Pedagogical University,
62 Kh. Isaeva Ave.,
364068, Grozny, Russia

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University),
Institutskiy per., 9,
141701, Dolgoprudny, Moscow Region, Russia
E-mail address: askhabov@yandex.ru