

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 16, стр. 144–144 (2019)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

УДК 510.5
MSC 03D99

ОГРАНИЧЕННО КОМБИНАТОРНО-СЕЛЕКТОРНЫЕ
МНОЖЕСТВА

Д.И. ИВАНОВ, О.В. ИВАНОВА

ПРЕАМБУЛА. В настоящей статье рассматривается вопрос о классификации собственных подмножеств множества $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ посредством частичных булевых функций. Для произвольной частичной булевой функции β определено понятие β -ограниченно комбинаторно-селекторного множества, которое является обобщением понятия β -селекторного множества [1]. Полностью описаны классы этих множеств, выявлены соотношения между этими классами по включению.

Ключевые слова: комбинаторные множества, комбинаторно-селекторные множества, ограниченно-комбинаторные множества, ограниченно комбинаторно-селекторного множества.

АБСТРАКТ. This article discusses the issue of classification of their own subsets of $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ by means of partial Boolean functions. For an arbitrary partial Boolean function β defines the notion of β -limited combinatorial-selector set, which is a generalization of the concept of β -selector set [1]. Fully describe the classes of these sets, the relationship between these classes by inclusion.

Keywords: combinatorial sets, combinatorial-selector sets, limited-combinatorial sets, limited combinatorial-selector set.

1. ВВЕДЕНИЕ

Представленная работа является логическим продолжением статьи [11], в которой рассматриваются подмножества множества $N = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ с точки

IVANOV D.I. IVANOVA O.V., LIMITED COMBINATORIAL-SELECTOR SETS.

© 2022 ИВАНОВ Д.И., ИВАНОВА О.В..

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2022 г.

зрения их классификации посредством булевых функций (БФ) и эффективной вычислимости. Начало такой классификации положил К. Джокуш, определив полурекурсивное множество [8], как множество $A \in N$, для которого существует всюду определенная вычислимая функция $f : N \times N \rightarrow N$ такая, что

$$(\forall x)(\forall y) (f(x, y) \in \{x, y\} \wedge ((\chi(x) \vee \chi(y)) = 1 \Leftrightarrow f(x, y) \in A)) ,$$

где χ_A – характеристическая функция множества A , то есть

$$\chi_A(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \in A; \\ 0, & \text{если } t \notin A. \end{cases}$$

Как видно, в определении участвует булева функция – дизъюнкция. По аналогии А.Н. Дегтев предложил использовать в определении произвольную БФ β , назвав такие множества β -комбинаторными, а именно, множество A называется β -комбинаторным, где β – произвольная n -местная БФ, если существует n -местная всюду определенная на N вычислимая функция f , принимающая значения из N , такая что

$$(\forall x_1, \dots, x_n) (\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) = 1 \Leftrightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in A) .$$

Накладывая ограничения на функцию f , а именно, потребовав, чтобы функция f была селекторной, т. е.

$$(\forall x_1, \dots, x_n)(f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\}),$$

придем к определению понятия β -комбинаторно-селекторного (β -селекторного) множества [1, 4]. А меняя в нем эквивалентность на импликацию, получим определение β -импликативно-селекторного множества [3]. Рассматривая в качестве f произвольную частично вычислимую функцию, получим определения слабо β -импликативно-селекторного и β -комбинаторно-селекторного множеств, которые изучены и получены соотношения между их классами в работах [2, 5-7, 9, 10].

Ограниченно-комбинаторные множества, описанные в работе [11], являются обобщением понятия β -комбинаторных множеств посредством замены всюду определенной БФ на частичную. В настоящей статье рассматриваются ОК-множества с дополнительным требованием селекторности функции f , полностью описаны классы этих множеств и установлены их соотношения по включению.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем называть БФ β *частичной*, если хотя бы для одного из наборов

$$(\theta_1, \dots, \theta_n) \in \{0, 1\}^n$$

значение БФ β на этом наборе не определено ($\beta(\theta_1, \dots, \theta_n) \uparrow$).

Частично вычислимая функция f называется *селекторной*, если

$$(\forall x_1, \dots, x_n) (f(x_1, \dots, x_n) \downarrow \Rightarrow f(x_1, \dots, x_n) \in \{x_1, \dots, x_n\}),$$

где $f(x_1, \dots, x_n) \downarrow$ означает, что значение функции $f(x_1, \dots, x_n)$ определено.

Подмножества множества $N = \{0, 1, 2, \dots\}$, рассматриваемые в статье, полагаем отличными от \emptyset и N .

Определение 1. Множество $A \subseteq N = \{0, 1, 2, \dots\}$ называется β -ограниченно комбинаторно-селекторным (β -ОКС), если существует n -местная частично

вычислимая селекторная функция f такая, что для всех $x_1, \dots, x_n \in N$ выполнены условия:

- (i) $f(x_1, \dots, x_n) \uparrow \Leftrightarrow \beta(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) \uparrow$,
- (ii) $f(x_1, \dots, x_n) \in A \Leftrightarrow \beta(\chi(x_1), \dots, \chi(x_n)) = 1$,

где χ – характеристическая функция множества A . В этом случае говорим, что A является β -ОКС множеством с соответствующей частично вычислимой селекторной функцией f .

Назовем частичную БФ β *допустимой*, если она не является нигде не определённой и существует хотя бы одно β -ОКС множество A , такое что $A \neq \emptyset$, $A \neq N$.

Будем обозначать класс всех перечислимых множеств – \mathbf{E}_1 , а $\mathbf{E}_0 = \{X : X = N \setminus Y, Y \in \mathbf{E}_1\}$ – класс множеств, имеющих перечислимое дополнение. Тогда $\mathbf{R} = \mathbf{E}_0 \cap \mathbf{E}_1$ – класс всех вычислимых множеств.

Рассмотрим ряд вспомогательных утверждений, необходимых для доказательства основного результата.

Лемма 1. Если β -допустимая БФ, то $\beta(\theta, \dots, \theta) \neq 1 - \theta \in \{0, 1\}$.

Доказательство. Пусть A является β -ОКС множеством с соответствующей частично вычислимой селекторной функцией f для подходящей допустимой БФ β , a_θ – фиксированные элементы, такие что

$$a_\theta \in \begin{cases} A, & \text{если } \theta = 1 \\ N \setminus A, & \text{если } \theta = 0. \end{cases}$$

Тогда $f(a_\theta, \dots, a_\theta) = a_\theta$ (или же $f(a_\theta, \dots, a_\theta) \uparrow$), поэтому $\beta(\theta, \dots, \theta) = \theta$ (или $\beta(\theta, \dots, \theta) \uparrow$). □

Лемма 2. Любое вычислимое множество является β -ОКС множеством для всякой допустимой частичной БФ β .

Доказательство. Пусть $A \in \mathbf{R}$, и β – произвольная допустимая n -местная частичная БФ. Определим n -местную частично вычислимую функцию $f(x_1, \dots, x_n)$ следующим образом: если $\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) \uparrow$, то считаем $f(x_1, \dots, x_n) \uparrow$; если $\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) = 1$, то полагаем $f(x_1, \dots, x_n) = x_i$, где x_i – элемент с наименьшим номером, такой что: $x_i \in A \cap \{x_1, \dots, x_n\}$, заметим, такой x_i всегда найдётся для допустимой БФ по лемме 1; аналогично, если $\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n)) = 0$, то $f(x_1, \dots, x_n) = x_j$, где x_j – элемент с наименьшим номером, такой что: $x_j \in (N \setminus A) \cap \{x_1, \dots, x_n\}$. Таким образом, получили, что множество A является β -ОКС с частично вычислимой селекторной функцией f . □

Доказательство следующей леммы аналогично доказательству леммы 2 статьи [11].

Лемма 3. Всякое β -ОКС множество или является перечислимым, или имеет перечислимое дополнение, для любой допустимой частичной БФ β . □

В статье [1] описаны β -селекторные множества, которые можно получить, если в определении β -ОКС множества вместо частичной БФ использовать всюду определенную, при этом частично вычисляемая селекторная функция станет всюду определенной. Доказано, что семейство β -селекторных множеств совпадает либо с семейством вычисляемых, либо с семейством полурекурсивных множеств [1].

Замечание. Следует отметить, что в указанной статье [1] из рассмотрения исключается тождественная БФ $\beta(x) = x$, для которой любое подмножество множества N является β -селекторным множеством.

Лемма 4. *Если частичная БФ β такая, что $\beta(0, 0, \dots, 0) \uparrow$ и $\beta(1, 1, \dots, 1) \uparrow$, или, если $\beta(0, 0, \dots, 0) \downarrow$ и $\beta(1, 1, \dots, 1) \downarrow$, то β -ОКС множество $A \in \mathbf{R}$.*

Доказательство. Пусть $\beta(0, 0, \dots, 0) \uparrow$, рассмотрим значения

$$\beta(1, 0, \dots, 0); \beta(0, 1, \dots, 0); \dots, \beta(0, 0, \dots, 1).$$

Если хотя бы одно из них определено, то, как следует из доказательства леммы 3, $A \in \mathbf{E}_1$. Иначе, в каждом из n наборов заменим один из 0 на 1. Если хотя бы одно из полученных значений будет определено, то также $A \in \mathbf{E}_1$. Продолжая указанную процедуру, в любом случае получим $A \in \mathbf{E}_1$, так как БФ β не является нигде не определенной. Аналогично, если $\beta(1, 1, \dots, 1) \uparrow$, то β -ОКС множество $A \in \mathbf{E}_0$. Следовательно, если значения $\beta(0, 0, \dots, 0)$ и $\beta(1, 1, \dots, 1)$ не определены одновременно, то $A \in \mathbf{R}$.

Далее, пусть для частичной БФ $\beta : \beta(0, 0, \dots, 0) \downarrow, \beta(1, 1, \dots, 1) \downarrow$ и для некоторого набора $\beta(1, \dots, 1, \dots, 0, \dots, 0) \uparrow$. Меняя 0 на 1, на некотором шаге получим $A \in \mathbf{E}_1$, а меняя 1 на 0 — $A \in \mathbf{E}_0$, т. е. $A \in \mathbf{R}$. \square

Лемма 5. *Для булевых функций*

$$\beta_\theta(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta_1 = \dots = \theta_n = \theta \\ \uparrow, & \text{иначе,} \end{cases}$$

семейство β_θ -ОКС множеств совпадает с классом \mathbf{E}_θ .

Доказательство. По лемме 3 β_θ -ОКС $A \in E_\theta$. С другой стороны, любое перечислимое (коперечислимое) множество B является β -ОКС множеством с частично вычисляемой селекторной функцией g , которую можно получить переисчисляя множество B ($N \setminus B$):

$$g(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} x_1, & \text{если } x_1, \dots, x_n \in B \text{ (} N \setminus B \text{)} \\ \uparrow, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

\square

Воспользуемся понятиями и терминами, сформулированными в работе [11].

Определение 2. [11] *Сужение частичной булевой функции*

$$\beta(x_1, \dots, x_l, x_{l+1}, \dots, x_n),$$

полученное заменой некоторых переменных (например, x_{l+1}, \dots, x_n , $1 \leq l \leq (n-1)$) на константы $\theta_i \in \{0, 1\}$, $i \in \{l+1, \dots, n\}$, такое, что функция $\beta_1(x_1, \dots, x_l)$ становится всюду определенной БФ, называется сужением по переменным x_1, \dots, x_l на наборе констант $(\theta_{l+1}, \dots, \theta_n)$:

$$\beta_1(x_1, \dots, x_l) = \beta(x_1, \dots, x_l, \theta_{l+1}, \dots, \theta_n) = \beta(x_1, \dots, x_l, \theta_{l+1}, \dots, \theta_n).$$

Определение 3. [11] Сужение называется максимальным, если оно всюду определенное и для любого $j \in \{l+1, \dots, n\}$, булева функция

$$\beta_{1j}(x_1, \dots, x_l, x_j) = \beta(x_1, \dots, x_l, \theta_{l+1}, \dots, \theta_{j-1}, x_j, \theta_{j+1}, \dots, \theta_n)$$

становится частичной БФ.

Лемма 6. Если БФ допускает сужение по переменным x_1, \dots, x_l на наборе констант $(\theta_{l+1}, \dots, \theta_n)$, причем существуют $i, j \in \{l+1, \dots, n\}$, $i \neq j$, такие что $\theta_i = 1 - \theta_j$, то семейство β -ОКС множеств совпадает с классом вычислимых множеств.

Доказательство. Если β удовлетворяет условию леммы, то для максимального сужения $\beta(x_1, \dots, x_l, \theta_{l+1}, \dots, \theta, \dots, 1 - \theta, \dots, \theta_n)$ существуют наборы $(\theta_1, \dots, \theta_l)$ и $(\delta_1, \dots, \delta_l)$, такие что

$$\begin{aligned} \beta(\theta_1, \dots, \theta_l, \theta_{l+1}, \dots, 1 - \theta, \dots, 1 - \theta, \dots, \theta_n) \uparrow, \\ \beta(\delta_1, \dots, \delta_l, \theta_{l+1}, \dots, \theta, \dots, \theta, \dots, \theta_n) \uparrow. \end{aligned}$$

Тогда, по лемме 3, β -ОКС будет перечислимым и коперечислимым одновременно, т. е. вычислимым. \square

Определение 4. [11] Последовательность максимальных сужений для БФ β называется набором всех возможных ее максимальных сужений:

$$\begin{aligned} \beta_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) &= \beta(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) [\theta_{1(k_1+1)}, \theta_{1(k_1+2)}, \dots, \theta_{1n}], \\ &1 \leq k_1 < n, \\ \beta_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2}) &= \beta(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2}) [\theta_{2(k_2+1)}, \theta_{2(k_2+2)}, \dots, \theta_{2n}], \\ &1 \leq k_2 < n, \\ &\dots, \\ \beta_r(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rk_r}) &= \beta(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rk_r}) [\theta_{r(k_r+1)}, \theta_{r(k_r+2)}, \dots, \theta_{rn}], \\ &1 \leq k_r < n \end{aligned}$$

Определение 5. [11] Булева функция называется разложимой, если для каждого i ($1 \leq i \leq r$) функции последовательности максимальных сужений β_i получены на наборах одних и тех же констант (θ, \dots, θ) , $\theta \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} \beta_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) &= \beta(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) [\theta, \theta, \dots, \theta], 1 \leq k_1 < n, \\ \beta_2(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2}) &= \beta(x_{21}, x_{22}, \dots, x_{2k_2}) [\theta, \theta, \dots, \theta], 1 \leq k_2 < n, \\ &\dots, \\ \beta_r(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rk_r}) &= \beta(x_{r1}, x_{r2}, \dots, x_{rk_r}) [\theta, \theta, \dots, \theta], 1 \leq k_r < n, \end{aligned}$$

а в остальных случаях $\beta \uparrow$.

Лемма 7. Если допустимая частичная булева функция не является разложимой и отлична от функций

$$\beta_\theta(\theta_1, \dots, \theta_n) = \begin{cases} \theta, & \text{если } \theta_1 = \dots = \theta_n = \theta \\ \uparrow, & \text{иначе,} \end{cases}$$

то любое β -ОКС множество A будет вычислимым ($A \in R$).

Доказательство. По лемме 4, для функций, одновременно определённых или одновременно неопределённых на наборах из «нулей» и «единиц», β -ОКС множества будут вычислимыми.

Иначе, пусть $\beta(\theta, \dots, \theta) \downarrow$. Так как БФ не является разложимой и отлична от функций β_θ , значит, существует набор переменных (без ограничения общности считаем x_1, x_2, \dots, x_k , $1 \leq k < n$), не входящих одновременно ни в одно из максимальных сужений, такой что $\beta(x_1, x_2, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) \downarrow$ при

$$x_1 = 1 - \theta, x_2 = 1 - \theta, \dots, x_k = 1 - \theta, 1 \leq k < n, x_{k+1} = \theta, \dots, x_n = \theta.$$

Зафиксируем этот набор констант. Если окажется, что переменная x_1 входит в одно из сужений на наборе из соответствующих констант данного набора, то при $k = 1$, получим $\beta(\theta, \dots, \theta) \uparrow$. Поэтому $k > 1$, и, если это максимальное сужение по одной переменной, то по лемме 6 семейство β -ОКС множеств совпадает с классом \mathbf{R} . Иначе, полагая, что переменная x_s так же участвует в этом максимальном сужении на наборе оставшихся констант и $s \in \{2, 3, \dots, k\}$, получим $k > 2$, и любое β -ОКС множество A так же попадет в класс \mathbf{R} (лемма 6). Если же $s \in \{k+1, k+2, \dots, n\}$, то $n - k \neq 1$ (т.к. иначе $\beta(1 - \theta, \dots, 1 - \theta) \downarrow$) и снова $A \in \mathbf{R}$. Продолжая аналогичные рассуждения, получим, что семейство β -ОКС множеств является вычислимым, иначе придем к противоречию (так как x_1, x_2, \dots, x_k не входят одновременно ни в одно из максимальных сужений).

Может оказаться, что ни одно из максимальных сужений БФ β на наборе констант из зафиксированного набора не содержит ни одной переменной из множества $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$. Тогда, поменяв значение переменной x_1 на θ , получим, что для этого набора значение БФ не определено и $A \in \mathbf{E}_{1-\theta}$. Далее, присвоим x_2 значение θ , и, если значение функции для нового набора будет определено, то $A \in \mathbf{E}_\theta$, а, стало быть, A – вычислимо. Иначе, x_3 присвоим значение θ и продолжим процедуру. Тогда, либо на некотором шаге получим, что $A \in \mathbf{R}$, либо $\beta(\theta, \dots, \theta) \uparrow$, что противоречит условию. \square

Определение 6. Назовём сужение разложимой БФ особым, если:

$$\beta(x_1, \dots, x_k)[\theta, \dots, \theta] = \theta \neq \text{const}$$

и для него справедливо:

$$\beta(1 - \theta, 1 - \theta, \dots, 1 - \theta)[\theta, \theta, \dots, \theta] = \theta, \text{ для } \theta = 0 \text{ или } \theta = 1.$$

Лемма 8. Для любой разложимой БФ β , допускающей особое сужение, класс β -ОКС множеств совпадает с классом \mathbf{R} .

Доказательство. Пусть A – β -ОКС множество с частично вычисляемой селекторной функцией f для разложимой БФ β , а k -местная функция

$$\beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_k))[1, \dots, 1] : \beta(0, \dots, 0)[1, \dots, 1] = 1$$

является ее особым сужением. Может оказаться, что при некотором $l : 1 \leq l < k - 1$ (в случае равенства получим недопустимую БФ), функция на наборе из l «единиц» и $(k - l)$ «нулей» принимает значение 1, а из $(l + 1)$ «единиц» и $(k - l - 1)$ «нулей» – 0, т. е.

$$\begin{aligned} \beta(1, \dots, 1, 0, 0, \dots, 0)[1, \dots, 1] &= 1 \\ \beta(1, \dots, 1, 1, 0, \dots, 0)[1, \dots, 1] &= 0 \end{aligned}$$

Выберем наименьшее из возможных l . Отождествим в функции β переменные $\chi_A(x_i)$, $1 \leq i \leq n$, $i \neq l+1$, для которых $\theta_i = 0$ с $\chi_A(x_k) = \chi_A(y)$, а $\chi_A(x_j)$, $1 \leq j \leq n$, $j \neq l+1$, для которых $\theta_j = 1$ с $\chi_A(x_1) = \chi_A(z)$, считая $x = x_{l+1}$, получим

$$\beta(\chi_A(x), \chi_A(y), \chi_A(z)) : \beta(0, 0, 1) = 1, \beta(1, 0, 1) = 0$$

Пусть g – частично вычислимая селекторная функция, полученная из f отождествлением соответствующих переменных, а $a \in A$, $\bar{a} \in N \setminus A$, тогда

$$g(x, \bar{a}, a) \in A \Leftrightarrow x \notin A,$$

т. к., вычислимая функция g определена для любого аргумента x , значит, при $x \neq a$ и $x \neq \bar{a}$, верно $g(x, \bar{a}, a) \neq x$, что означает

$$x \in A \Leftrightarrow g(x, \bar{a}, a) = \bar{a}.$$

Поэтому, A является вычислимым множеством.

Если особым сужением β является функция $\beta(1, \dots, 1)[0, \dots, 0] = 0$, то, заменив все 0 на 1 и наоборот, и рассуждая аналогичным образом, получим, что и в этом случае A является вычислимым. \square

Замечание. Если же сужение является константой, т. е.

$$(\forall x_1, \dots, x_n) \beta(\chi_A(x_1), \dots, \chi_A(x_n))[\theta, \dots, \theta] = \theta, \theta = 1(0).$$

то по лемме 3 β -ОКС множество A будет перечислимым (коперечислимым). Обратное, для любого перечислимого (коперечислимого) множества B , определим функцию f , перечисляя множество B ($N \setminus B$):

$$f(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \begin{cases} x_n, & \text{если вычисляются } x_{k+1}, \dots, x_n \\ \uparrow, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда B будет β -ОКС множеством с частично вычислимой селекторной функцией f .

Теорема 1. Для произвольной допустимой частичной БФ β , семейство β -ОКС множеств совпадает с семейством вычислимых множеств \mathbf{R} или с семейством полурекурсивных перечислимых $\mathbf{E}_1 \cap \mathbf{S}$ или с семейством полурекурсивных коперечислимых множеств $\mathbf{E}_0 \cap \mathbf{S}$ или же с семейством перечислимых \mathbf{E}_1 или коперечислимых \mathbf{E}_0 множеств.

Доказательство. Как было доказано ранее (лемма 7), для неразложимой БФ β , любое β -ОКС множество является вычислимым. Исключением являются функции β_θ , для которых семейство β_θ -ОКС множеств совпадает с классом \mathbf{E}_θ (лемма 5).

Рассмотрим далее разложимые БФ. Пусть множество A является β -ОКС для некоторой разложимой частичной БФ β с соответствующей вычислимой функцией $f(x_1, \dots, x_n)$. Рассмотрим последовательность максимальных сужений функции $\beta : \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$. Если хотя бы одно из сужений является особым, то множество A будет вычислимым (лемма 8). Поэтому, считаем данный случай рассмотренным. Иначе, так как

$$\beta_1(\chi_A(x_{11}), \chi_A(x_{12}), \dots, \chi_A(x_{1k_1})) = \beta_1(\chi_A(x_{11}), \chi_A(x_{12}), \dots, \chi_A(x_{1k_1}))[\theta, \theta, \dots, \theta]$$

всюду определенная $B\Phi$, то соответствующая ей вычислимая функция

$$f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) = f(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}, a^\theta, \dots, a^\theta)$$

станет также всюду определенной, где a^θ – фиксированный элемент, такой что

$$a^\theta \in \begin{cases} A, & \text{если } \theta = 1 \\ N \setminus A, & \text{если } \theta = 0. \end{cases}$$

Однако, нельзя утверждать, что функция f_1 будет селекторной. Поэтому, определим по ней k_1 -местную вычислимую функцию g_1 следующим образом: учитывая утверждение леммы 3 будем перечислять множество A ($N \setminus A$), если $\theta = 1(0)$, и положим

$$g_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) = f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}), \text{ если } f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) \neq a^\theta.$$

Если же $f_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) = a^\theta$ и вычислилось первым значение

$$x_{1i} \in \{x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}\},$$

то положим $g_1(x_{11}, x_{12}, \dots, x_{1k_1}) = x_{1i}$. Заметим, что такое значение вычислится всегда, т. к. сужение не является особым. Таким образом, вычислимая функция f_1 будет селекторной, а множество A окажется β_1 -селекторным с соответствующей функцией f_1 . Такие множества были рассмотрены в работе [1], доказано, что семейство β -селекторных множеств совпадает либо с семейством рекурсивных (\mathbf{R}), либо с семейством полурекурсивных (\mathbf{S}) множеств. Если снять ограничение и считать функцию $\beta(x) = x$ допустимой, то следует добавить к рассмотрению семейство всех подмножеств множества N . Учитывая тот факт, что $A \in \mathbf{E}_\theta$, где $\theta \in \{0, 1\}$, можно утверждать: A принадлежит одному из классов: $\mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}, \mathbf{R}, \theta \in \{0, 1\}$.

Аналогично показывается, что множество A является также β_2, \dots, β_r -селекторным множеством с соответствующими всюду определенными вычислимыми функциями f_2, \dots, f_r , т. е. $A \in K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_r$, где

$$K_i \in \{\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}\}, \theta \in \{0, 1\}, i \in \{1, \dots, r\},$$

а, стало быть, A принадлежит одному из классов:

$$\mathbf{R}, \mathbf{E}_\theta, \mathbf{E}_\theta \cap \mathbf{S}, \theta \in \{0, 1\}.$$

Обратно, возьмём произвольное множество B из того же класса, что и множество A , тогда $B \in K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_r$, т. е. $B \in K_j$, для любого $j \in \{1, \dots, r\}$. Если для некоторого значения индекса s окажется, что

$$\beta_s(t_1, \dots, t_{k_s})[\theta, \dots, \theta] = \theta = \text{const}, \theta = 1(0),$$

определим соответствующую функцию

$$g_s^1(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots, x_n) = \begin{cases} x_n, & \text{если } x_{k+1}, \dots, x_n \text{ вычисляются в } B(N \setminus B) \\ \uparrow, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

В других случаях множество B будет β_j -селекторным множеством, а соответствовать ему — всюду определенная вычислимая селекторная функция g_j . Доопределим каждую из таких функции g_j до n -местных частично вычислимых функций g_j^1 следующим образом: перечисляя множество B ($N \setminus B$), если $B \in \mathbf{E}_1(\mathbf{E}_0)$, положим $g_j^1 = g_j$, если значения переменных, которые входят в g_j^1 , но не входят в g_j , принадлежат B ($N \setminus B$), и $g_j^1 \uparrow$ иначе. Очевидно, функция g_j^1 тоже будет селекторной.

Таким образом, получим множество частично вычислимых селекторных функции $g_j^1(x_1, \dots, x_n), j \in \{1, \dots, r\}$. Будем одновременно вычислять значения этих функций. Если первым вычислится значение $g_k^1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, для некоторого набора значений переменных $x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0$, то положим

$$g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) = g_k^1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0),$$

если же ни одно из значений $g_j^1(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ не вычислится, положим $g(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0) \uparrow$. Тогда множество B будет β -ОК множество с соответствующей вычислимой функцией $g(x_1, \dots, x_n)$. □

3. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В качестве визуализации полученных результатов представим диаграмму соотношения между классами β -ограниченно комбинаторно-селекторных множеств по включению.

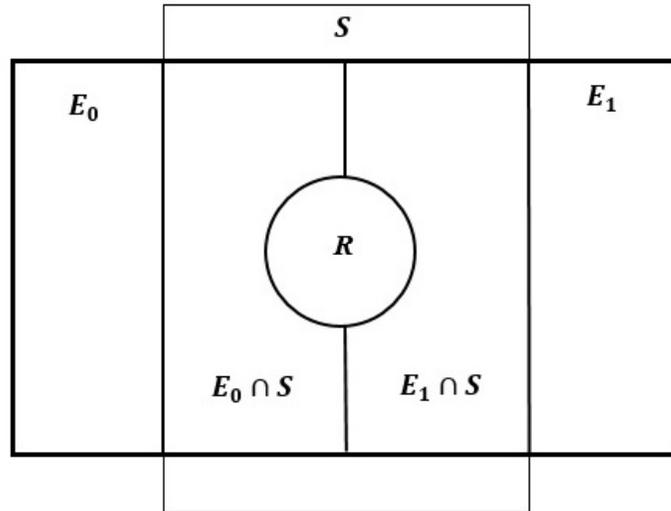


Рис. 1. Диаграмма включения классов β -ограниченно комбинаторно-селекторных множеств.

REFERENCES

- [1] Degtev A.N., *Recursive-combinatorial properties of subsets of the natural numbers*, Algebra and Logic, 29:3 (1990), 204–210. Zbl 0727.03026
- [2] Degtev A.N., *Weak combinatorial selective properties of subsets of the natural numbers*, Algebra and Logic, 29:4 (1990), 280–286. MR1155470. Zbl 0733.03033
- [3] Degtev A.N., *Implicatively selector sets*, Algebra and Logic, 35:2 (1996), 80–85. MR1444649
- [4] Degtev A.N., *Almost combinatorial selector sets*, Mathematical notes, 68:6 (2000), 721–723. MR1835183. Zbl 0990.03032
- [5] Degtev A.N., Ivanov D.I., *Weakly combinatorial selector sets*, Algebra and Logic, 37:6 (1998), 357–362. MR1680420. Zbl 0913.03047
- [6] Degtev A.N., Ivanov D.I., *Weakly implicatively selective sets of dimension 3*, Discrete Mathematics and Applications, 9:4 (1999), 395–402. MR1739074. Zbl 0965.03055
- [7] Degtev A.N., Ivanov D.I., *About the classes of linear and self-dual weakly implicative selector sets*, Tyumen State University Herald, 4 (2004), 238–241 [in Russian].
- [8] Jockusch, C. G. Jr., *Semirecursive sets and positive reducibility*, Transactions of the American Mathematics Society, 131:2 (1968), 420–436. MR220595. Zbl 0198.32402
- [9] Ivanov D.I., *Weakly implicative selector sets*, Russian Mathematics, 50:9 (2006), 27–31. Zbl 07092351
- [10] Ivanov D.I., *Weakly combinatorial-selector sets*, Russian Mathematics, 50:11 (2006), 20–23 (2006). Zbl 07092373
- [11] Ivanov, D.I., Platonov, M.L., *Limited-combinatorial sets*, Siberian Electronic Mathematical Reports, 16 (2019), 1553–1560. [in Russian]. Zbl 1436.03222

DMITRY IVANOVICH IVANOV
TYUMEN STATE UNIVERSITY,
VOLODARSKOGO ST., 6,
625003 TYUMEN, RUSSIAN FEDERATION
Email address: d.i.ivanov@utmn.ru

OLGA VLADIMIROVNA IVANOVA
Email address: i1offa@list.ru