

**РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРОЙНИКОВОМ
СОЕДИНЕНИИ ТРУБ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ С
ПРИМЕНЕНИЕМ СОВРЕМЕННЫХ ПОДХОДОВ К
МОДЕЛИРОВАНИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ**

А.С. КОЗЕЛКОВ, Е.С. ТЯТЮШКИНА, А.А. КУРКИН, В.В. КУРУЛИН, О.Е.
КУРКИНА, О.А. КОЧЕТОВА

ABSTRACT. In the article the description is given of the new technique for fluid flow simulation in T-joints of square pipes, based on the numerical solution of the three-dimensional Navier-Stokes equations. As part of the methodology for solving these equations, a modern approach to modeling turbulence is used - the zonal EARSМ-LES approach, in which in areas of intense vortex formation, and where it is necessary to increase the accuracy of the solution obtained, the LES turbulence model is used, in the rest of the area the Reynolds stress model EARSМ is used. The EARSМ model simulates the transfer of all components of the Reynolds stress tensor, which leads to an increase in accuracy when calculating complex flows, in particular, flows near dihedral angles. The article describes a mathematical model based on the Reynolds-averaged three-dimensional Navier-Stokes equations, as well as the equations of the EARSМ-LES hybrid model used. The comparison of the use of different basic models, such as EARSМ and SST, in the RANS-LES approach for 3D problems containing dihedral angles. It is shown that the EARSМ model gives an increase in accuracy compared to the SST, which is explained by taking into account the anisotropy of the Reynolds stress tensor in it, the velocity profiles and components of the Reynolds

KOZELKOV A., TYATYUSHKINA E., KURKIN A., KURULIN V., KURKINA O., KOCHETKOVA O., FLUID FLOW SIMULATION IN A T-CONNECTION OF SQUARE PIPES USING MODERN APPROACHES TO TURBULENCE MODELING.

© 2022 Козелков А.С., Тятюшкина Е.С., Куркин А.А., Курулин В.В., Куркина О.Е., Кочетова О.А..

Результаты получены в рамках программы Минобрнауки РФ по созданию молодёжных лабораторий (тема № FSWE-2021-0008 «Гидродинамические и тепломассообменные процессы в элементах ядерных энергетических установок») и при поддержке гранта Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ НШ-70.2022.1.5.

stress tensor according to the EARSM model are predicted much more accurately than using the SST. Due to this, the EARSM-LES model ultimately gives better results in terms of velocity and tensor components than the SST-LES model.

The Russian software package for computational fluid dynamics and engineering analysis LOGOS was used to simulate the tasks presented in this paper.

Keywords: numerical simulation, Navier-Stokes equations, turbulence, LOGOS software package, T-connections

1. ВВЕДЕНИЕ

Тройниковое соединение квадратных труб часто встречается в различных технологических установках, включая климатические системы автомобиля, атомные реакторы. Квадратное сечение каналов приводят к наличию в геометрии двугранных углов, в которых образуются вторичные токи, которые требуют точного моделирования и применения современных подходов к моделированию турбулентности. В настоящее время наиболее применимыми на практике являются RANS модели [1, 2, 3, 4], которые характеризуются устойчивым итерационным процессом и приемлемыми результатами для большинства практически важных типов течений. Из всего многообразия RANS моделей хорошо зарекомендовала себя на практике модель SST Ментера [3, 5]. Однако и она не является универсальной и подходящей для решения широкого круга прикладных задач, в частности, могут возникать проблемы при описании вторичных токов.

Данного недостатка лишен «свободный от эмпиризма» DNS подход, базирующийся на первых принципах гидродинамики, применение которого на практике ограничено из-за потребности в огромных вычислительных ресурсах [6]. Альтернативой DNS является более свободный от эмпиризма LES подход, применение которого требует определенного качества дискретных моделей, что проявляется в существенно более мелких сетках по сравнению с RANS. Особенно это характерно для областей вблизи твердых стенок, где вихревые структуры имеют довольно малые размеры [2] и требования к сеточному разрешению могут приближаться к DNS.

Понимание того, что применение LES подхода для большей части практических задач возможно только в отдаленной перспективе [6], послужило толчком для создания гибридных моделей. Эти модели, как правило, используют LES подход в областях интенсивного вихреобразования, и где необходимо увеличить точность получаемого решения, в остальной области используется одна из моделей RANS [2, 7]. Такой подход позволяет сократить необходимые вычислительные затраты, по сравнению с LES. Наиболее известными гибридными моделями являются метод отсоединенных вихрей (DES, Detached Eddy Simulation) [2], а также зонный RANS-LES подход [7], которые наряду с LES подходом относят к вихреразрешающим моделям.

В статье описывается метод моделирования течений в тройниковых соединениях труб квадратного сечения с применением современного подхода моделирования турбулентности – зонного RANS-LES подхода. Приводится описание математической модели, в основе которой лежат осредненные по Рейнольдсу

трёхмерные уравнения Навье – Стокса [3, 4, 8], а также уравнения используемой гибридной модели RANS-LES. Формулировка RANS-LES модели основывается на модели рейнольдсовых напряжений EARSM [9], в которой не применяется гипотеза Бусинеска, а моделируется перенос всех компонентов тензора рейнольдсовских напряжений, что приводит к увеличению точности при расчете сложных течений, где существенными являются все компоненты тензора [9]. К таким ситуациям относятся и течения вблизи двугранных углов.

В статье проведено сравнение использования разных базовых моделей в RANS-LES подходе для трехмерных задач, содержащих двугранные углы. В качестве базовых используются модели турбулентности SST и EARSM. Показано, что профиль скорости и компоненты тензора рейнольдсовых напряжений τ_{ij}^t по модели EARSM предсказаны намного точнее, чем по SST. Благодаря этому, модель EARSM-LES в итоге дает результаты по скорости и по компонентам тензора τ_{ij}^t лучше, чем модель SST-LES.

На задаче моделирования течения в тройниковом соединении труб квадратного сечения представлен поэтапный алгоритм применения модели EARSM-LES, приведено описание результатов численного моделирования и сравнение с экспериментальными данными. Приводятся результаты моделирования данной задачи как с применением гибридного подхода, так и моделями турбулентности SST и EARSM. Показано, что модель EARSM дает увеличение точности, по сравнению с SST, что объясняется учетом в ней анизотропности тензора рейнольдсовских напряжений, а применение зонного подхода EARSM-LES дает еще более лучший результат.

Для моделирования течений в тройниковых соединениях труб квадратного сечения используется российский пакет программ инженерного анализа ЛОГОС, предназначенный для решения сопряженных трехмерных задач конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на произвольных неструктурированных сетках на параллельных ЭВМ. Все описанные ниже модели турбулентности реализованы в пакете программ ЛОГОС, который успешно прошел верификацию и показал достаточно хорошие результаты на серии различных гидродинамических и промышленных задач [10, 11, 12, 13, 14], включая расчеты турбулентных течений [4, 15, 16]. Все численные расчеты в настоящей статье проведены в пакете программ ЛОГОС.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

Система уравнений Рейнольдса может быть получена путем осреднения по времени нестационарных трехмерных уравнений Навье–Стокса [1]. Рассмотрим осредненную по Рейнольдсу систему уравнений для несжимаемой жидкости (1). Осредненная система для несжимаемой жидкости имеет вид [1] (знаки осреднения для скорости, давления, температуры опущены):

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i) = 0 \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\tau_{ij} + \tau_{ij}^t) \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i T) = \frac{\partial}{\partial x_j} (u_i (\tau_{ij} + \tau_{ij}^t) - q_j - q_j^t). \end{cases}$$

Система уравнений (1) является незамкнутой из-за неизвестной связи одних из основных переменных этой системы τ_{ij}^t - тензора рейнольдсовских напряжений с осредненными параметрами течения. Эта связь, отражающая вклад турбулентных пульсаций в основной поток, может быть установлена с помощью дополнительных соотношений, называемых в общем случае моделями турбулентности.

Линейные дифференциальные модели турбулентности используют эмпирические соотношения для коэффициента турбулентной вязкости μ_t , гипотезу Буссинеска и закон Фурье для вычисления тензора напряжений и теплового потока соответственно [1]:

$$(2) \quad \begin{aligned} \tau_{ij}^t &= 2\mu_t \left(S_{ij} - \frac{1}{3} I_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3} k I_{ij}, \quad S_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ q_i^t &= -\lambda_t \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \lambda_t = \frac{C_p \mu_t}{Pr_t}. \end{aligned}$$

здесь λ_t - турбулентная теплопроводность, k - кинетическая энергия турбулентности, Pr_t - турбулентное число Прандтля.

Из всего многообразия RANS моделей хорошо зарекомендовала себя на практике модель SST Ментера [1, 5]. В модели SST Ментера $k - \varepsilon$ модель сформулирована в терминах $k - \omega$ и ориентирована на разрешение мелкомасштабной турбулентности во внешней области потока, а модель $k - \omega$, предназначенная для описания крупномасштабной турбулентности, используется в пограничном слое. Объединение этих моделей воедино осуществляется с помощью функции F_1 , которая обеспечивает близость суммарной модели к модели $k - \varepsilon$ вдали от твердых стенок и к модели $k - \omega$ в пристеночной области потока:

$$(3) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j k) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k - \beta^* \rho \omega k, \\ \frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho u_j \omega) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \sigma_k \mu_T) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] + \gamma \frac{\rho}{\mu_T} P_k - \beta \rho \omega^2 + (1 - F_1) D_{k\omega}. \end{aligned}$$

Расчет генерационного члена в уравнениях переноса производится по формуле:

$$(4) \quad P_k = \min(\mu_T S^2, 20\beta^* \rho k \omega), \quad S^2 = 2S_{ij}S_{ij},$$

а последний член в правой части уравнении переноса ω определяется соотношением:

$$(5) \quad D_{k\omega} = \frac{2\rho\sigma_{\omega 2}}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_i} \frac{\partial \omega}{\partial x_i}.$$

Для определения турбулентной вязкости по известным значениям k и ω в SST модели используется не стандартное соотношение $\mu_T = k/\omega$, а базирующееся на известной формуле Брэдшоу выражение:

$$(6) \quad \mu_T = \frac{a_1 k}{\max(a_1 \omega, \Omega F_2)},$$

которое ограничивает вязкость в пристеночном пограничном слое и позволяет избежать характерного для $k - \varepsilon$ моделей затягивания отрыва. Эмпирическая функция F_2 , входящая в (6), рассчитывается по формуле:

$$(7) \quad F_2 = \tanh(\arg_2^2),$$

где $\arg_2 = \max\left(\frac{2\sqrt{k}}{0.09\omega d_w}, \frac{500v}{d_w^2\omega}\right)$, а d_w – расстояние до ближайшей точки твердой поверхности. Эмпирические константы модели определяются через соответствующие константы $k - \varepsilon$ и $k - \omega$ моделей с помощью упоминавшейся выше функции F_1 :

$$(8) \quad \begin{aligned} \sigma_k &= F_1\sigma_{k1} + (1 - F_1)\sigma_{k2}, \\ \sigma_\omega &= F_1\sigma_{\omega1} + (1 - F_1)\sigma_{\omega2}, \\ \beta &= F_1\beta_1 + (1 - F_1)\beta_2. \end{aligned}$$

$$(9) \quad \begin{aligned} F_1 &= \tanh(\arg_1^4), \arg_1 = \min\left[\max\left(\frac{\sqrt{k}}{0.09\omega d_w}, \frac{500v}{d_w^2\omega}\right), \frac{4\rho\sigma_{\omega2}k}{CD_{k\omega}d_w^2}\right], \\ CD_{k\omega} &= \max\{D_{k\omega}, 10^{-20}\}. \end{aligned}$$

Индексы «1» и «2» в (8) относятся соответственно к константам $k - \omega$ и $k - \varepsilon$ моделей:

$$(10) \quad \begin{aligned} \sigma_{k1} &= 0.85, \quad \sigma_{\omega1} = 0.5, \quad \beta_1 = 0.075, \\ \sigma_{k2} &= 1.0, \quad \sigma_{\omega2} = 0.856, \quad \beta_2 = 0.0828, \\ \beta^* &= 0.09, \quad k = 0.41, \quad a_1 = 0.31, \quad \gamma = \beta/\beta^* - \sigma_\omega k^2/\sqrt{\beta^*}. \end{aligned}$$

Подход RANS к моделированию турбулентных течений обладает неустрашимым недостатком – в нем используется осреднение по всему спектру турбулентных пульсаций, а замыкающие соотношения не обладают нужной универсальностью, которая требуется для решения широкого круга прикладных инженерных задач. Вполне очевидно, что еще есть возможности для усовершенствования существующих дифференциальных моделей турбулентности, хотя заметное улучшение в этой области вызывает сомнения. Не меньшую роль в этом смысле играет также ясное осознание того факта, что наряду с «универсальной» мелкомасштабной турбулентностью, существенное влияние на параметры реальных турбулентных потоков оказывают относительно устойчивые крупномасштабные (с размерами порядка макро-масштаба течения), принципиально трехмерные нестационарные турбулентные структуры.

2.1. Метод крупных вихрей. Метод крупных вихрей (LES) позволяет увеличить точность моделирования турбулентных течений в сравнении с результатами, получаемыми по RANS моделям [1]. В методе LES используется процедура фильтрации уравнений Навье-Стокса по пространству. После представления переменных уравнений Навье-Стокса в виде суммы крупно- и мелкомасштабных составляющих и применения процедуры фильтрации, система (1) с использованием LES принимает вид:

$$(11) \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_i}(u_i) = 0, \\ \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} + \tau^{sgs}_{ij}), \\ \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho c_p \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i T) = \frac{\partial}{\partial x_j}(u_i(\tau_{ij} + \tau^{sgs}_{ij}) - q_j - q_j^{sgs}). \end{cases}$$

Дополнительные слагаемые в правых частях уравнений движения и энергии появляются в результате пространственной фильтрации конвективных членов уравнений Навье – Стокса и в уравнениях LES эти члены имеют индекс «SGS».

Подсеточные модели, как правило, базируются на использовании обобщенной гипотезы Буссинеска и законе Фурье [1]:

$$(12) \quad \tau^{sgs}_{ij} = 2\mu_{sgs} \left(S_{ij} - \frac{1}{3} I_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right) + \frac{2}{3} k I_{ij}, \quad q_i^{sgs} = -\lambda_{sgs} \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \lambda_{sgs} = \frac{C_p \mu_{sgs}}{Pr_t}.$$

Как видно из представленных формул система уравнений LES по форме аналогична системе уравнений RANS, однако физическое содержание этих систем различно. Дополнительные члены уравнений RANS описывают влияние всех турбулентных неоднородностей на осредненное, независящее от времени, решение, а аналогичные члены уравнений LES описывают влияние только относительно мелких вихрей на зависящее от времени решение отфильтрованных уравнений [1].

В пакете программ ЛОГОС используется наиболее употребимая на практике модель подсеточной вязкости Смагоринского [1]. Данная модель является «подсеточным аналогом» модели пути смешения Прандтля для уравнений Рейнольдса и формулируется следующим образом:

$$(13) \quad \mu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 S, \quad S = \sqrt{2S_{ij}S_{ij}},$$

где Δ – размер фильтра, а C_s – эмпирическая константа (константа Смагоринского). Для расчета пристеночных течений в модель Смагоринского вводится демпфирующий множитель, являющийся аналогом множителя Ван-Дриста в модели Прандтля для RANS [1]:

$$(14) \quad \mu_{SGS} = (C_s \Delta)^2 \left\{ 1.0 - \exp \left[-(y^+ / 25)^3 \right] \right\} S.$$

В большинстве практических приложений LES явная процедура фильтрации не применяется, а роль фильтра играет используемая расчетная сетка:

$$(15) \quad \Delta = V^{1/3},$$

где V – объем ячейки разностной сетки. Увеличение ширины способствует сглаживанию численного решения, а при $\Delta \rightarrow 0$ метод LES переходит в DNS.

Метод LES позволяет существенно увеличить точность моделирования, но по сравнению с RANS требует, как правило, детальной, преимущественно изотропной расчетной сетки и проведения нестационарного расчета. Это увеличивает требования по необходимым вычислительных ресурсам на несколько порядков, по сравнению с RANS. Снизить данные затраты, сохранив точность моделирования позволяет использование гибридных вихреразрешающих подходов.

2.2. Гибридный зонный RANS-LES подход на основе модели рейнольдсовых напряжений EARSM. Одним из наиболее перспективных вихреразрешающих подходов к моделированию турбулентности в случае расчета задач внутренней гидродинамики является зонный RANS-LES подход [4]. В

отличие от метода DES в зонном RANS-LES подходе используется явная, искусственная генерация турбулентных флуктуаций скорости на входных границах LES области [17, 18, 19]. Параметрами для генерации подобных флуктуаций выступают скорость и компоненты тензора напряжений Рейнольдса, полученные из RANS решения, а в качестве генератора используются специализированные алгоритмы [18, 19]. Их анализ показывает, что наиболее эффективным является алгоритм представленный в [19]. Явная генерация турбулентных пульсаций позволяет зонному RANS-LES подходу быть достаточно эффективным при расчете с любым размером области отрыва [17, 18, 19, 20]. В данном параграфе представлена модификация подхода, которая позволяет увеличить точность результатов в случае расчета задач со сложной геометрической конфигурацией.

В большинстве работ в качестве базовой модели в зонном RANS-LES подходе используется модель SST. Однако, в задачах с существенно ассиметричными зонами такие модели дают существенную погрешность в определении тензора рейнольдсовских напряжений [21], что на границе областей RANS-LES приводит к погрешностям в генерации турбулентных пульсаций. Недостаточная точность в генерации пульсаций, в свою очередь, приводит к увеличению за границей RANS-LES переходной зоны, что при расчете задач требует дополнительного увеличения области LES и, следовательно, увеличения количества ячеек в расчетной сетке. Выходом здесь является использование моделей класса RSM [9, 21].

В данной работе в качестве базовой модели предлагается использовать алгебраическую модель рейнольдсовых напряжений EARSM [9]. Использование зонного RANS-LES подхода предполагает выделение в расчетной сетке областей RANS и LES [18, 19]. Область LES располагается в том месте, где требуется получение более точных результатов и измерения нестационарных характеристик течения. На рисунке 1 показан пример выделения областей для задачи обтекания обратного уступа.

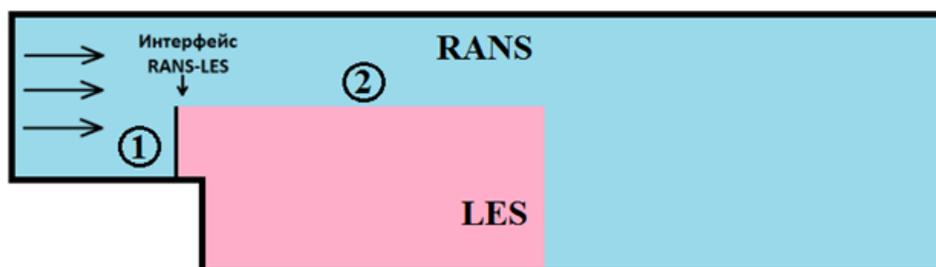


Рис. 1. Пример размещения областей RANS-LES, (1) – активная часть интерфейса, (2) – пассивная часть интерфейса

Между данными областями создается интерфейс RANS-LES, который разделяется на свою активную и пассивную часть. Активная часть включает границу, являющуюся входной для области LES, пассивная составляет остальную часть интерфейса. Расчет задачи состоит из двух этапов:

Этап 1 – стационарный расчет с использованием во всех областях модели RANS. Его цель – определить скорость, турбулентные характеристики на интерфейсе RANS-LES, сам интерфейс не влияет на расчет и функционирует как внутренние грани модели.

Этап 2 – нестационарный расчет с использованием модели LES. На активной части интерфейса генерируются турбулентные пульсации поля скорости, она выступает как входное граничное условие для LES области и как граничное условие с заданным выходным потоком для RANS области (выходной поток известен из этапа 1). Пассивная часть интерфейса не влияет на расчет и функционирует как внутренние грани модели.

На этапе 1 и в области RANS и области LES решается система уравнений Навье-Стокса, осредненная по Рейнольдсу (1), содержащая тензор рейнольдсовских напряжений τ_{ij}^t , который представляет собой вклад турбулентных составляющих течения, которые при RANS моделировании не разрешиваются численно [1]:

$$(16) \quad \tau_{ij}^t = -\overline{\rho u_i' u_j'},$$

где u_i' - пульсация скорости u_i .

Основной целью расчета на первом этапе является получение стационарных распределений поля скорости u_i и тензора τ_{ij}^t на интерфейсе RANS-LES, которые используются для создания турбулентных структур на втором этапе расчета. Создание турбулентных структур проводится путем явного внесения в стационарное поле скорости u_i^0 пульсаций u_i' :

$$(17) \quad u_i = u_i^0 + u_i'.$$

Пульсации скорости u_i' вычисляются искусственным путем с использованием того или иного алгоритма генерации [18, 19]. Величины пульсаций должны соответствовать распределению тензора τ_{ij}^t , вычисленному на первом этапе, и поэтому данный тензор напрямую определяет их амплитуду [19]. Неверное предсказание тензора τ_{ij}^t на интерфейсе RANS-LES приводит к значительной погрешности в генерации турбулентных структур на входе в LES область.

Вычисление тензора напряжений τ_{ij}^t для генерации пульсаций зависит от базовой модели в зонном RANS-LES подходе. В случае использования наиболее популярной базовой модели SST Ментера, для вычисления τ_{ij}^t используется обобщенная гипотеза Буссинеска [1]:

$$(18) \quad \tau_{ij}^t = \mu_t \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \delta_{ij} \right) + \frac{2}{3} k_t \delta_{ij}.$$

Ее использование для RANS моделей существенно упрощает их математическую формулировку и уменьшает количество искомым переменных, однако, приводит к уменьшению точности при расчете сложных течений, где существенными являются все компоненты тензора τ_{ij}^t [9]. К таким ситуациям относятся течения вблизи двугранных углов, образованных пересечением стенок.

Увеличить точность предсказания τ_{ij}^t в случае сложных течений можно путем использования моделей турбулентности класса RSM (Reynolds Stress Modelling), которые не применяют гипотезу [18] и моделируют перенос всех

компонентов тензора рейнольдсовских напряжений [9]. К моделям этого класса относится модель EARSM, в которой тензор напряжений Рейнольдса определяется через тензор анизотропии a_{ij} :

$$(19) \quad \tau_{ij}^t = \overline{u'_i u'_j} = k_t \left(a_{ij} + \frac{2}{3} \delta_{ij} \right), a_{ij} = \frac{\overline{u'_i u'_j}}{k_t} - \frac{2}{3} \delta_{ij}.$$

В свою очередь тензор анизотропии является линейной комбинацией шести тензорных групп:

$$(20) \quad a_{ij} = \beta_1 T_{1,ij} + \beta_2 T_{2,ij} + \beta_3 T_{3,ij} + \beta_4 T_{4,ij} + \beta_6 T_{6,ij} + \beta_9 T_{9,ij}$$

Тензорные группы $T_{k,ij}$ являются симметричными и зависят только от тензора скоростей деформации и вихревого тензора:

$$(21) \quad S_{ij} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \Omega_{ij} = \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right),$$

где τ - масштаб времени [9].

В настоящей работе выражения для $T_{k,ij}$ определяются соотношениями, предложенными в [22], согласно которой тензорные группы $T_{k,ij}$ вычисляются следующим образом:

$$(22) \quad \begin{aligned} T_{1,ij} &= S_{ij}, T_{2,ij} = S_{ik} S_{kj} - \frac{1}{3} II_S \delta_{ij}, T_{3,ij} = \Omega_{ik} \Omega_{kj} - \frac{1}{3} II_\Omega \delta_{ij}; \\ T_{4,ij} &= S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}, T_{6,ij} = S_{ik} \Omega_{kl} \Omega_{lj} - \Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{lj} - \frac{2}{3} IV \delta_{ij} - II_\Omega S_{ij}; \\ T_{9,ij} &= \Omega_{ik} S_{kl} \Omega_{lm} \Omega_{mj} - \Omega_{ik} \Omega_{kl} S_{lm} \Omega_{mj} + \frac{1}{2} II_\Omega (S_{ik} \Omega_{kj} - \Omega_{ik} S_{kj}). \end{aligned}$$

Коэффициенты β_k в выражении [20] являются функциями тензорных инвариантов [22]:

$$(23) \quad \beta_1 = -\frac{N}{Q}, \beta_2 = 0, \beta_3 = -\frac{2IV}{NQ_1}, \beta_4 = -\frac{1}{Q}, \beta_6 = -\frac{N}{Q_1}, \beta_9 = \frac{1}{Q_1},$$

$$(24) \quad Q = \frac{(N^2 - 2II_\Omega)}{A_1}, Q_1 = \frac{Q}{6} (2N^2 - II_\Omega).$$

Тензорные инварианты определяются следующим образом:

$$(25) \quad II_S = S_{ij} S_{ji}, II_\Omega = \Omega_{ij} \Omega_{ji}, IV = S_{ik} \Omega_{kj} \Omega_{ji}.$$

Коэффициенты N в выражении определяются согласно работе [23] по следующему выражению:

$$(26) \quad N = C'_1 + \frac{9}{4} \sqrt{2C_\mu II_S}.$$

Базу модели EARSM составляет RANS модель BSL [9], формулировка которой соответствует модели SST Менгера и отличается только значением констант и выражением для турбулентной вязкости. В данном исследовании для вычисления пульсаций u'_i по найденному тензору τ_{ij}^t используется генератор

синтетической турбулентности, представленный в работе [19]. В нем, как в других методах генерации, вначале вычисляется вспомогательное поле пульсаций ψ'_i , которое имеет заданный энергетический спектр и удовлетворяет условиям:

$$(27) \quad \overline{\psi'_i} = 0, \overline{\psi'_i \psi'_j} = \delta_{ij}.$$

Далее по ψ'_i вычисляется поле пульсаций u'_i :

$$(28) \quad u'_i = a_{ij} \psi'_j,$$

где a_{ij} - разложение тензора τ_{ij}^t по Холецкому [19].

Особенности данного генератора состоят в полуэмпирических соотношениях, использующихся для построения спектра распределения ψ'_i , которые оказались достаточно удачными для решения практических задач.

В итоге, по выражению [28] находится конечное нестационарное граничное условие по скорости для области LES, где для нахождения решения применяется система уравнений Навье-Стокса, фильтрованная по пространству. В области использования модели EARSМ для аппроксимации тензора τ_{ij}^t применяется алгоритм, предложенный в работе [24].

Таким образом, зонный RANS-LES подход на основе модели EARSМ (далее будем обозначать как EARSМ-LES) по вычислительным затратам отличается от RANS-LES подхода на основе модели SST (SST-LES) лишь этапом вычисления τ_{ij}^t . Данный этап не связан с составлением матрицы и решением системы линейных уравнений, поэтому проходит достаточно быстро.

3. СРАВНЕНИЕ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ РАЗНЫХ БАЗОВЫХ МОДЕЛЕЙ В RANS-LES ПОДХОДЕ ДЛЯ ТРЕХМЕРНЫХ ЗАДАЧ, СОДЕРЖАЩИХ ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ

Сравнение использования разных базовых моделей в RANS-LES подходе производится на задаче о развитом течении в квадратном канале. Она представляет собой пример, который показывает существенное влияние анизотропии турбулентности на основной поток, что особым образом изменяет топологию течения.

В задаче рассматривается развитое течение несжимаемой жидкости в канале квадратного сечения. Течение было рассчитано при $Re_\tau = \frac{\rho u_\tau H}{\mu} = 1200$, где $H = 1\text{ м}$ - длина стороны квадрата в сечении канала, u_τ - средняя динамическая скорость. Канал располагался вдоль оси X и имеет длину $\Delta X = 4H$. Геометрия расположения зон и сечения, в которых снимались результаты, показаны на рисунке 2.

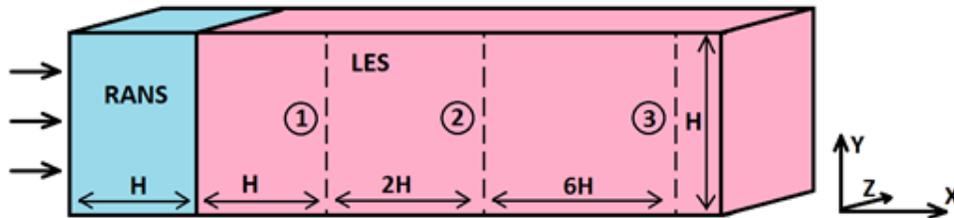


Рис. 2. Геометрия задачи

На входе в качестве граничных условий использовались поля скорости и турбулентных величин, которые были получены в предварительном RANS расчете полностью развитого турбулентного течения в квадратном канале с перепадом давления $\frac{\partial p}{\partial x} = 4\rho u_\tau^2/H$, что соответствует условиям DNS расчета [25].

В расчете использовалась шестигранная расчетная сетка со сгущением в области пограничного слоя. Безразмерные параметры сетки: $\Delta_Y^+ = \Delta_Z^+ \approx 20$, $\Delta_X^+ \approx 50$, $\Delta_{wall}^+ < 1$, где $\Delta^+ = \frac{\Delta \cdot u_\tau}{\nu}$, Δ - шаг сетки, u_τ - динамическая скорость в ближайшей точке твердой поверхности, ν - кинематическая вязкость.

Для решения задачи проводился двухэтапный расчет с использованием зонного RANS-LES подхода на основе модели SST и EARSM. После первого этапа были получены стационарные поля скорости, которые соответствуют RANS решению задачи. На рисунке 3 представлены графики продольной скорости (u) и вертикальной скорости (v), нормированными на средне-поточную скорость u_{bulk} , вдоль линии $y = z$.

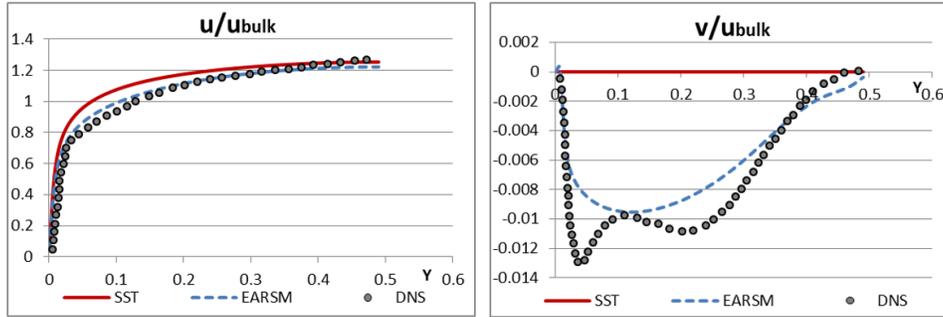


Рис. 3. Результаты RANS расчета. Профили скоростей

В такой конфигурации модель EARSM заметно лучше моделирует профиль продольной скорости за счет того, что предсказывает появление вторичных токов в плоскости, перпендикулярной направлению основного потока, что видно по графику поперечной скорости v , в то время как решение по модели SST не содержит вторичных токов. На рисунке 4 представлены графики двух компонентов тензора τ_{ij}^t :

$$(29) \quad u_{rms} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\tau_{xx}^t}, \nu_{rms} = \frac{1}{\rho} \sqrt{\tau_{yy}^t}.$$

Компоненты тензора τ_{ij}^t по модели EARSM предсказаны намного точнее, чем по SST, хотя и имеют отличие от DNS результатов. Это приводит к более точной генерации вихревых структур для EARSM-LES на этапе нестационарного расчета.

Нестационарный расчет проводился с шагом по времени $\Delta t = 0,01 \frac{H}{u_{bulk}}$. После выхода решения на статистически установившийся режим ($t_1 = 500\Delta t$) проводилось осреднение по времени основных величин до момента времени $t_2 = 2 \cdot 10^4 \Delta t$. На рисунке 5 представлены графики продольной скорости и компоненты тензора u_{rms} по линии $y = z$ в сечениях 1, 2 и 3, полученные по модели EARSM-LES и SST-LES.

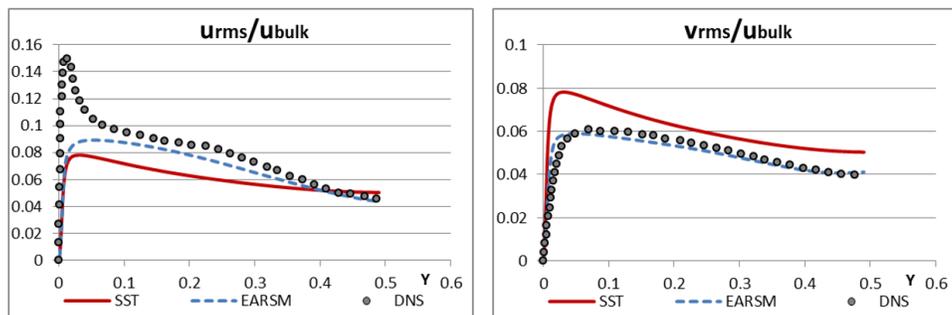


Рис. 4. Результаты RANS расчета. Компоненты тензора

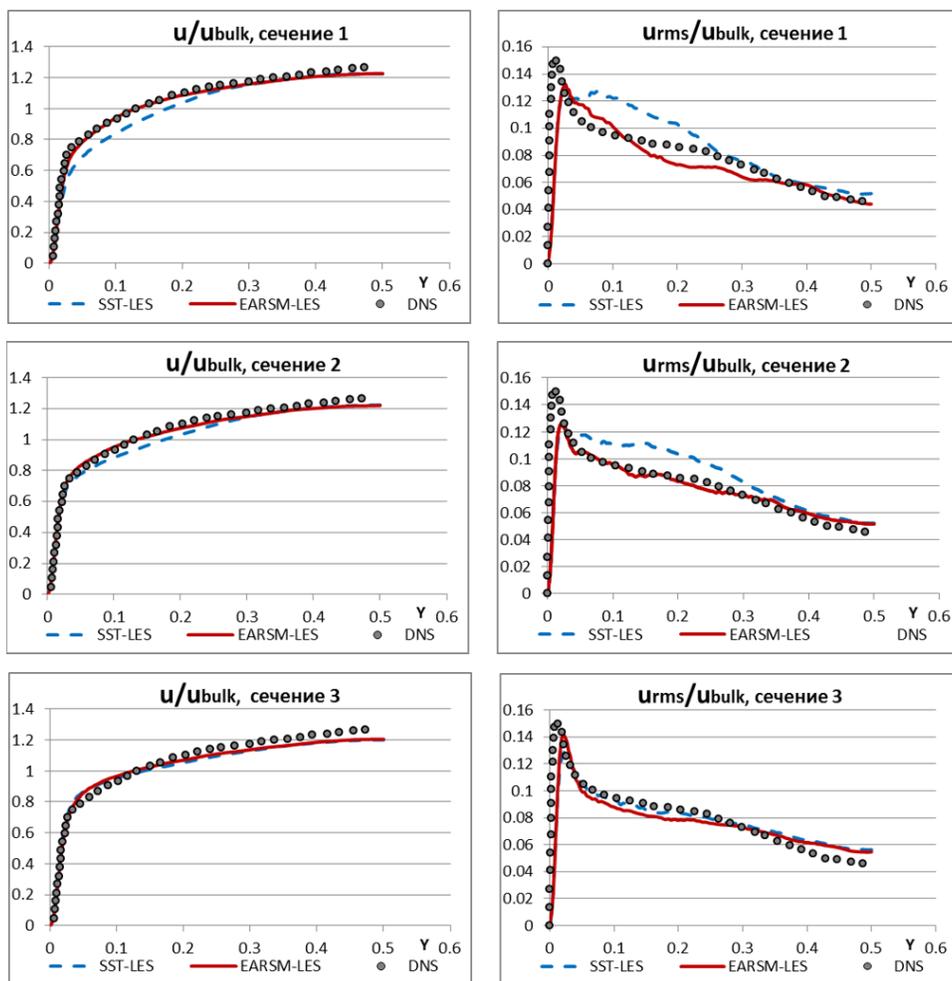


Рис. 5. Профили величин в различных сечениях

Благодаря более точному профилю скорости и компонент тензора τ_{ij}^t , полученными на интерфейсе по модели EARSM, уже в сечении 1 модель EARSM-LES дает хорошие результаты по скорости, а в сечении 2 – уже и по компонентам тензора τ_{ij}^t . Профили величин, полученными по модели SST-LES, выходят на хорошую точность гораздо позднее: хорошее совпадение профилей скорости наблюдается лишь в сечении 3, которое находится на расстоянии 9H от интерфейса.

Чтобы оценить расстояние от интерфейса, которое требуется каждой модели, чтобы выйти на установившееся решение, соответствующее LES модели, рассмотрим профиль продольной скорости вдоль линии $y = z = 0,1 \cdot H$. Данный профиль представлен на рисунке 6 в сравнении с профилем, который получается при моделировании данной задачи с использованием модели LES и циклических граничных условий LES (подобно DNS расчету [25]).

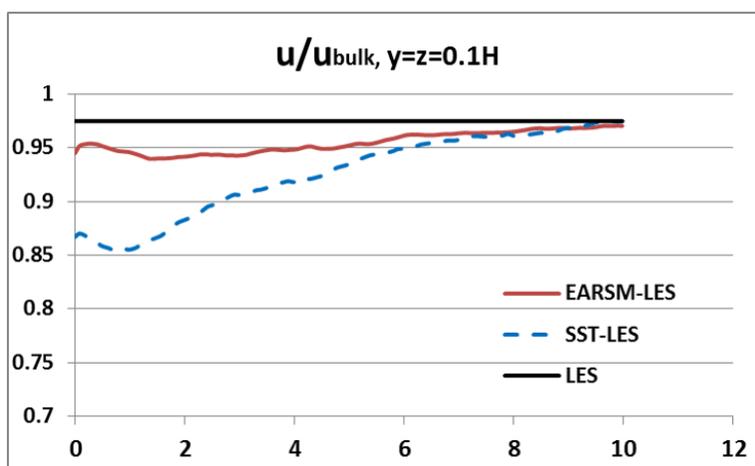


Рис. 6. Профили продольной скорости

По профилю продольной скорости видно, что зонный RANS-LES на основе EARSM уже с самого начала интерфейса имеет отклонение от результатов LES расчета не более 5%, в то время как SST-LES достигает такого значения лишь на расстоянии 5H от интерфейса.

Таким образом, использование модели EARSM-LES позволяет в 2-3 раза сократить переходную область после интерфейса RANS-LES в задачах подобных конфигураций по сравнению с моделью SST-LES. В случае расчета промышленных задач такое сокращение переходной области может существенно уменьшить необходимое количество расчетных ячеек, а также повысить точность получаемых результатов.

4. ТЕЧЕНИЕ В ТРОЙНИКОВОМ СОЕДИНЕНИИ ТРУБ КВАДРАТНОГО СЕЧЕНИЯ

Данная задача имеет экспериментальные данные [26], включающие различные режимы течения жидкости, в том числе разно-температурные смешения. В данном случае задача решалась в изотермическом приближении, поэтому для моделирования был выбран режим с максимальным числом Рейнольдса

$Re \approx 10^4$ и наименьшим влиянием сил плавучести. Геометрия задачи и направление осей координат показаны на рисунке 7.

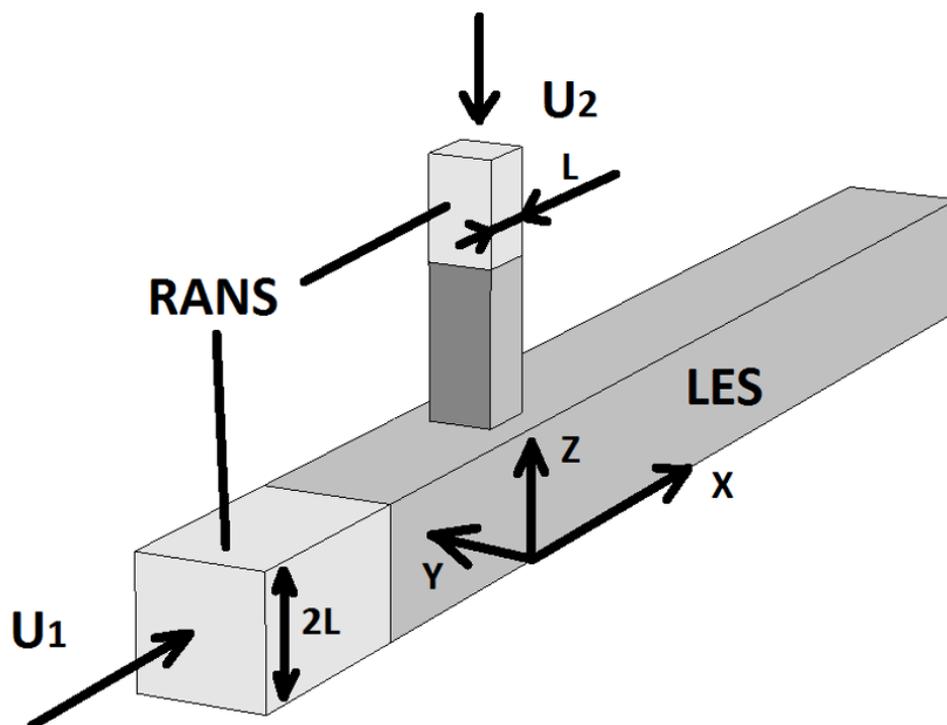


Рис. 7. Геометрия тройника

Каждый канал имеет квадратное сечение со стороной L и $2L$, где $L=50$ мм. Моделируемое вещество – вода при температуре 20 С, плотность $\rho = 998,2$ кг/м³, вязкость $\mu = 0,001$ Па·с. Среднепоточковая скорость основного входа $U_1 = 0,1$ м/с, бокового входа $U_2 = 0,2$ м/с. Смешивающиеся турбулентные потоки полностью развиты. Для обеспечения на входе развитого турбулентного потока были рассчитаны две дополнительных задачи о течении жидкости в квадратных каналах соответствующего сечения, откуда были взяты табличные граничные условия по скорости и турбулентным параметрам, которые выступали в качестве входных граничных условий для тройника. Задача была решена и использованием зонного RANS-LES подхода, а также с помощью моделей EARSM и SST.

4.1. Построение предварительной расчетной сетки. Для предварительного RANS расчета строится достаточно грубая расчетная сетка с одинаковым характерным размером ячеек $\Delta x = 0.005$ м, пристеночное измельчение включало 5 призматических слоев с коэффициентом роста 1,25 и толщиной первого слоя $\Delta x_w = 0,001$ м. Общее количество ячеек – 190 тыс. На рисунке 8 показан общий вид расчетной сетки и ее разрезы в различных сечениях.

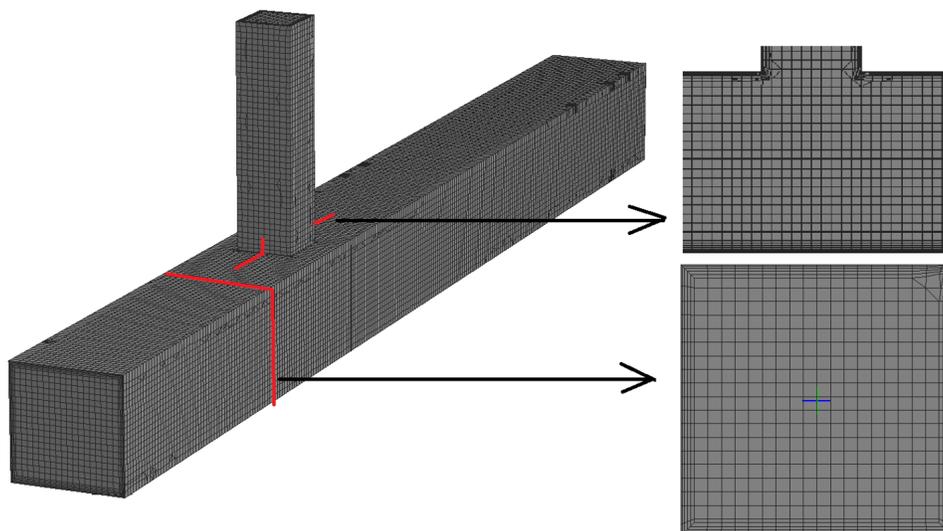


Рис. 8. Предварительная расчетная сетка

Задача считается в стационарной постановке с использованием модели EARSM с универсальными пристеночными функциями [5, 27]. На рисунке 9 представлены поля амплитуды скорости в продольном сечении. Исходя из значений амплитуд скоростей строится основная расчетная сетка. Далее приведем критерии, которым должна удовлетворять расчетная сетка.

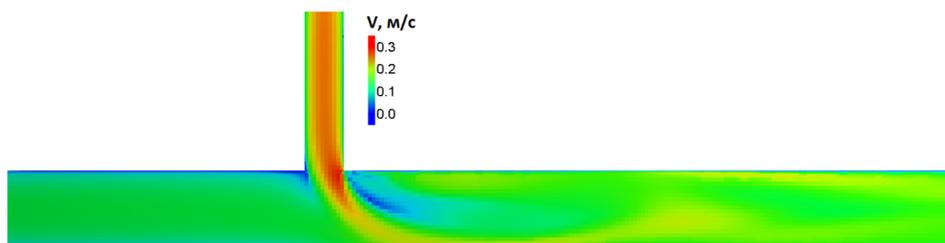


Рис. 9. Поле амплитуды скорости (предварительный RANS расчет)

В [28] исследуется вопрос о достаточном сеточном разрешении, которое позволяет получать приемлемый результат при моделировании пограничного слоя с использованием модели LES. Результаты данных исследований можно использовать в качестве оценки необходимого сеточного разрешения для большей части задач внутреннего течения. В безразмерных величинах требования по сеточному разрешению вдоль и поперек потока выглядят следующим образом:

$$(30) \quad \begin{aligned} &\text{вдоль потока: } \Delta_x^+ \approx 40, \\ &\text{поперек потока: } \Delta_y^+ \approx \Delta_z^+ \approx 20, \\ &\text{вблизи твердой стенки: } (\Delta_y^+)_w \approx 1, \text{ где } \Delta^+ = \frac{\Delta \cdot u_\tau}{\nu}. \end{aligned}$$

Здесь динамическая скорость на ближайшей к ячейке твердой поверхности u_τ , для определения которой и проводится RANS расчет на предварительной расчетной сетке.

Для оценки необходимого сеточного разрешения вычисляется распределение параметра $\Delta_{flow}^+ = \frac{\Delta_{flow} \cdot u_\tau}{\nu}$, где Δ_{flow} - размер ячейки вдоль потока, и $\Delta_{norm}^+ = \frac{\Delta_{norm} \cdot u_\tau}{\nu}$, где Δ_{norm} - максимальный размер ячейки в плоскости, нормаль к которой совпадает с направлением потока. Величины $\Delta_{flow}^+/40$ и $\Delta_{norm}^+/20$ представляют собой коэффициент на который нужно уменьшить размер ячейки вдоль и поперек потока соответственно, чтобы удовлетворить условию (30). На рисунке 10 проведено распределение данных величин на продольном разрезе тройника.

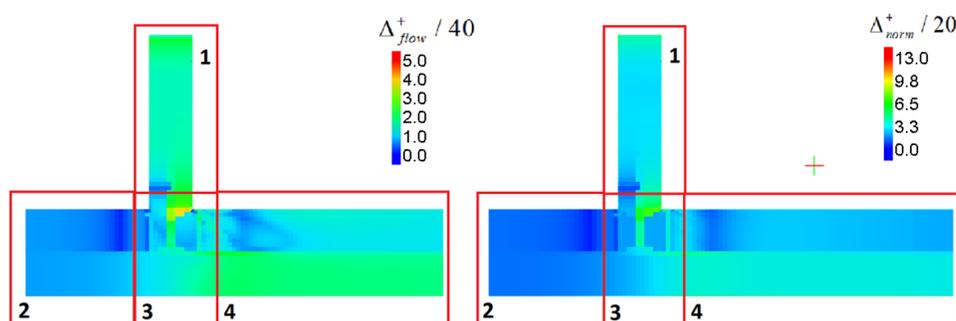


Рис. 10. Поле характеристик сеточного разрешения

Геометрия тройника делится на 4 зоны, которые показаны на рисунке выше. В первой зоне среднее значение параметра $\Delta_{flow}^+/40$ составляет около 2,5, это означает, что в данной зоне в направлении потока сетка будет измельчена в 2,5 раз. Подобные оценки можно сделать для каждой из 4 выделенных зон. В таблице 1 приведены используемые характерные размеры в каждой зоне, которые использовались для итоговой расчетной сетки.

ТАБЛИЦА 1. Характерные размеры ячеек

№ зоны	Δx , м	Δy , м	Δz , м
1	0,002	0,001	0,001
2	0,005	0,0025	0,0025
3	0,0015	0,0015	0,0015
4	0,002	0,0015	0,0015

Среднее значение параметра $(\Delta_Y^+)_w \approx 5$, поэтому толщина первой пристеночной ячейки была уменьшена в 5 раз. Количество ячеек в итоговой расчетной сетке – 3 млн.

По данным параметрам и строится основная расчетная сетка. Затем проводится стационарный RANS расчет на основной расчетной сетке для определения скорости и турбулентных параметров на интерфейсах RANS-LES. Скорости определяются согласно формуле (17), а компоненты тензора реинольдсовых напряжений согласно формуле (18) в случае использования модели SST и формуле (19) в случае использования модели EARSM.

4.2. **Нестационарный расчет с использованием EARSМ-LES.** Нестационарный этап расчета проводится с использованием модели EARSМ-LES. На рисунке 11 показано осредненное по времени поле скорости, мгновенное поле скорости и изоповерхность Q-критерия для модели EARSМ-LES.

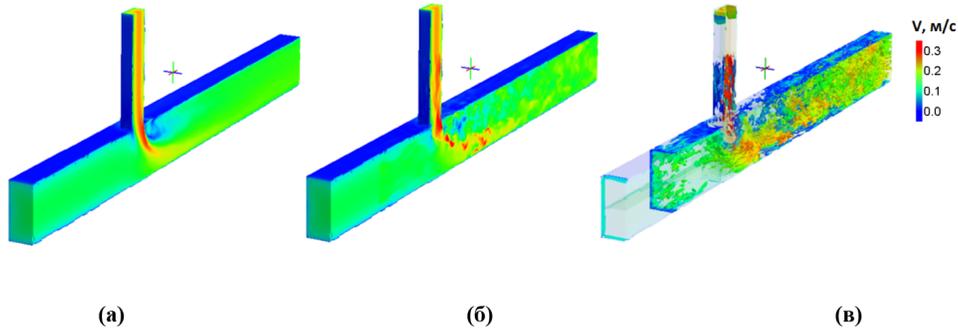


Рис. 11. Поле скорости (а) осредненное, (б) мгновенное, (в) изоповерхность Q-crit

С экспериментом сравниваются профиль скорости U_x в трех сечениях: $x/L = 1$, $x/L = 2$, $x/L = 4$ при $y/L = 0,7$. На рисунке 12 показаны результаты для трех моделей турбулентности ($z^* = z/L$, $U^* = U/U_1 + x/L - 1$).

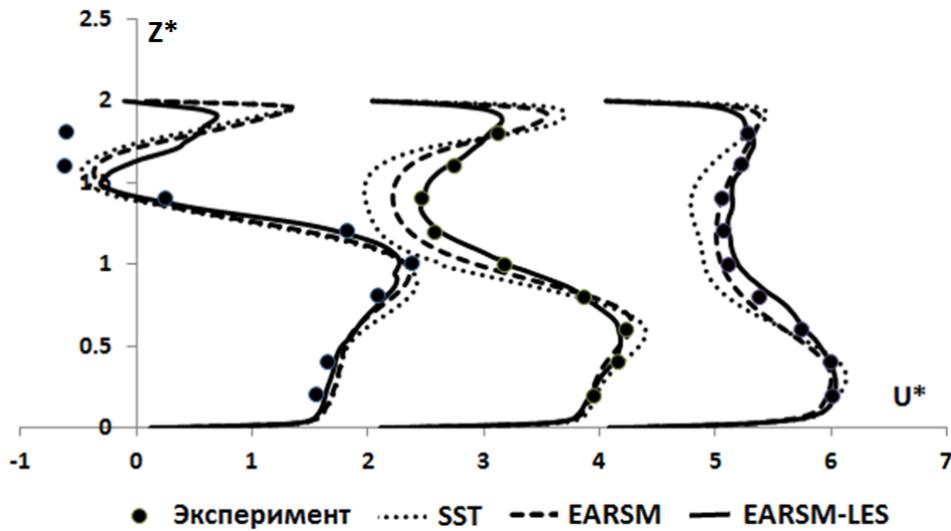


Рис. 12. Профиль продольной скорости

Модель EARSМ дает увеличение точности, по сравнению с SST, что объясняется учетом в ней анизотропности тензора реинольдсовских напряжений. Применение зонного подхода EARSМ-LES дает наилучший результат в области окончания отрывной зоны (сечение $x/L = 2$). В области далекой от отрывной зоны (последнее сечение) модели EARSМ и EARSМ-LES дают сравнимый по точности результат. В сечении $x/L = 1$ ни одна из моделей не предсказала

интенсивность возвратного течения, такой же результат был получен и в работе [26], где использовалось прямое численное моделирование. Это может быть связано с точностью проведения эксперимента, либо точностью измерений.

Зонный подход EARSМ-LES позволяет сравнить более детальные характеристики потока – амплитуду среднеквадратичной пульсации продольной скорости:

$$(31) \quad U_{rms}^* = \frac{\sqrt{\overline{(U - \bar{U})^2}}}{U_1},$$

где черта сверху означает осреднение по времени. Сравнение данной характеристики с экспериментальными данными в аналогичных сечениях представлено на рисунке 13.

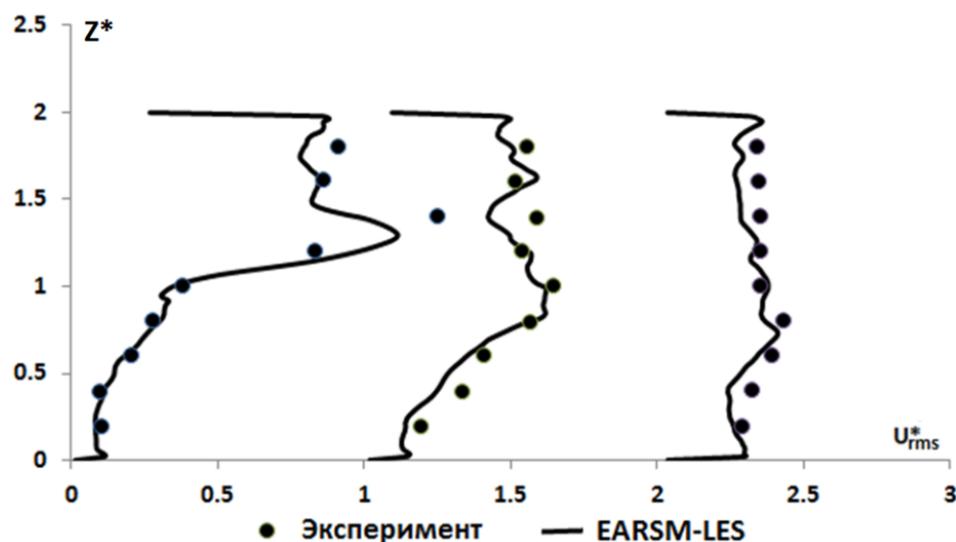


Рис. 13. Профиль пульсации скорости U_{rms}^*

Среднее отклонение по U_{rms}^* для EARSМ-LES составляет 5%, максимальное – порядка 15%, что является неплохим результатом для пульсационных характеристик. Хорошие результаты по пульсационным характеристикам также свидетельствуют, об отсутствии значимых численных осцилляций в поле скорости.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье описана методика моделирования течений в тройниковых соединениях труб квадратного сечения, основанная на численном решении трехмерных уравнений Навье-Стокса. Для этого применяется современный подход к моделированию турбулентности – зонный EARSМ-LES подход. При таком подходе в областях интенсивного вихреобразования, и где необходимо увеличить точность получаемого решения используется LES модель турбулентности, в остальной области используется модель реинольдсовых напряжений EARSМ,

в которой моделируется перенос всех компонентов тензора рейнольдсовских напряжений, что приводит к увеличению точности при расчете сложных течений, в частности, течений вблизи двугранных углов. Такой гибридный подход позволяет сократить необходимые вычислительные затраты, по сравнению с LES.

В статье приводится описание математической модели, в основе которой лежат осредненные по Рейнольдсу трёхмерные уравнения Навье – Стокса, а также уравнения используемой гибридной модели EARSM-LES. В статье проведено сравнение использования разных базовых моделей в RANS-LES подходе для трехмерных задач, содержащих двугранные углы. В качестве базовых используются модели турбулентности SST и EARSM. Представлена задача о течении в тройниковом соединении труб квадратного сечения, на которой представлен поэтапный алгоритм применения модели EARSM-LES. Для моделирования данных задач используется российский пакет программ инженерного анализа ЛОГОС, предназначенный для решения сопряженных трехмерных задач конвективного теплопереноса, аэродинамики и гидродинамики на произвольных неструктурированных сетках на параллельных ЭВМ.

Исходя из полученных результатов моделирования показано, что модель EARSM дает увеличение точности, по сравнению с SST, что объясняется учетом в ней анизотропности тензора рейнольдсовских напряжений, профили скорости и компоненты тензора рейнольдсовых напряжений τ_{ij}^t по модели EARSM предсказаны намного точнее, чем по SST. Благодаря этому, модель EARSM-LES в итоге дает результаты по скорости и по компонентам тензора τ_{ij}^t лучше, чем модель SST-LES.

Результаты представленных исследований показывают, что предложенный зонный EARSM-LES подход позволяет повысить точность моделирования течений в тройниковом соединении труб квадратного сечения.

REFERENCES

- [1] Волков К.Н., Емельянов В.Н., *Моделирование крупных вихрей в расчетах турбулентных течений*, М.: Физматлит, 2008.
- [2] Стрелец М.Х., Травин А.К., Шур М.Л., *Применение метода моделирования отсоединенных вихрей для расчета гидродинамики и теплообмена в отрывных турбулентных потоках*, // Труды 3-ей Российской конференции по теплообмену, 2002.
- [3] Зайков Л.А., Стрелец М.Х., Шур М.Л., *Сравнение возможностей дифференциальных моделей турбулентности с одним и двумя уравнениями при расчете течений с отрывом и присоединением. Течение в каналах с обратным уступом*, // Теплофизика высоких температур, 1996, т. 34, № 35, с. 724-736.
- [4] Kozelkov A. S., Krutyakova O. L., Kurkin A. A., Kurulin V. V., and Tyatyushkina E. S., *Zonal RANS-LES Approach Based on an Algebraic Reynolds Stress Model*, // Fluid Dynamics, 2015, v. 50, №5, p. 621–628.
- [5] Menter, F. R., Kuntz, M., and Langtry, R., *Ten Years of Industrial Experience with the SST Turbulence Model*, // Turbulence, Heat and Mass Transfer 4, ed: K. Hanjalic, Y.Nagano, and M. Tummers, Begell House, Inc., 2003, p. 625 – 632.
- [6] Spalart P. R., *Strategies for turbulence modeling and simulations*, // Heat Fluid Flow, 2000, v. 21, pp. 252–263.
- [7] Hasse C. et al., *Hybrid URANS/LES turbulence simulation of vortex shedding behind a triangular flameholder*, // Flow Turbulence Combust., vol.83, 1–20, 2009.
- [8] Lesieur M., *Turbulence in Fluids*, // Springer, ISBN 978-1-4020-6434-0, 2008.

- [9] Menter F.R., Garbaruk A.V., Egorov Y., *Explicit algebraic Reynolds stress models for anisotropic wall-bounded flows*, // Proc. of 3rd European Conference for Aero-Space Sciences (EUCASS), Versailles, July 6-9th, 2009.
- [10] Kozelkov A. S., Strelets D. Yu., Sokuler M. S. and Arifullin R. H., *Application of Mathematical Modeling to Study Near-Field Pressure Pulsations of a Near-Future Prototype Supersonic Business Aircraft*, // J. Aerosp. Eng., 2022, 35(1): 04021120.
- [11] Struchkov A.V., Kozelkov A.S., Volkov K., Kurkin A.A., Zhuchkov R.N., Sarazov A.V., *Numerical simulation of aerodynamic problems based on adaptive mesh refinement method*, // Acta Astronautica v. 172, July 2020, p. 7-15.
- [12] Kozelkov, A.S., Pogosyan, M.A., Strelets, D.Y., Tarasova N.V., *Application of mathematical modeling to solve the emergency water landing task in the interests of passenger aircraft certification*, // AS, 2021, <https://doi.org/10.1007/s42401-020-00082-7>.
- [13] Efremov V., Kozelkov A., Dmitriev S., Kurkin A., Kurulin V. and Utkin D., *Technology of 3D Simulation of High-Speed Damping Processes in the Hydraulic Brake Device*, "Modeling and Simulation in Engineering". Academic editor: Dr. Konstantin Volkov Kingston University London, UK, 2018.
- [14] Tyatyushkina E.S., Kozelkov A.S., Kurkin A.A., Pelinovsky E.N., Kurulin V.V., Plygunova K.S., Utkin D.A., *Verification of the LOGOS Software Package for Tsunami Simulations*, Geosciences 2020, 10, Art. No. 385.DOI: 10.3390/geosciences10100385.
- [15] Kozelkov A.S. and Kurulin V.V., *Eddy resolving numerical scheme for simulation of turbulent incompressible flows*, // Computational Mathematics and Mathematical Physics, vol. 55, №7, p. 1255-1266, 2015.
- [16] Kozelkov A., Kurulin V., Emelyanov V., Tyatyushkina E., Volkov K., *Comparison of convective flux discretization schemes in detached-eddy simulation of turbulent flows on unstructured meshes*, // Journal of Scientific Computing, 2016, v. 67, p. 176–191.
- [17] Jarrin N., Benhamadouche S., Laurence D., Prosser R., *A synthetic-eddy-method for generating inflow conditions for large-eddy simulations*, // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2006. Vol. 27, no. 4. Pp. 585–593.
- [18] Jarrin N., Prosser R., Uribe J. et al., *Reconstruction of turbulent fluctuations for hybrid RANS/LES simulations using a Synthetic-Eddy Method*, // International Journal of Heat and Fluid Flow. 2009. Vol. 30, no. 3. Pp. 435–442.
- [19] Адамьян Д.Ю., *Эффективный метод генерации синтетической турбулентности на входных границах LES области в рамках комбинированных RANS-LES подходов к расчету турбулентных течений*, // Математическое моделирование, том 23, № 7, с. 3–19.
- [20] Frohlich J., Von Terzi D., *Hybrid LES/RANS Methods for the Simulation of Turbulent Flows*, // Progress in Aerospace Sciences. 2008. Vol. 44, № 5. P. 349–
- [21] Wilcox, D. C., *Turbulence Modeling for CFD, 2nd. Edition*, DCW Industries, La Canada, CA, 1998.
- [22] Wallin S. and Johansson A.V., *An explicit algebraic Reynolds stress model for incompressible and compressible turbulent flows*, J. Fluid Mech., 403, pp. 89–132, 2000.
- [23] Chevalier M., Peng S. H., *Detached Eddy Simulation of Turbulent Flow in a Highly Offset Intake Diffuser*, // Progress in Hybrid RANS-LES Modelling, 2010, vol. 111, pp. 111-121.
- [24] Козелков А.С., Курулин В.В., Пучкова О.Л., Лашкин С.В., *Моделирование турбулентных течений с использованием алгебраической модели рейнольдсовых напряжений с универсальными пристеночными функциями*, // Вычислительная механика сплошных сред. – 2014. – Т. 7, № 1. – С. 40-51.
- [25] Cherry, E.M., Elkins, C.J, et al., *Geometric Sensitivity of 3-D Separated Flows*, // Proc. of 5th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena -TSFP5, Munich, August 27-29, 2007.
- [26] Fukushima N., Fukagata K., Kasagi N., Noguchi H., Tanimoto K., *Numerical and experimental study on turbulent thermal mixing in a T-junction flow*, The 6th ASME-JSME Thermal Engineering Joint Conference, March 16-20, 2003.
- [27] Grotjans H. and Menter F.R., *Wall functions for industrial applications*, In K.D. Papailiou, Editor, Computational Fluid Dynamics'98, 1998, Volume 1, Part 2, pp 1112-1117, Chichester. ECCOMAS, John Wiley Sons.
- [28] Piomelli U., Balaras E., *Wall-Layer Models for Large-Eddy Simulations*, // Annual Review of Fluid Mechanics. 2002. Vol. 34, no. 1. Pp. 349–374.

А.С. КОЗЕЛКОВ, Е.С. ТЯТЮШКИНА, А.А. КУРКИН, В.В. КУРУЛИН, О.Е. КУРКИНА, О.А. КОЧЕТОВА

ANDREY SERGEEVICH KOZELKOV
FEDERAL STATE UNITARY ENTERPRISE "RUSSIAN FEDERAL NUCLEAR CENTER - ALL-RUSSIAN
RESEARCH INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PHYSICS" (FSUE "RFNC-VNIIEF"),
SAROV, RUSSIA,
FEDERAL STATE-FUNDED HIGHER EDUCATION INSTITUTION "NIZHNY NOVGOROD STATE
TECHNICAL UNIVERSITY N.A. R.E. ALEXEYEV",
NIZHNY NOVGOROD, RUSSIA,
SAROV STATE PHYSICS AND TECHNICAL INSTITUTE, NATIONAL RESEARCH NUCLEAR UNIVERSITY
MEPhI,
SAROV, RUSSIA
Email address: ASKozelkov@mail.ru

ELENA SERGEEVNA TYATYUSHKINA
FEDERAL STATE UNITARY ENTERPRISE "RUSSIAN FEDERAL NUCLEAR CENTER - ALL-RUSSIAN
RESEARCH INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PHYSICS" (FSUE "RFNC-VNIIEF"),
SAROV, RUSSIA,
FEDERAL STATE-FUNDED HIGHER EDUCATION INSTITUTION "NIZHNY NOVGOROD STATE
TECHNICAL UNIVERSITY N.A. R.E. ALEXEYEV",
NIZHNY NOVGOROD, RUSSIA
Email address: leno4ka-07@mail.ru

ANDREY ALEXANDROVITCH KURKIN
FEDERAL STATE-FUNDED HIGHER EDUCATION INSTITUTION "NIZHNY NOVGOROD STATE
TECHNICAL UNIVERSITY N.A. R.E. ALEXEYEV",
NIZHNY NOVGOROD, RUSSIA
Email address: aakurkin@gmail.com

VADIM VICTOROVICH KURULIN
FEDERAL STATE UNITARY ENTERPRISE "RUSSIAN FEDERAL NUCLEAR CENTER - ALL-RUSSIAN
RESEARCH INSTITUTE OF EXPERIMENTAL PHYSICS" (FSUE "RFNC-VNIIEF"),
SAROV, RUSSIA,
FEDERAL STATE-FUNDED HIGHER EDUCATION INSTITUTION "NIZHNY NOVGOROD STATE
TECHNICAL UNIVERSITY N.A. R.E. ALEXEYEV",
NIZHNY NOVGOROD, RUSSIA
Email address: kurulin@mail.ru

OKSANA YEVGENIEVNA KURKINA
FEDERAL STATE-FUNDED HIGHER EDUCATION INSTITUTION "NIZHNY NOVGOROD STATE
TECHNICAL UNIVERSITY N.A. R.E. ALEXEYEV",
NIZHNY NOVGOROD, RUSSIA
Email address: oksana.kurkina@mail.ru

OLGA ALEXANDROVNA KOCHETOVA
SAROV STATE PHYSICS AND TECHNICAL INSTITUTE, NATIONAL RESEARCH NUCLEAR UNIVERSITY
MEPhI,
SAROV, RUSSIA
Email address: olyashik@list.ru