РЕЦЕНЗИЯ

на статью

Генерические полиномиальные алгоритмы для проблемы о рюкзаке в некоторых матричных полугруппах

Работа посвящена генерической сложности задачи, принадлежащей к большому классу разнообразных задач о рюкзаке, и служит развитием процитированных работ А.Н. Рыбалова (2020) о близких задачах распознавания над полугруппами матриц. Результаты тех работ используются здесь. Без доказательства приведены леммы 2, 3 и 4. К сожалению, новая статья очень короткая и лишена обсуждения результатов. Ниже предлагаются три пути, которые позволили бы уточнить результаты и расширить их обсуждение. А потом даны небольшие замечания к тексту.

Во-первых, хотя речь идёт о полугруппах целочисленных матриц, было бы естественно во введении дать краткий обзор алгоритмов для решения соответствующих задач распознавания и задач оптимизации над кольцом целых чисел. Например, можно упомянуть недавний обзор Cacchiani *et al.* (2022), а также статью Шперлинга и Кочетова (2022). Было бы интересно сравнить известные результаты о вычислительной сложности при работе над целыми числами и новые результаты о целочисленных матрицах, а не ограничиваться леммой 1.

Во-вторых, хотя некоторая полиномиальная оценка получается уже при использовании тривиальных алгоритмов, применяемых для умножения матриц и вычисления ранга или определителя матрицы, эти оценки можно уточнить, используя более эффективные алгоритмы, а не метод Гаусса. В частности, сложность вычисления определителя матрицы близка к сложности матричного умножения (Neiger and Pernet, 2021). На практике алгоритм Штрассена–Винограда (Strassen, 1969; Winograd, 1971) эффективнее тривиального алгоритма матричного умножения для квадратных матриц, порядок которых равен нескольким сотням. Алгоритм реализован в современных системах компьютерной алгебры и уже применяется на практике. Алгоритм Смирнова, вероятно, тоже найдёт реальное применение для работы с ещё большими матрицами. Обзоры работ по этой теме можно найти в недавно опубликованных статьях (Karstadt and Schwartz, 2020; Rosowski, 2023). С другой стороны, поскольку речь идёт о целочисленных матрицах, можно использовать алгоритмы для вычисления нормальной формы Смита (Birmpilis, Labahn, Storjohann, 2023). В частности, проверка невырожденности матрицы не требует вычислять значение определителя матрицы, достаточно проверить отличие от нуля.

Автор не обязан цитировать все упомянутые статьи, но какой-то обзор может быть полезен для читателей, а уточнение оценок вычислительной сложности сделало бы результат более аккуратным.

В-третьих, хотелось бы видеть более детальное обсуждение результатов и дальнейшее развитие этой темы, а не только формальное обобщение задачи о рюкзаке, близкое к ранее опубликованным задачам. При этом в работе, по сути, рассматривается лишь задача распознавания: существует ли набор значений степеней, для которого выполняется равенство некоторых матриц. Нередко задача о рюкзаке формулируется как задача дискретной оптимизации. Над полугруппой матриц также можно формулировать задачи оптимизации, например, о минимизации числа матричных множителей, входящих в ненулевой степени, или о минимизации суммы степеней. Обсуждение таких задач оптимизации, а не распознавания, могло бы служить для иллюстрации более тесной связи новых и традиционных постановок задач, следовательно, могло бы привлечь больше читателей к обсуждаемой теме.

Небольшие замечания

К введению

Написано: “Все числа записаны в двоичном виде.” Но здесь лучше сказать, что числа записаны в двоичной системе счисления.

Общее замечание

В литературе упоминается очень много различных задач, которые называются задачами о рюкзаке (Cacchiani *et al.*, 2022; Shperling, Kochetov, 2022). В частности, задачами о рюкзаке обычно называют задачи оптимизации. Поэтому нельзя говорить о классической задаче о рюкзаке, не уточняя формулировку. Сейчас читатель вынужден догадываться о точной формулировке задач, обращаясь к цитируемой литературе или разбирая детали доказательств. Статья наполнена расплывчатыми формулировками, которые могут привести к недоразумениям.

К разделу 4

О числах, “записанных в двоичной форме”, лучше сказать, что они записаны в двоичной системе счисления. Или говорить о двоичных записях чисел.

Фразу “в виде произведения матриц A и B” надо изменить, поскольку речь идёт не о произведении AB, а о произведении неопределённого числа матриц, каждая из которых равна A или B.

На шаге (4) алгоритма Ψ для приведения матрицы к нормальной форме нужно бы объяснить, почему выбрана верхняя граница на число раундов $k = n^5$. Что произойдёт, если изменить эту границу?

В доказательстве теоремы 2 для обозначения показателей степени лучше использовать написание ε вместо ϵ, как это сделано в разделе 3.

В больших выключных формулах лучше использовать скобки большого размера

$$\left(1 - \frac{\cdots}{\cdots} \right),$$

используя команды вида

```
\left( 1 - \frac{\cdots}{\cdots} \right).
```

Странная фраза повторяется много раз, например, в конце доказательства теоремы 4: “ограничено полиномиально от n.” Можно сказать, что оно ограничено полиномом от n. Но было бы лучше уточнить эти оценки, указав степени этих полиномов.

ВЫВОД

Статья соответствует тематике журнала СЭМИ, интересна и содержит новые результаты, но требует доработки и расширения с учётом замечаний.

Список литературы

[1] S. Birmpilis, G. Labahn, A. Storjohann, A fast algorithm for computing the Smith normal form with multipliers for a nonsingular integer matrix. Journal of Symbolic Computation, 116 (2023), 146–182. https://doi.org/10.1016/j.jsc.2022.09.002

[2] V. Cacchiani, M. Iori, A. Locatelli, S. Martello, Knapsack problems – An overview of recent advances. Part I: Single knapsack problems. Computers and Operations Research, 143:105692 (2022), 1–13. https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105692

[3] V. Cacchiani, M. Iori, A. Locatelli, S. Martello, Knapsack problems – An overview of recent advances. Part II: Multiple, multidimensional, and quadratic knapsack problems. Computers and Operations Research, 143:105693 (2022), 1–14. https://doi.org/10.1016/j.cor.2021.105693

[4] E. Karstadt, O. Schwartz, Matrix multiplication, a little faster. J. ACM, 67:1 (2020), article no. 1, pp. 1–31. `https://doi.org/10.1145/3364504`

[5] V. Neiger, C. Pernet, Deterministic computation of the characteristic polynomial in the time of matrix multiplication. Journal of Complexity, 67:101572 (2021), 1–35. `https://doi.org/10.1016/j.jco.2021.101572`

[6] A. Rosowski, Fast commutative matrix algorithms. Journal of Symbolic Computation, 114 (2023), 302–321. `https://doi.org/10.1016/j.jsc.2022.05.002`

[7] S.M. Shperling, Y.A. Kochetov, A knapsack problem for rectangles under center-of-gravity constraints. Journal of Applied and Industrial Mathematics. 16:3 (2022), 563–571. `https://doi.org/10.1134/S199047892203019X`

[8] V. Strassen, Gaussian elimination is not optimal. Numerische Mathematik, 13:4 (1969), 354–356. `https://doi.org/10.1007/BF02165411`

[9] S. Winograd, On multiplication of 2×2 matrices. Linear Algebra and its Applications, 4:4 (1971), 381–388. `https://doi.org/10.1016/0024-3795(71)90009-7`