

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 20, №1, стр. 140–149 (2023)

УДК 510.5

DOI 10.33048/semi.2023.20.013

MSC 03D99

ОГРАНИЧЕННО КОМБИНАТОРНО-СЕЛЕКТОРНЫЕ МНОЖЕСТВА

Д.И. ИВАНОВ, О.В. ИВАНОВА

ABSTRACT. This article discusses the issue of classification of their own subsets of $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ by means of partial Boolean functions. For an arbitrary partial Boolean function β defines the notion of β -limited combinatorial-selector set, which is a generalization of the concept of β -selector set [1]. Fully describe the classes of these sets, the relationship between these classes by inclusion.

Keywords: combinatorial sets, combinatorial-selector sets, limited-combinatorial sets, limited combinatorial-selector set.

1. ВВЕДЕНИЕ

Представленная работа является логическим продолжением статьи [11], в которой рассматриваются подмножества множества $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ с точки зрения их классификации посредством булевых функций (БФ) и эффективной вычислимости. Начало такой классификации положил К. Джокуш, определив полурекурсивное множество [8], как множество $A \subseteq N$, для которого существует всюду определенная вычислимая функция $f : N \times N \rightarrow N$ такая, что

$$(\forall x) (\forall y) (f(x, y) \in \{x, y\} \wedge ((\chi(x) \vee \chi(y)) = 1 \Leftrightarrow f(x, y) \in A)) ,$$

где χ_A — характеристическая функция множества A , то есть

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in A; \\ 0, & \text{если } t \notin A. \end{cases}$$

IVANOV D.I. IVANOVA O.V., LIMITED COMBINATORIAL-SELECTOR SETS.

© 2022 ИВАНОВ Д.И., ИВАНОВА О.В..

Поступила 19 августа 2022 г., опубликована ?? февраля 2023 г.

Как видно, в определении участвует булева функция – дизъюнкция. По аналогии А.Н. Дегтев предложил использовать в определении произвольную БФ β , назвав такие множества β -комбинаторными, а именно, множество A называется β -комбинаторным, где β – произвольная n -местная БФ, если существует n -местная всюду определенная на N вычислимая функция f , принимающая значения из N , такая что

$$(\forall x_1, \dots, x_n) (\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in A).$$

Накладывая ограничения на функцию f , а именно, потребовав, чтобы функция f была селекторной, т. е.

$$(\forall x_1, \dots, x_n) (f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\}),$$

придем к определению понятия β -комбинаторно-селекторного (β -селекторного) множества [1, 4]. А меняя в нем эквивалентность на импликацию, получим определение β -импликативно-селекторного множества [3]. Рассматривая в качестве f произвольную частично вычислимую функцию, получим определения слабо β -импликативно-селекторного и β -комбинаторно-селекторного множеств, которые изучены и получены соотношения между их классами в работах [2, 5-7, 9, 10].

Ограниченно-комбинаторные множества, описанные в работе [11], являются обобщением понятия β -комбинаторных множеств посредством замены всюду определенной БФ на частичную. В настоящей статье рассматриваются ОК-множества с дополнительным требованием селекторности функции f , полностью описаны классы этих множеств и установлены их соотношения по включению.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем называть БФ β *частичной*, если хотя бы для одного из наборов

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \{0, 1\}^n$$

значение БФ β на этом наборе не определено ($\beta(\theta_1, \dots, \theta_n) \uparrow$).

Частично вычислимая функция f называется *селекторной*, если

$$(\forall x_1, \dots, x_n) (f(x_1, \dots, x_n) \downarrow \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\}),$$

где $f(x_1, \dots, x_n) \downarrow$ означает, что значение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ определено.

Подмножества множества $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, рассматриваемые в статье, полагаем отличными от \emptyset и N .

Определение 1. *Множество $A \subseteq N = \{0, 1, 2, \dots\}$ называется β -ограниченно комбинаторно-селекторным (β -ОКС), если существует n -местная частично вычислимая селекторная функция f такая, что для всех $x_1, \dots, x_n \in N$ выполнены условия:*

$$(i) f(x_1, \dots, x_n) \uparrow \Leftrightarrow \beta(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) \uparrow,$$

$$(ii) f(x_1, \dots, x_n) \in A \Leftrightarrow \beta(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) = 1,$$

где χ – характеристическая функция множества A . В этом случае говорим, что A является β -ОКС множеством с соответствующей частично вычислимой селекторной функцией f .

Назовем частичную БФ β *допустимой*, если она не является нигде не определенной и существует хотя бы одно β -ОКС множество A , такое что $A \neq \emptyset$,

$A \neq N$. Понятие допустимой БФ несколько отличается от аналогичного определения в статье [11], но в обоих вариантах обуславливается исключением из рассмотрения тривиальных случаев.

Будем обозначать класс всех перечислимых множеств — \mathbf{E}_1 , а $\mathbf{E}_0 = \{X : X = N \setminus Y, Y \in \mathbf{E}_1\}$ — класс множеств, имеющих перечислимое дополнение. Тогда $\mathbf{R} = \mathbf{E}_0 \cap \mathbf{E}_1$ — класс всех вычислимых множеств.

Рассмотрим ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основного результата.

Лемма 1. *Если β -допустимая БФ, то $\beta(\theta, \dots, \theta) \neq 1 - \theta \in \{0, 1\}$.*

Доказательство. Пусть A является β -ОКС множеством с соответствующей частично вычислимой селекторной функцией f для подходящей допустимой БФ β , a_θ — фиксированные элементы, такие что

$$a_\theta \in \begin{cases} A, & \text{если } \theta = 1 \\ N \setminus A, & \text{если } \theta = 0. \end{cases}$$

Тогда $f(a_\theta, \dots, a_\theta) = a_\theta$ (или же $f(a_\theta, \dots, a_\theta) \uparrow$), поэтому $\beta(\theta, \dots, \theta) = \theta$ (или $\beta(\theta, \dots, \theta) \uparrow$). \square

Лемма 2. *Любое вычислимое множество является β -ОКС множеством для всякой допустимой частичной БФ β .*

Доказательство. Пусть $A \in \mathbf{R}$, и β — произвольная допустимая n -местная частичная БФ. Определим n -местную частично вычислимую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ следующим образом: если $\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) \uparrow$, то считаем $f(x_1, \dots, x_n) \uparrow$; если $\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) = 1$, то полагаем $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$, где x_i — элемент с наименьшим номером, такой что: $x_i \in A$, заметим, такой x_i всегда найдётся для допустимой БФ по лемме 1; аналогично, если $\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) = 0$, то $f(x_1, \dots, x_n) = x_j$, где x_j — элемент с наименьшим номером, такой что: $x_j \in (N \setminus A) \cap \{x_1, \dots, x_n\}$. Таким образом, получили, что множество A является β -ОКС с частично вычислимой селекторной функцией f . \square

Поскольку всякое β -ОКС множество является и β -ОК, следующая лемма является прямым следствием леммы 2 статьи [11].

Лемма 3. *Всякое β -ОКС множество или является перечислимым, или имеет перечислимое дополнение, для любой допустимой частичной БФ β .* \square

В статье [1] описаны β -селекторные множества, которые можно получить, если в определении β -ОКС множества вместо частичной БФ использовать всюду определенную, при этом частично вычислимая селекторная функция станет всюду определенной. Доказано, что семейство β -селекторных множеств совпадает либо с семейством вычислимых, либо с семейством полурекурсивных множеств [1].

Замечание. Следует отметить, что в указанной статье [1] из рассмотрения исключается тождественная БФ $\beta(x) = x$, для которой любое подмножество множества N является β -селекторным множеством.

Лемма 4. Если частичная БФ β такая, что $\beta(0, 0, \dots, 0) \uparrow$ и $\beta(1, 1, \dots, 1) \uparrow$, или, если $\beta(0, 0, \dots, 0) \downarrow$ и $\beta(1, 1, \dots, 1) \downarrow$, то любое β -ОКС множество A вычислимо.

Доказательство. Пусть $\beta(0, 0, \dots, 0) \uparrow$, рассмотрим значения

$$\beta(1, 0, \dots, 0); \beta(0, 1, \dots, 0); \dots; \beta(0, 0, \dots, 1).$$

Если хотя бы одно из них определено, то, как следует из доказательства леммы 2 [11], $A \in \mathbf{E}_1$. Иначе, в каждом из n наборов заменим один из 0 на 1. Если хотя бы одно из полученных значений будет определено, то также $A \in \mathbf{E}_1$. Продолжая указанную процедуру, в любом случае получим $A \in \mathbf{E}_1$, так как БФ β не является нигде не определенной. Аналогично, если $\beta(1, 1, \dots, 1) \uparrow$, то β -ОКС множество A принадлежит классу \mathbf{E}_0 . Следовательно, если значения $\beta(0, 0, \dots, 0)$ и $\beta(1, 1, \dots, 1)$ не определены одновременно, то $A \in \mathbf{R}$.

Далее, пусть для частичной БФ $\beta : \beta(0, 0, \dots, 0) \downarrow, \beta(1, 1, \dots, 1) \downarrow$ и для некоторого набора $\beta(1, \dots, 1, \dots, 0, \dots, 0) \uparrow$. Меняя 0 на 1, на некотором шаге получим $A \in \mathbf{E}_1$, а меняя 1 на 0 — $A \in \mathbf{E}_0$, т. е. $A \in \mathbf{R}$. \square

Лемма 5. Для булевых функций

$$\beta_{\theta}(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta_1 = \dots = \theta_n = \theta \\ \uparrow, & \text{иначе,} \end{cases}$$

семейство β_{θ} -ОКС множеств совпадает с классом \mathbf{E}_{θ} .

Доказательство. По лемме 3 $A \in \mathbf{E}_{\theta}$ для любого β_{θ} -ОКС множества A . С другой стороны, любое перечислимое (коперечислимое) множество B является β -ОКС множеством с частично вычислимой селекторной функцией g , которую можно получить перечисляя множество B ($N \setminus B$):

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1, \dots, x_n \in B \text{ (} N \setminus B \text{)} \\ \uparrow, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

\square

Воспользуемся понятиями и терминами, сформулированными в работе [11].

Определение 2. [11] Сужение частичной булевой функции $\beta(t_1, \dots, t_n)$, полученное заменой $(n - m)$ ее переменных $t_{i_{m+1}}, \dots, t_{i_n}, 1 \leq m \leq (n - 1)$ на константы $\theta_{i_p} \in \{0, 1\}, p \in \{m + 1, \dots, n\}$, такое, что функция $\beta_1(t_{i_1}, \dots, t_{i_m})$ становится всюду определенной БФ, называется сужением по переменным t_{i_1}, \dots, t_{i_m} на наборе констант $(\theta_{i_{m+1}}, \dots, \theta_{i_n})$:

$$\beta_1(t_{i_1}, \dots, t_{i_m}) = \beta(t_{i_1}, \dots, t_{i_m})[\theta_{i_{m+1}}, \dots, \theta_{i_n}].$$

Определение 3. [11] Сужение называется максимальным, если оно всюду определенное и для любого $j \in \{m + 1, \dots, n\}$, булева функция

$$\beta_{1_j}(t_{i_1}, \dots, t_{i_m}, t_{i_j})[\theta_{i_{m+1}}, \dots, \theta_{i_{j-1}}, \theta_{i_{j+1}}, \dots, \theta_{i_n}]$$

становится частичной БФ для любого набора констант.

Лемма 6. Если БФ $\beta(t_1, \dots, t_n)$ допускает сужение по переменным t_{i_1}, \dots, t_{i_m} на наборе констант $(\theta_{i_{m+1}}, \dots, \theta_{i_n})$, причем существуют $l, t \in \{i_{m+1}, \dots, i_n\}$, $l \neq t$, такие что $\theta_l = 1 - \theta_t$, то семейство β -ОКС множеств совпадает с классом вычислимых множеств.

Доказательство. Переименовывая, если нужно, переменные, без ограничения общности можно считать, что сужение будет по первым m переменным. Если β удовлетворяет условию леммы, то для максимального сужения

$$\beta(t_1, \dots, t_m) [\theta_{m+1}, \dots, \theta, \dots, 1 - \theta, \dots, \theta_n]$$

существуют наборы $(\theta_1, \dots, \theta_m)$ и $(\delta_1, \dots, \delta_m)$, такие что

$$\begin{aligned} \beta(\theta_1, \dots, \theta_m, \theta_{m+1}, \dots, 1 - \theta, \dots, 1 - \theta, \dots, \theta_n) \uparrow, \\ \beta(\delta_1, \dots, \delta_m, \theta_{m+1}, \dots, \theta, \dots, \theta, \dots, \theta_n) \uparrow. \end{aligned}$$

Тогда, из доказательства леммы 2 [11], β -ОКС будет перечислимым и коперечислимым одновременно, т. е. вычислимым. \square

Может оказаться, что БФ β допускает несколько максимальных сужений.

Определение 4. [11] Последовательностью максимальных сужений для БФ β называется набор всех возможных ее максимальных сужений:

$$\begin{aligned} \beta_1(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1k_1}) &= \beta(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1k_1}) [\theta_{1(k_1+1)}, \theta_{1(k_1+2)}, \dots, \theta_{1n}], \\ &1 \leq k_1 < n, \\ \beta_2(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2k_2}) &= \beta(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2k_2}) [\theta_{2(k_2+1)}, \theta_{2(k_2+2)}, \dots, \theta_{2n}], \\ &1 \leq k_2 < n, \\ &\dots, \\ \beta_r(t_{r1}, t_{r2}, \dots, t_{rk_r}) &= \beta(t_{r1}, t_{r2}, \dots, t_{rk_r}) [\theta_{r(k_r+1)}, \theta_{r(k_r+2)}, \dots, \theta_{rn}], \\ &1 \leq k_r < n \end{aligned}$$

Определение 5. [11] Булева функция называется разложимой, если для каждого i ($1 \leq i \leq r$) функции последовательности максимальных сужений β_i получены на наборах одних и тех же констант (θ, \dots, θ) , $\theta \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \beta_1(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1k_1}) &= \beta(t_{11}, t_{12}, \dots, t_{1k_1}) [\theta, \theta, \dots, \theta], 1 \leq k_1 < n, \\ \beta_2(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2k_2}) &= \beta(t_{21}, t_{22}, \dots, t_{2k_2}) [\theta, \theta, \dots, \theta], 1 \leq k_2 < n, \\ &\dots, \\ \beta_r(t_{r1}, t_{r2}, \dots, t_{rk_r}) &= \beta(t_{r1}, t_{r2}, \dots, t_{rk_r}) [\theta, \theta, \dots, \theta], 1 \leq k_r < n, \end{aligned}$$

а в остальных случаях значение β не определено.

Лемма 7. Если допустимая частичная булева функция не является разложимой и отлична от функций

$$\beta_\theta(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta_1 = \dots = \theta_n = \theta \\ \uparrow, & \text{иначе,} \end{cases}$$

то любое β -ОКС множество A будет вычислимым ($A \in \mathbf{R}$).

Доказательство. По лемме 4, для функций, одновременно определённых или одновременно неопределённых на наборах из «нулей» и «единиц», β -ОКС множества будут вычислимыми.

Иначе, пусть $\beta(\theta, \dots, \theta) \downarrow$. Так как БФ не является разложимой и отлична от функций β_θ , значит, существует набор переменных (без ограничения общности

считаем t_1, t_2, \dots, t_k , $1 \leq k < n$), не входящих одновременно ни в одно из максимальных сужений, такой что $\beta(t_1, t_2, \dots, t_k, t_{k+1}, \dots, t_n) \downarrow$ при

$$t_1 = 1 - \theta, t_2 = 1 - \theta, \dots, t_k = 1 - \theta, 1 \leq k < n, t_{k+1} = \theta, \dots, t_n = \theta.$$

Зафиксируем этот набор констант. Если окажется, что переменная t_1 входит в одно из сужений на наборе из соответствующих констант данного набора, то при $k = 1$, получим $\beta(\theta, \dots, \theta) \uparrow$. Поэтому $k > 1$, и, если это максимальное сужение по одной переменной, то по лемме 6 семейство β -ОКС множеств совпадает с классом \mathbf{R} . Иначе, полагая, что переменная t_s так же участвует в этом максимальном сужении на наборе оставшихся констант и $s \in \{2, 3, \dots, k\}$, получим $k > 2$, и любое β -ОКС множество A так же попадет в класс \mathbf{R} (лемма 6). Если же $s \in \{k+1, k+2, \dots, n\}$, то $n - k \neq 1$ (т.к. иначе $\beta(1 - \theta, \dots, 1 - \theta) \downarrow$) и снова $A \in \mathbf{R}$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что семейство β -ОКС множеств является вычислимым, иначе придем к противоречию (так как t_1, t_2, \dots, t_k не входят одновременно ни в одно из максимальных сужений).

Может оказаться, что ни одно из максимальных сужений БФ β на наборе констант из зафиксированного набора не содержит ни одной переменной из множества $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$. Тогда, поменяв значение переменной t_1 на θ , получим, что для этого набора значение БФ не определено и $A \in \mathbf{E}_{1-\theta}$. Далее, присвоим t_2 значение θ , и, если значение функции для нового набора будет определено, то $A \in \mathbf{E}_\theta$, а, стало быть, A – вычислимо. Иначе, t_3 присвоим значение θ и продолжим процедуру. Тогда, либо на некотором шаге получим, что $A \in \mathbf{R}$, либо $\beta(\theta, \dots, \theta) \uparrow$, что противоречит условию. \square

Определение 6. Назовём сужение разложимой БФ особым, если оно отличается от константы и для него справедливо:

$$\beta(1 - \theta, 1 - \theta, \dots, 1 - \theta)[\theta, \theta, \dots, \theta] = \theta, \text{ для } \theta = 0 \text{ или } \theta = 1.$$

Лемма 8. Для любой разложимой БФ β , допускающей особое сужение, класс β -ОКС множеств совпадает с классом \mathbf{R} .

Доказательство. Пусть A – β -ОКС множество с частично вычисляемой селекторной функцией f для разложимой БФ β , а k -местная функция

$$\beta(\chi_A(x_{i_1}), \dots, \chi_A(x_{i_k}))[1, \dots, 1] : \beta(0, \dots, 0)[1, \dots, 1] = 1$$

является ее особым сужением. Может оказаться, что при некотором $l : 1 \leq l < k - 1$ (в случае равенства получим недопустимую БФ), функция на наборе из l «единиц» и $(k - l)$ «нулей» принимает значение 1, а из $(l + 1)$ «единиц» и $(k - l - 1)$ «нулей» – 0, т. е. с точностью до перестановки переменных

$$\begin{aligned} \beta(1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)[1, \dots, 1] &= 1 \\ \beta(1, \dots, 1, 1, 0, \dots, 0)[1, \dots, 1] &= 0 \end{aligned}$$

Выберем наименьшее из возможных l . Обозначим в f переменную, стоящую на $(l + 1)$ месте за x . Отождествим остальные переменные, принимающие в функции β значение 0 с y , а принимающие 1 – с z . Тогда

$$\beta(\chi_A(x), \chi_A(y), \chi_A(z)) : \beta(0, 0, 1) = 1, \beta(1, 0, 1) = 0$$

Пусть g – частично вычисляемая селекторная функция, полученная из f отождествлением соответствующих переменных, а $a \in A$, $\bar{a} \in N \setminus A$, тогда

$$g(x, \bar{a}, a) \in A \Leftrightarrow x \notin A,$$

т. к., вычисляемая функция g определена для любого аргумента x , значит, при $x \neq a$ и $x \neq \bar{a}$, верно $g(x, \bar{a}, a) \neq x$, что означает

$$x \in A \Leftrightarrow g(x, \bar{a}, a) = \bar{a}.$$

Поэтому, A является вычислимым множеством.

Если особым сужением β является функция $\beta(1, \dots, 1)[0, \dots, 0] = 0$, то, заменив все 0 на 1 и наоборот, и рассуждая аналогичным образом, получим, что и в этом случае A является вычислимым. \square

Замечание. Если же сужение (без ограничения общности - по первым k переменным) является константой, т. е.

$$(\forall x_1, \dots, x_k) \beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_k))[\theta, \dots, \theta] = \theta, \theta = 1(0).$$

то по лемме 3 β -ОКС множество A будет перечислимым (коперечислимым). Обратно, для любого перечислимого (коперечислимого) множества B , определим функцию f , перечисляя множество B ($N \setminus B$):

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \begin{cases} x_n, & \text{если вычисляются } x_{k+1}, \dots, x_n \\ \uparrow, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда B будет β -ОКС множеством с частично вычисляемой селекторной функцией f .

Теорема 1. *Для произвольной допустимой частичной БФ β , семейство β -ОКС множеств совпадает с семейством вычисляемых множеств \mathbf{R} или с семейством полурекурсивных перечислимых $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{S}$ или с семейством полурекурсивных коперечислимых множеств $\mathbf{E}_0 \cap \mathbf{S}$ или же с семейством перечислимых \mathbf{E}_1 или коперечислимых \mathbf{E}_0 множеств.*

Доказательство. Как было доказано ранее (лемма 7), для неразложимой БФ β , любое β -ОКС множество является вычислимым. Исключением являются функции β_θ , для которых семейство β_θ -ОКС множеств совпадает с классом \mathbf{E}_θ (лемма 5).

Рассмотрим далее разложимые БФ. Пусть множество A является β -ОКС для некоторой разложимой частичной БФ β с соответствующей вычисляемой функцией $f(x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим последовательность максимальных сужений функции $\beta : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$. Если хотя бы одно из сужений является особым, то множество A будет вычислимым (лемма 8). Поэтому, считаем данный случай рассмотренным. Иначе, так как

$$\beta_1(\chi_A(x_{11}), \chi_A(x_{12}), \dots, \chi_A(x_{1k_1})) = \beta(\chi_A(x_{11}), \chi_A(x_{12}), \dots, \chi_A(x_{1k_1}))[\theta, \theta, \dots, \theta]$$

всюду определенная БФ, то соответствующая ей вычисляемая функция $f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1})$, полученная из n -местной функции f подстановкой

$$x_{1(k_1+1)} = x_{1(k_1+2)} = \dots = x_{1n} = a_\theta,$$

станет также всюду определенной, где a_θ — фиксированный элемент, такой что

$$a_\theta \in \begin{cases} A, & \text{если } \theta = 1 \\ N \setminus A, & \text{если } \theta = 0. \end{cases}$$

Однако, нельзя утверждать, что функция f_1 будет селекторной. Поэтому, определим по ней k_1 -местную вычислимую функцию g_1 следующим образом: учитывая утверждение леммы 3 будем перечислять множество A ($N \setminus A$), если $\theta = 1(0)$, и положим

$$g_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) = f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}), \text{ если } f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) \neq a_\theta.$$

Если же $f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) = a_\theta$ и вычислилось первым значение

$$x_{1i} \in \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}\},$$

то положим $g_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) = x_{1i}$. Заметим, что такое значение вычислится всегда, т. к. сужение не является особым. Таким образом, вычислимая функция g_1 будет селекторной, а множество A окажется β_1 -селекторным с соответствующей функцией g_1 . Такие множества были рассмотрены в работе [1], в которой доказано, что семейство β -селекторных множеств совпадает либо с семейством рекурсивных (\mathbf{R}), либо с семейством полурекурсивных (\mathbf{S}) множеств. Если снять ограничение и считать функцию $\beta(x) = x$ допустимой, то следует добавить к рассмотрению семейство всех подмножеств множества N . Учитывая тот факт, что $A \in \mathbf{E}_\theta$, где $\theta \in \{0, 1\}$, можно утверждать: A принадлежит одному из классов: $\mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}, \mathbf{R}, \theta \in \{0, 1\}$.

Аналогично показывается, что множество A является также β_2, \dots, β_r -селекторным множеством с соответствующими всюду определенными вычислимыми функциями g_2, \dots, g_r , т. е. $A \in K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_r$, где

$$K_i \in \{\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}\}, \theta \in \{0, 1\}, i \in \{1, \dots, r\},$$

а, стало быть, A принадлежит одному из классов:

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}, \theta \in \{0, 1\}.$$

Обратно, возьмём произвольное множество B из того же класса, что и множество A . Тогда $B \in K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_r$, т. е. $B \in K_j$, для любого $j \in \{1, \dots, r\}$. Если для некоторого значения индекса s окажется, что

$$\beta_s(\chi_B(x_{s1}), \chi_B(x_{s2}), \dots, \chi_B(x_{sk_s}))[\theta, \dots, \theta] = \theta = \text{const}, \theta = 1(0),$$

определим соответствующую функцию

$$h_s^1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \begin{cases} x_{sn}, & \text{если } x_{s(k_s+1)}, \dots, x_{sn} \text{ вычисляются в } B(N \setminus B) \\ \uparrow, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь и далее индекс переменной x_{jl} , $l \in \{1, \dots, n\}$ обозначает ее позицию в функциях h_j^1

В других случаях множество B будет β_j -селекторным множеством, а соответствовать ему — всюду определенная вычислимая селекторная функция $h_j(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{jk_j})$. Доопределим каждую из таких функции h_j до n -местных

частично вычислимых функций h_j^1 следующим образом: перечисляя множество $B (N \setminus B)$, если $B \in \mathbf{E}_1(\mathbf{E}_0)$, положим $h_j^1 = h_j$, если значения переменных, которые входят в h_j^1 , но не входят в h_j , т.е. $x_{j(k_j+1)}, x_{j(k_j+2)}, \dots, x_{j n}$, принадлежат $B (N \setminus B)$, и h_j^1 не определено иначе. Очевидно, функция h_j^1 тоже будет селекторной.

Таким образом, получим множество частично вычислимых селекторных функции $h_j^1(x_1, \dots, x_n), j \in \{1, \dots, r\}$. Будем одновременно вычислять значения этих функций. Если первым вычислится значение $h_k^1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, для некоторого набора значений переменных $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, то положим

$$h(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = h_k^1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

если же ни одно из значений $h_j^1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ не вычислится, положим $h(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \uparrow$. Тогда множество B будет β -ОКС множеством с соответствующей вычислимой функцией $h(x_1, \dots, x_n)$. □

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве визуализации полученных результатов представим диаграмму соотношения между классами β -ограниченно комбинаторно-селекторных множеств по включению.

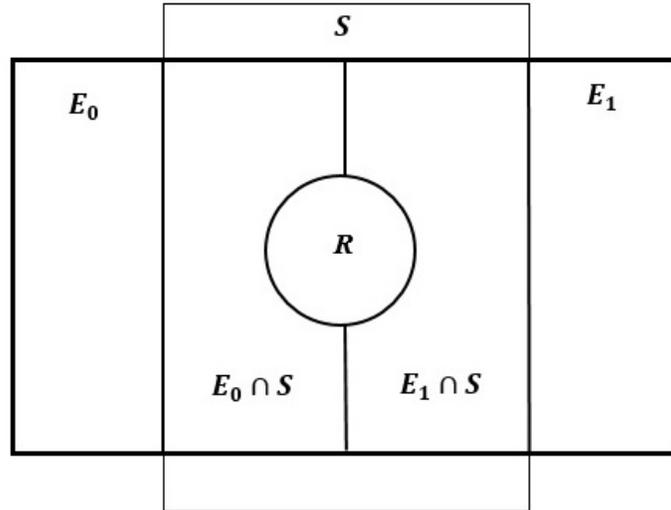


Рис. 1. Диаграмма включения классов β -ограниченно комбинаторно-селекторных множеств.

REFERENCES

- [1] A.N. Degtev, *Recursive-combinatorial properties of subsets of the natural numbers*, Algebra Logic, **29**:3 (1990), 204–210. Zbl 0727.03026
- [2] A.N. Degtev, *Weak combinatorial selective properties of subsets of the natural numbers*, Algebra Logic, **29**:4 (1990), 280–286. Zbl 0733.03033
- [3] A.N. Degtev, *Implicatively selector sets*, Algebra Logic, **35**:2 (1996), 80–85. Zbl 0897.03044

- [4] A.N. Degtev, *Almost combinatorial selector sets*, Math. Notes, **68**:6 (2000), 721–723. Zbl 0990.03032
- [5] A.N. Degtev, D.I. Ivanov, *Weakly combinatorial selector sets*, Algebra Logic, **37**:6 (1998), 357–362. Zbl 0913.03047
- [6] A.N. Degtev, D.I. Ivanov, *Weakly implicatively selective sets of dimension 3*, Discrete Math. Appl., **9**:4 (1999), 395–402. Zbl 0965.03055
- [7] A.N. Degtev, D.I. Ivanov, *About the classes of linear and self-dual weakly implicative selector sets*, Tyumen State University Herald, **4** (2004), 238–241.
- [8] C.G. jun. Jockusch, *Semirecursive sets and positive reducibility*, Trans. Am. Math. Soc., **131**:2 (1968), 420–436. Zbl 0198.32402
- [9] D.I. Ivanov, *Weakly implicative selector sets*, Russ. Math., **50**:9 (2006), 27–31. Zbl 07092351
- [10] D.I. Ivanov, *Weakly combinatorial selector sets*, Russ. Math., **50**:11 (2006), 20–23 (2006). Zbl 07092373
- [11] D.I. Ivanov, M.L. Platonov, M.L., *Limited-combinatorial sets*, Sib. Electron. Mat. Izv., **16** (2019), 1553–1560. Zbl 1436.03222

DMITRY IVANOVICH IVANOV
TYUMEN STATE UNIVERSITY,
VOLODARSKOGO ST., 6,
625003 TYUMEN, RUSSIAN FEDERATION
Email address: d.i.ivanov@utmn.ru

OLGA VLADIMIROVNA IVANOVA
Email address: iioffa@list.ru