S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.587
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 33C45

АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НАД РЯДАМИ ПО КЛАССИЧЕСКИМ ОРТОГОНАЛЬНЫМ МНОГОЧЛЕНАМ

Р.К. ТЕТУЕВ, А.Н. ПАНКРАТОВ, Л.И.КУЛИКОВА, С.А. МАХОРТЫХ

Abstract. The question of the algorithmic implementation of basic analytical operations is considered: multiplication and division by a polynomial, differentiation and integration — over functions represented by series in classical orthogonal polynomials. It is shown that the considered linear transformations for classical orthogonal polynomials and functions are subject to recurrence relations of a special form, which makes it possible to perform these transformations over series in the space of expansion coefficients. A theorem on the condition for the existence of a recurrent relation for the inverse transformation is proved. A general scheme of the algorithm for calculating the coefficients of the resulting series from the coefficients of the original series through the coefficients of recurrent relations is proposed. It is proved that the linear transformation of a series of length N is executed by the algorithm of linear complexity $\Theta(N)$. Examples are given for the Jacobi, Laguerre, Hermite and Chebyshev polynomials.

Keywords: orthogonal polynomials, recurrent relations, differentiation, integration, multiplication, division of polynomials, polynomial algebra, symbolic calculations.

1. Введение

Одним из эффективных и перспективных подходов к анализу одномерных и многомерных данных является обобщенный спектрально-аналитический метод, который позволяет строить алгоритмы анализа и преобразования данных в пространстве коэффициентов разложения по классическим ортогональным базисам для решения различных информационных задач [1].

Обширным классом задач являются задачи анализа биомолекулярных структур, как линейных (нуклеотидных и аминокислотных последовательностей),

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

так и пространственных структур глобулярных белков. Для анализа геномных последовательностей был предложен алгоритм нахождения тандемных повторов путем разложения в ортогональные ряды кривых GC-содержания нуклеотидных последовательностей и оценки корреляции между сигналом и его второй производной [2]. Для анализа пространственных структур белков был разработан метод инвариантного представления основного хода цепи полимерной молекулы в виде натурального уравнения кривой, переход к которому осуществляется за счет трехкратного дифференцирования исходных кривых, заданных в декартовой системе координат [3]. Для анализа рельефа была предложена модель, основанная на двумерной аппроксимации с помощью рядов по многочленам Чебышева[4].

Применение спектрально-аналитического подхода основывается на разработке операций над рядами, аппроксимирующими сигналы, при различных математических преобразованиях над ними. В данной работе описывается алгоритм выполнения определенного класса операций над классическими ортогональными рядами.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 приводится постановка задачи и обзор литературы. В разделе 2 вводятся рекуррентные соотношения специального вида, приводятся примеры преобразований, доказывается теорема об обратимости преобразований на основе рекуррентных соотношений. В разделе 3 доказывается основная теорема о построении алгоритма на основе рекуррентного соотношения. В разделе 4 доказанные теоремы применены к преобразованиям интегрирования и дифференцирования над рядами многочленов Чебышева первого рода.

2. Постановка задачи

Пусть некоторая функция $f(x) \in L^2(a,b)$ представима рядом

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(x),$$

где $\{\varphi_n(x)\}$ – множество ортогональных функций $\varphi_n(x) \in L^2(a,b)$, а $c = \{c_n\}$ – вектор коэффициентов разложения функции $f(x)$ по ортогональному базису $\varphi_n(x)$. Известно, что различным функциям $f(x), g(x) \in L^2(a,b)$ соответствуют различные спектры $c, d \in H$, где H – бесконечномерное векторное (*гильбертово*) пространство, а $L^2(a,b)$ – пространство функций с интегрируемым квадратом.

Пусть далее пара функций $f, g \in L^2(a,b)$ связана некоторым аналитическим преобразованием $A : g = A(f)$. Тогда спектры связаны преобразованием $\tilde{A} : d = \tilde{A}(c)$, называемым *представлением* оператора A, определенным в пространстве спектральных векторов H.

На практике используют конечные спектральные представления функций в виде так называемых *усеченных ортогональных рядов*:

$$f(x) \approx f(N;x) = \sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x),$$

которые при больших, но конечных N дают хорошие приближения (*аппроксимации*) функции $f(x)$. При этом спектр приближения функции является вектором конечномерного пространства, являющегося подмножеством бесконечномерного пространства

$$c \in H_N \subset H.$$

В данной работе рассматриваются аналитические преобразования, для которых справедливо: $g(K;x) = A(f(N;x))$ при $N, K < \infty$, т.е. случаи, когда результат действия преобразования над спектральным вектором конечной длины $c \in H_N$ представим конечным же вектором $d \in H_K$. В таких случаях должно существовать представление преобразования спектров $\tilde{A}$ такое, что $d = \tilde{A}(c)$.

Предметом дальнейшего рассмотрения является описание вычислительного алгоритма, применяемого для выполнения ряда подобных преобразований на практике: сложения, дифференцирования, интегрирования, умножения и деления отрезков ортогональных рядов.

Поскольку рассматриваемые преобразования являются линейными, то естественным их представлением в пространстве коэффициентов разложения является матричное представление. Для операции умножения матричное представление было рассмотрено и получены результаты [5], касающиеся спектра оператора умножения на функцию. В частности, это позволяет в общем виде обосновать и реализовать деление отрезков ортогональных рядов, а также извлечение корня, т.е. реализацию любой рациональной степени от отрезка ортогонального ряда.

Однако, матричное представление операторов позволяет сводить соответствующие операции к матричным с избыточной сложностью $\Theta(N^2)$. В данной работе вопрос построения алгоритма сложности $\Theta(N)$ решается для преобразований, подчиняющихся рекуррентным соотношениям специального вида.

Алгоритм для суммирования ортогональных рядов с использованием рекуррентных соотношений был предложен в работе [6]. Вопрос выполнения нелинейных операций над ортогональными рядами – возведения в степень – был рассмотрен в работе [7]. На основе данных подходов в дальнейшем были созданы пакеты программ, посвященные операциям над ортогональными рядами [8, 9]. Умножение рядов не только Чебышева, но и Фурье реализовано в работе [10]. Вопросы дифференцирования и интегрирования рядов Чебышева были рассмотрены в работе [11], а нахождению обратной величины для ряда Чебышева посвящена работа [12].

В приведенных примерах, а также в [13], детально разработан случай многочленов Чебышева первого рода и тригонометрических многочленов Фурье, поэтому в данной работе рассматривается задача построения алгоритма в общем виде.

3. Рекуррентные соотношения

Для ряда линейных преобразований функций

$$A : f \longrightarrow g, \quad f, g \in L^2_\rho(a,b)$$

можно найти соотношения вида

$$A(\varphi_{n+1}) = \alpha_0^{(n)} A(\varphi_n) + \ldots + \alpha_r^{(n)} A(\varphi_{n-r}) + \beta_p^{(n)} \varphi_{n+p} + \ldots + \beta_{-q}^{(n)} \varphi_{n-q}, \tag{1}$$

где p, q, r — константы, определяемые преобразованием A и выбором ортогональной системы $\{\varphi_n\}$, а $\alpha_i^{(n)}$ и $\beta_i^{(n)}$ — коэффициенты, определяющие рекуррентное соотношение (1).

В данной работе изучаются рекуррентные соотношения для систем функций $\{\varphi_n(x)\}$, построенных при использовании классических ортогональных полиномов непрерывного аргумента.

Классическими ортогональными полиномами принято называть полиномиальные решения уравнения гипергеометрического типа [14]

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \lambda y = 0, \tag{2}$$

где $\sigma(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $\tau(x) = b_0 + b_1 x$.

Полиномиальные решения уравнения (2) можно разделить на три типа в зависимости от степени главного сомножителя $\sigma(x)$:

полиномы Якоби $(P_n^{(\alpha,\beta)} \in L^2_{(1-x)^\alpha(1+x)^\beta}(-1,1))$,

полиномы Сонина-Лагерра $(L_n^\alpha \in L^2_{x^\alpha e^{-x}}(0,\infty))$,

полиномы Эрмита $(H_n \in L^2_{e^{-x^2}}(-\infty,\infty))$.

	$\sigma(x)$	$\tau(x)$	λ_n	$\rho(x)$
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$1-x^2$	$\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x$	$n(n+\alpha+\beta+1)$	$(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$
$L_n^\alpha(x)$	x	$1+\alpha-x$	n	$x^\alpha e^{-x}$
$H_n(x)$	1	$-2x$	$2n$	e^{-x^2}

где $\alpha, \beta > -1$.

Любое другое полиномиальное решение уравнения (2) линейной заменой переменной легко приводится к одному из вышеуказанных, совпадая с точностью до произвольного сомножителя.

Известно, что для любой системы ортогональных полиномов имеет место рекуррентная формула вида:

$$xP_n(x) = \alpha_n P_{n+1}(x) + \beta_n P_n(x) + \gamma_n P_{n-1}(x) \tag{3}$$

Теоретическая и практическая ценность классических ортогональных полиномов в том, что значения коэффициентов α_n, β_n и γ_n для них известны и легко могут быть выражены, например, в виде

	α_n	β_n	γ_n
$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$	$\frac{2(n+1)(n+\alpha+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$\frac{\beta^2-\alpha^2}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+2)}$	$\frac{2(n+\alpha)(n+\beta)}{(2n+\alpha+\beta)(2n+\alpha+\beta+1)}$
$L_n^\alpha(x)$	$-(n+1)$	$2n+\alpha+1$	$-(n+\alpha)$
$H_n(x)$	$1/2$	0	n

Для практического вычисления значений ортогональных полиномов обычно используется именно рекуррентная формула (3) в виду простоты своей реализации.

Ясно, что (3) соответствует преобразованию

$$A : f(x) \longrightarrow xf(x).$$

Можно показать, что для обратного преобразования

$$A^{-1} : f(x) \longrightarrow \frac{1}{x} f(x)$$

рекуррентное соотношение может быть получено из (3) в виде

$$\frac{P_{n+1}(x)}{x} = \frac{1}{\alpha_n} P_n(x) - \frac{\beta_n}{\alpha_n}\frac{P_n(x)}{x} - \frac{\gamma_n}{\alpha_n}\frac{P_{n-1}(x)}{x} \tag{4}$$

В общем случае, справедлива следующая

Теорема 1. *(Об обратимости линейных операторов.)*

Пусть для оператора A существует рекуррентное соотношение вида (1), причем $\beta_p^{(n)} \neq 0$.

Тогда для оператора A^{-1} также существует рекуррентное соотношение вида (1).

Доказательство. Подействуем оператором A на рекуррентное соотношение (1) и разрешим рекуррентное соотношение относительного старшего члена:

$$A^{-1}(\varphi_{n+p}) =$$

$$= \frac{1}{\beta_p^{(n)}} \Big(-\beta_{p-1}^{(n)} A^{-1}(\varphi_{n+p-1}) - \ldots - \beta_{-q}^{(n)} A^{-1}(\varphi_{n-q}) + \varphi_{n+1} - \alpha_0^{(n)}\varphi_n - \ldots - \alpha_r^{(n)}\varphi_{n-r} \Big)$$

Поскольку это соотношение является рекуррентным соотношением вида (1), то утверждение теоремы доказано. □

Далее рассмотрим рекуррентные соотношения, соответствующим операциям дифференцирования функций:

$$A : f(x) \longrightarrow f'(x). \tag{5}$$

Для этого нам понадобятся следующие известные для классических ортогональных многочленов соотношения:

$$(L_{n+1}^{\alpha})' = (L_n^{\alpha})' - L_n^{\alpha}, \tag{6}$$

$$\Big(H_n(x)\Big)' = 2nH_{n-1}(x). \tag{7}$$

Из соотношения (6), руководствуясь доказанной теоремой, можно получить рекуррентное соотношение, соответствующее операции интегрирования:

$$\int L_n^{\alpha} dx = -L_{n+1}^{\alpha} + L_n^{\alpha}.$$

Рассмотренные приемы, по аналогии, применимы и на случай оперирования с ортогональными полиномами Якоби.

4. Внутриспектральные преобразования

В предыдущем разделе были описаны некоторые приемы получения рекуррентных соотношений вида (1) в случае использования полных ортогональных систем, построенных на полиномах Якоби, Сонина-Лагерра и Эрмита.

В данном разделе мы покажем, что если для произвольного преобразования функции имеет место рекуррентное соотношение вида (1), то ему соответствует некоторый комплекс арифметических действий над коэффициентами разложения этой функции. На основании чего будет предложен способ преобразования ряда коэффициентов разложения в точном аналитическом соответствии с преобразованием самой функции. Также будут изложены принципы алгоритмической реализации и основные системные оценки.

Теорема 2. *(О спектральном представлении оператора.)*

Пусть некоторые функции $f, g \in L^2_\rho(a, b)$ представлены в виде отрезков ортогональных рядов по определенной ортогональной системе $\{\varphi_n(x)\}$ и имеют коэффициенты разложения $\{c_n\}$, $\{d_n\}$ соответственно.

Пусть, далее, функции связаны некоторым соотношением

$$g(x) = A(f(x)),$$

где A — линейное преобразование, для которого известно рекуррентное соотношение вида (1).

Тогда существует алгоритм линейной сложности в зависимости от глубины разложения, реализующий представление линейного преобразования в пространстве коэффициентов разложения

$$d = \tilde{A}(c).$$

Доказательство. Рассмотрим линейное преобразование над конечными суммами ортогональных рядов:

$$\sum_{n=0}^{K} d_n \varphi_n(x) = A\left(\sum_{n=0}^{N} c_n \varphi_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{N} c_n A(\varphi_n(x)), \tag{8}$$

где $N, K \in \mathbb{N}$ — глубины разложений функций f, g соответственно.

Представим правую часть равенства (8), воспользовавшись представлением (1), в виде

$$\begin{gathered}\sum_{n=0}^{N} c_n A(\varphi_n) = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} c_n A(\varphi_n) + \\ c_N(\alpha_0^{(N-1)} A(\varphi_{N-1}) + \ldots + \alpha_r^{(N-1)} A(\varphi_{N-1-r}) + \\ \beta_p^{(N-1)} \varphi_{N-1+p} + \ldots + \beta_{-q}^{(N-1)} \varphi_{N-1-q}) = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} a_n A(\varphi_n) + \sum_{n=N-1-q}^{N-1+p} b_n \varphi_n, \end{gathered} \tag{9}$$

где a_n, b_n — новые коэффициенты, полученные из c_n при применении рекуррентного соотношения.

$$\begin{gathered} a_{N-1} = c_{N-1} + \alpha_0^{(N-1)} c_N; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{N-1-r} = c_{N-1-d} + \alpha_r^{(N-1)} c_N; \\ b_{N-1+p} = \beta_p^{(N-1)} c_N; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ b_{N-1-q} = \beta_{-q}^{(N-1)} c_N; \end{gathered}$$

Сопоставив полученное выражение с равенством (8), придем к выводу, что

$$K = N - 1 + p,$$

Длина непреобразованного ряда с коэффициентами a_n уменьшилась на единицу. Продолжая таким образом понижать длину ряда, мы получаем подход, который можно описать в виде некоторой рекурсивной функции, применяемой N раз к паре массивов (a_n и b_n), причем в начальный момент они находятся в состоянии:

$$a_n^{(0)} = c_n, \quad b_n^{(0)} = 0,$$

а после конечной, N-ой итерации:

$$a_n^{(N)} = 0, \quad b_n^{(N)} = d_n.$$

То есть, коэффициенты разложения функции $f(x)$ как бы "перетекают" из массива a_n в массив b_n, приобретая значения коэффициентов разложения определенного линейного преобразования функции: $A(f(x))$.

Рассмотрим более подробно структуру алгоритма преобразования коэффициентов разложения. Тогда вычисление d_n из коэффициентов разложения c_n можно представить в виде N-шагового итерационного процесса, реализованного, например, в следующем виде:

Пусть a_n и b_n — пара массивов и в начальный момент массивы установлены в состояние:

$$a_n = c_n, \quad b_n = 0.$$

Алгоритм представляет из себя циклический процесс, состоящий из N шагов. На каждом n-том шаге $(N > n > 1)$ будут производиться следующие действия:

$$a_n := a_n + \alpha_0^{(n)} a_{n+1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{n-r} := a_{n-r} + \alpha_r^{(n)} a_{n+1};$$
$$b_{n+p} := b_{n+p} + \beta_p^{(n)} a_{n+1};$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$b_{n-q} := b_{n-q} + \beta_{-q}^{(n)} a_{n+1};$$
$$a_{n+1} := 0.$$

В конечный момент массивы a_n и b_n, будут находиться в состоянии:

$$a_n = 0, \quad b_n = d_n.$$

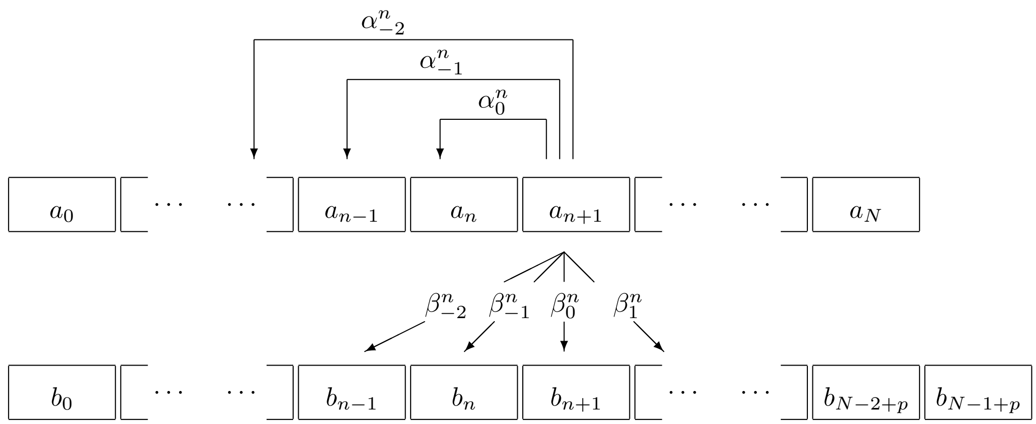

Рис. 1. Блок-схема элементарных преобразований каскада и диффузии коэффициентов разложения.

Как можно заметить, алгоритм имеет следующую структуру, отображенную схематично на Рис.1. На каждом шаге старший коэффициент складывается с более младшими коэффициентами массива a после умножения на коэффициенты α и с близлежащими коэффициентами массива b после умножения на коэффициенты β, после чего обнуляется. Преобразование над массивом a можно назвать *каскадом*, а преобразование массива a в массив b - *диффузией*.

Стоит отметить, что каскад предшествует диффузии, а результат диффузии не влияет на следующие итерации каскада. Поэтому исходное преобразование можно также представить как композицию двух преобразований: сначала выполняется каскадное преобразование над всеми элементами массива a, начиная со старших, а затем диффузное преобразование массива a в b:

$$d = \tilde{A}_d \tilde{A}_c c.$$

Исходя из структуры преобразований, отображенной на рис.1, можно сделать вывод, что матрица какскадного преобразования $\tilde{A}_c$ имеет верхне треугольный вид с единичной главной диагональю, а матрица диффузного преобразования $\tilde{A}_d$ имеет ленточную структуру.

При этом нет необходимости находить матрицы этих преобразований, они могут быть выполнены за один линейный цикл, а для обращения этих преобразований можно использовать теорему 1 и построение алгоритма для обратного преобразования. Таким образом, алгоритм не требует заводить дополнительных промежуточных массивов и поэтому имеет линейную сложность как по памяти, так и по количеству вычислений. Теорема доказана. $\square$

Таким образом, мы показали принципиальную возможность получения точного аналитического соответствия линейного преобразования функции, представленной конечным ортогональным рядом, и определенных арифметических операций над ее коэффициентами разложения, если известно соответствующее рекуррентное соотношение вида (1).

5. Пример построения алгоритма

Рассмотрим операции дифференцирования и интегрирования по многочленам Чебышева первого рода. Для операции интегрирования существует формула:

$$\int T_n(x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+1}(x)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(x)}{n-1}\right) \tag{10}$$

Сделаем замену индекса для придания стандартной формы (8):

$$\int T_{n+1}(x)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{T_{n+2}(x)}{n+2} - \frac{T_n(x)}{n}\right)$$

Согласно общей формуле для рекуррентного соотношения (8) данная формула не содержит каскадные (неявные) члены, а только диффузные (явные) члены с коэффициентами:

$$\beta_2^{(n)} = \frac{1}{2(n+2)}, \beta_0^{(n)} = -\frac{1}{2n}$$

Поэтому преобразование коэффициентов будет осуществляться по следующей формуле:

$$b_{n+2} := b_{n+2} + \beta_2^{(n)} a_{n+1} = b_{n+2} + \frac{1}{2(n+2)} a_{n+1};$$

$$b_n := b_n + \beta_0^{(n)} a_{n+1} = b_n - \frac{1}{2n} a_{n+1};$$

Заменой индексов эти формулы можно совместить в одну формулу:

$$b_n = \frac{1}{2n} a_{n-1} - \frac{1}{2n} a_{n+1}; \tag{11}$$

По теореме 1 исходная формула (10) интегрирования может быть переписана для обратного преобразования - дифференцирования. Продифференцировав и разрешив относительного старшего члена, получим:

$$T'_{n+1}(x) = \frac{n+1}{n-1} T'_{n-1}(x) + 2(n+1)T_n(x) \tag{12}$$

В этой формуле в правой части уже присутствуют как каскадный, так и диффузионный члены. Соответствующие коэффициенты имеют значения:

$$\alpha_1^{(n)} = \frac{n+1}{n-1}, \beta_0^{(n)} = 2(n+1)$$

Каскадный и диффузионный преобразования принимают вид:

$$a_{n-1} := a_{n-1} + \alpha_1^{(n)} a_{n+1} = a_{n-1} + \frac{n+1}{n-1} a_{n+1};$$

$$b_n := b_n + \beta_0^{(n)} a_{n+1} = b_n + 2(n+1) a_{n+1};$$

Поскольку связь между a и b такая, что позволяет выразить обратно a через b, то подставив ее в каскадное выражение для a, можно после некоторых упрощений получить соотношение в виде:

$$b_{n-1} = 2n a_n + b_{n+1}$$

Эта формула может также быть напрямую получена из итоговой формулы для интегрирования (11).

Необходимо отметить, что в нашей более ранней работе [2] приведена ошибочная рекуррентная формула для дифференцирования многочленов Чебышева первого рода. В настоящей работе эта формула выведена и имеет вид (12).

6. Заключение

В данной работе рассмотрен вопрос о поиске соответствия между преобразованием функции, представимой отрезком ортогонального ряда, и комплексом арифметических действий над коэффициентами ее разложения. В качестве преобразований рассмотрены дифференцирование, интегрирование, умножение и деление на одночлен. Описан тип линейного рекуррентного соотношения неявного вида, которому подчиняются ортогональные многочлены при рассматриваемых преобразованиях. Показано, что для тех преобразований, для которых существуют специального вида рекуррентные соотношения для функций базиса, можно построить алгоритм для осуществления преобразования в пространстве коэффициентов разложения, который имеет ряд преимуществ перед другими подходами:

(1) Алгоритм универсальный как для различных базисов, так и различных операций.
(2) Алгоритм имеет линейную в зависимости от длины ряда сложность как по памяти, так и по количеству операций.
(3) Для выполнения преобразования достаточно определить рекуррентное соотношение для рассматриваемого базиса.
(4) Для выполнения обратного преобразования достаточно определить рекуррентное соотношение для обратного преобразования.

Разработанный алгоритм может быть использован при решении задач на основе спектрального подхода.

References

[1] S.A. Makhortykh, L.I. Kulikova, A.N. Pankratov, R.K. Tetuev, *Generalized Spectral-Analytical Method and Its Applications in Image Analysis and Pattern Recognition Problems*, Pattern Recognition and Image Analysis, **29**:4 (2019), 621–638.
[2] R.K. Tetuev, N.N. Nazipova, A.N. Pankratov, F.F. Dedus, *Search for Megasatellite Tandem Repeats in Eukaryotic Genomes by Estimation of GC-content Curve Oscillations*, Math. Biol. Bioinf., **5**:1 (2010), 30–42.
[3] Rudnev V.R., Pankratov A.N., Kulikova L.I., Dedus F.F., Tikhonov D.A., Efimov A.V., *Recognition and Stability Analysis of Structural Motifs of $\alpha-\alpha$-corner Type in Globular Proteins*, Math. Biol. Bioinf., **8**:2 (2013), 398–406.
[4] I.V. Florinsky, A.N. Pankratov *A universal spectral analytical method for digital terrain modeling*, International Journal of Geographical Information Science, **30**:12 (2016), 2506–2528.
[5] A.N. Pankratov *On the Implementation of Algebraic Operations on Orthogonal Function Series*, Computational Mathematics and Mathematical Physics, **44**:12 (2004), 2017-2023.
[6] C.W. Clenshaw, *A note on the summation of Chebyshev series*, Math. Comp., **9** (1955), 118–120.
[7] R.A. Broucke, *Construction of Rational and Negative Powers of a Formal Series*, Communications of the ACM, **14**:1 (1971), 32–35.
[8] R.A. Broucke, *A446 - Ten Subroutines for the Manipulation of Chebyshev Series*, Communications of the ACM, **16**:4 (1973), 254–256.
[9] B. D'Aguanno, A. Nobile, E. Roman, *CHPACK: A package for the manipulation of Chebyshev approximations*, Computer Physics Communications, **29** (1983), 361–374.
[10] G. Delic, S.M. Malherbe, *Subroutines For Convolution Sums Of Chebyshev And Fourier Series*, Computer Physics Communications, **48** (1988), 305–312.

[11] R. Barrio, *Algorithms for the integration and derivation of Chebyshev series*, Applied Mathematics and Computation, **150**:3 (2004), 707–717.

[12] R.J. Mathar, *Chebyshev series expansion of inverse polynomials*, Journal of Computational and Applied Mathematics, **196**:2 (2006), 596–607.

[13] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes. The Art of Scientific Computing. Third Edition*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[14] A.F. Nikiforov, S.K. Suslov, V.B. Uvarov, *Classical orthogonal polynomials of a discrete variable*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

Ruslan Kurmanbievich Tetuev
Institute of Mathematical Problems of Biology RAS - the Branch of Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences,
Professor Vitkevich St., 1
142290, Pushchino, Moscow Region, Russia
Email address: ruslan.tetuev@gmail.com

Anton Nikolaevich Pankratov
Institute of Mathematical Problems of Biology RAS - the Branch of Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences,
Professor Vitkevich St., 1
142290, Pushchino, Moscow Region, Russia
Email address: pan@impb.ru

Lyudmila Ivanovna Kulikova
Institute of Mathematical Problems of Biology RAS - the Branch of Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences,
Professor Vitkevich St., 1
142290, Pushchino, Moscow Region, Russia
Email address: likulikova@mail.ru

Sergei Aleksandrovich Makhortyh
Institute of Mathematical Problems of Biology RAS - the Branch of Keldysh Institute of Applied Mathematics of Russian Academy of Sciences,
Professor Vitkevich St., 1
142290, Pushchino, Moscow Region, Russia
Email address: makh@impb.ru