S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №2, стр. 784–791 (2022) УДК 517.53
DOI 10.33048/semi.2022.19.065 MSC 30E05, 30H99

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В КЛАССАХ И.И. ПРИВАЛОВА

Ф.А. ШАМОЯН, Н.М. МАХИНА

Abstract. In this paper we consider the invariance of Privalov classes with respect to the differentiation operator. We prof a necessary and sufficient condition for the invariance of a plane weighted Privalov classes in the unit disc and we have expanded the indicated results for an any bounded domain on the complex plane.

Keywords: Privalov class, differentiation operator, Whitney decomposition.

1. Введение

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, T — граница D; $H(D)$ — множество всех аналитических функций в D.

Пусть также Π_p, $0 < p < +\infty$, — класс И.И. Привалова в D:

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p d\varphi < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |a| = \max\left(\ln |a|, 0\right), \forall a \in \mathbb{C}$.

Хорошо известно, $\Pi_1 = N$, где N – класс функций ограниченного вида Р. Неванлинны: функций, аналитических в D, с ограниченной характеристикой

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi, 0 < r < 1.$$

Shamoyan, F.A., Makhina, N.M. Some remarks on differential operators in the classes of I.I. Privalov.

Поступила 23 июня 2022 г., опубликована 11 ноября 2022 г.

Известная гипотеза Блоха-Невалинны (см. [1]) утверждает, что класс N инвариантен относительно дифференциального оператора: если $f \in N$, то $f' \in N$.

О. Фростман впервые (см. [2]) построил функцию, а именно, произведение Бляшке, производная которой не принадлежит классу Р. Неванлинны N: $\exists B(z, z_k) \in N : B'(z, z_k) \notin N$.

Возник вопрос о характеризации таких произведений.

Ф.А. Шамоян, В.А. Беднаж, В.А. Кустова получили (см. [3]), в терминах нулей, полную характеризацию тех произведений Бляшке (необходимое и достаточное условие), производная которых принадлежит не только классу N, но и классу Π_p для всех $0 < p < +\infty$, а именно, был доказан следующий результат:

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность точек из D:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |z_k|) < +\infty;$$

E — множество предельных точек последовательности $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ на T; $\left\{e^{i\alpha_k} e^{i\beta_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность дополнительных дуг E на T. Если

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \ln^q \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} < +\infty,$$

где $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n = 1, 2, ...$, количество точек в каждом интервале (α_k, β_k), $k = 1, 2, ...$, равномерно ограничено, то $B^{(n)}(z, z_k) \in \Pi_p, n \in \mathbb{N}, 0 < p < +\infty$.

Обратно, существует последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset D$, удовлетворяющая условию Бляшке, такая, что если

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\beta_k - \alpha_k) \ln^q \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} = +\infty,$$

то $B^{(n)}(z, z_k) \notin \Pi_p, n \in \mathbb{N}, 0 < p < +\infty$.

Обзор некоторых результатов, связанных с инвариантностью относительно дифференциальных операторов классов аналитических функций, содержат, например, работы Д. Кэмпбелла, Г. Уикса (см. [4]); С.В. Шведенко (см. [5]).

Обозначим, далее, ооответствующий плоский весовой класс И.И. Привалова, $0 < p < +\infty$,

$$S_p(\omega, D) = \left\{ f \in H(D) : \int\limits_0^1 \omega(1 - r) \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p d\varphi dr < +\infty \right\}.$$

где $\omega(x), x \in (0; 1)$, — положительная непрерывная на $(0; 1)$ функция.

Гипотезу Блоха-Неванлинны в классах И.И. Привалова Π_p можно сформулировать следующим образом: каково бы ни было $0 < p < +\infty$ производная любой аналитической в D функции из класса Π_p принадлежит классу Π_p.

Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова (см. [6]) доказали неинвариантность класса И.И. Привалова относительно оператора дифференциация: в классах И.И. Привалова $\Pi_p, 0 < p < +\infty$, гипотеза Блоха-Неванлинны неверна, при этом если $f(z) \neq 0, z \in D$, то $f' \in S_p(w, D)$.

Ф.А. Шамоян, И.С. Курсина (см. [7]) установили инвариантность весовых плоских классов И.И. Привалова $S_p(\omega, D)$ относительно оператора дифференцирования для довольно общих весовых функций ω, получено полное описание таких весов:

Пусть $\omega \in S$, где S – множество всех положительных функций из $L^1(0;1)$, для которых существуют числа $m_\omega > 0$, $M_\omega > 0, q_\omega \in (0;1)$ такие, что $m_\omega \le \dfrac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega$ при $r \in (0;1)$, $\lambda \in [q_\omega;1]$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) класс $S_p(\omega, D)$, $0 < p < +\infty$, инвариантен относительно оператора дифференцирования $D(f)(z) = f'(z)$;

б) $\displaystyle\int_0^1 \omega(t)\ln^p \frac{1}{t}dt < +\infty$.

2. Формулировка основных результатов

В связи с результатами работ [3], [6] естественно возникает вопрос описания наименьшего весового пространства X аналитических в круге D функций, для которых из условия $f \in \Pi_p$ следует $f' \in X$.

В первой части этой работы, используя методы работы [7], мы докажем следующее утверждение:

Теорема 1. *Для того, чтобы из условия $f \in \Pi_p$, $0 < p < +\infty$, следовало $f^{(n)} \in S_p(\omega, D), n \in \mathbb{N}, 0 < p < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_0^1 \omega\left(1-r\right)\left(\ln \frac{1}{1-r}\right)^p dr < +\infty.$$

Учитывая вышеуказанные результаты для единичного круга D, возникает задача о распространении данных утверждений на случай областей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, отличных от D.

Пусть G — некоторая область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ∂G — ее граница; $\rho(\zeta, \partial G)$ — эвклидово расстояние от точки ζ до границы ∂G; $H(G)$ — множество всех аналитических функций в G.

В дальнейшем нам также потребуется весовая функция, определенная на всей полуоси $\mathbb{R}_+ = (0;+\infty)$: пусть ω — монотонно убывающая, непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям: существуют числа $m_\omega > 0$, $M_\omega > 0, q_\omega \in (0;1) : m_\omega \le \dfrac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \le M_\omega$ при $r \in (0;+\infty)$, $\lambda \in [q_\omega;1]$.

Далее рассмотрим классы функций следующего вида:

$$S_p(\omega, G) = \left\{ f \in H(G) : \int_G \omega\left(\frac{1}{\rho(\zeta,\partial G)}\right)\left(\ln^+|f(\zeta)|\right)^p dm_2(\zeta) < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$; m_2 — плоская мера Лебега на G.

Оказывается, утверждения, аналогичные вышеуказанным, можно сформулировать для всех ограниченных областей:

Теорема 2. *Пусть ω — вышеуказанная весовая функция; G — некоторая ограниченная область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, причем*

$$\int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z,\partial G)}\right)\left(\left(\ln^+\frac{1}{\rho(z,\partial G)}\right)^p+1\right)dm_2(z)<+\infty.$$

Тогда класс $S_p(\omega, G)$ инвариантен относительно оператора дифференцирования при произвольном $0<p<+\infty$.

3. Доказательство основных результатов

Докажем теорему 1 по методу, примененному в работе [7] (см. доказательство теоремы 1 данной работы).

Доказательство. Сначала заметим, что если $f\in\Pi_p$, то

$$\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|\lesssim\frac{1}{(1-r)^{1/p}}. \tag{1}$$

Оценка (1) при $1\le p<+\infty$ сразу следует из неравенства Гельдера и из следующих рассуждений.

Поскольку $\left(\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p$ является субгармонической функцией, то

$$\left(\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\frac{(R^2-r^2)\left(\ln^+\left|f(Re^{i\theta})\right|\right)^p}{R^2-2rR\cos(\theta-\varphi)+r^2}d\theta$$

при всех $0\le r<R<1$.

Поэтому, так как $\dfrac{2(R-r)}{(R-r)^2}\lesssim\dfrac{2}{(R-r)}$, то

$$\left(\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p\le\sup_{0<R<1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+\left|f(Re^{i\theta})\right|\right)^p d\theta.$$

Теперь, положив $R=\dfrac{r+1}{2}$, получим нужную оценку.

Если $0<p<1$, то воспользуемся известной теоремой Феффермана-Стейна (см. [8]), согласно которой

$$\left(\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p\le\frac{A(p)}{(1-|z|)^2}\int\limits_{K_{\frac12}(z)}\left(\ln^+|f(\zeta)|\right)^p dm_2(\zeta), \tag{2}$$

где $K_{\frac12}(z)=\left\{\zeta:|\zeta-z|\le\dfrac12(1-|z|)\right\}$.

Теперь учтем, что

$$K_{\frac12}(z)\subset\tilde K_{\frac12}(z)=\left\{\zeta:|z|-\frac12(1-|z|)\le|\zeta|\le|z|+\frac12(1-|z|)\right\}.$$

Поэтому из (2) получаем

$$\left(\ln^+|f(z)|\right)^p\lesssim\frac{1}{1-|z|}\sup_{0<\rho<1}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+\left|f(\rho e^{i\theta})\right|\right)^p d\theta.$$

То есть оценка $\ln^+|f(z)| \lesssim \dfrac{1}{(1-|z|)^{1/p}}$ справедлива при всех $z \in D$, $0 < p < +\infty$.

Теперь из этой оценки точно таким же образом, как и в [7], получим

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \omega(1-r)\left(\ln^+\left|f'(re^{i\varphi})\right|\right)^p r dr d\varphi \lesssim$$

$$\lesssim \sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p d\varphi + \int_0^1 \omega(1-r)\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^p dr.$$

Из данной оценки непосредственно следует достаточность условия теоремы.

Перейдем к доказательству необходимости условия теоремы. Снова применим методику работы [7]. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{\lambda k(\alpha-1)} z^{2^{\lambda k}},$$

где λ — натуральное число, $0 < \alpha < 1$.

Ясно, что $f \in H^\infty(D)$, значит, $f \in \Pi_p$ при всех $0 < p < +\infty$.

Снова таким же образом, как в работе [7], устанавливается, что если $r_n = \exp\left(-\dfrac{1}{2^{\lambda_n}}\right)$, то функция $f(z)$ удовлетворяет оценке

$$\left(\ln\left|f'(r_n e^{i\theta})\right|\right)^p \geq c \ln^p \frac{1}{1-r_n},$$

где $\theta \in [0; 2\pi]$, $n = 1, 2, ...$, c — некоторое положительное число.

Повторяя рассуждения вышеуказанной работы, получим, что

$$\int_0^1 \omega\left(1-r\right) \ln^p \frac{1}{1-r} dr < +\infty.$$

□

Перейдем к доказательству теоремы 2 и отметим, что в нем существенную роль играет классическая теорема Уитни:

Теорема A (разложение Уитни). *Пусть G — некоторое открытое связное множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, тогда существует такой набор квадратов $\mathrm{P} = \{Q_k\}_{k=1}^{+\infty}$, что $\bigcup\limits_k Q_k = G$, причем*

а) $\overset{o}{Q}_k \cap \overset{o}{Q}_m = \emptyset, k \neq m$;

б) $c_1 diam(Q_k) \leq \rho(Q_k, \partial G) \leq c_2 diam(Q_k)$, константы c_1, c_2 не зависят от G;

в) для произвольного $s \in \mathbb{R}_+, 0 \leq s < 5/4$, квадраты $\{Q_k^*(s)\}_{k=1}^{+\infty}$, имеющие те же центры, что и квадраты $\{Q_k\}_{k=1}^{+\infty}$ соответственно, но растянутые в s раз, покрывают множество G конечнократно.

Доказательство теоремы 2 проведем по схеме доказательства теоремы 1 из работы [9].

Доказательство. Воспользуемся теоремой А. Пусть $\mathrm{P} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots\}$ — вышеуказанный набор квадратов, $G = \bigcup\limits_k Q_k$; учтем неравенства теоремы А и заметим, что $\omega\left(\dfrac{1}{\rho(\zeta_1, \partial G)}\right) \sim \omega\left(\dfrac{1}{\rho(\zeta_2, \partial G)}\right)$ для произвольных точек $\zeta_1, \zeta_2 \in Q_k$.

Имеем:

$$I = \int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p dm_2(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{Q_k} \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p dm_2(z) \leq$$

$$\leq c_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \max_{z \in Q_k} \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p m_2(Q_k) \leq$$

$$\leq c_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(z_k, \partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z_k)\right|\right)^p \rho^2(z_k, \partial G), z_k \in \partial Q_k. \qquad (3)$$

Пусть теперь Q_k^* – квадрат, имеющий тот же центр, что и Q_k, но растянутый в $(1+\varepsilon)$ раз, $0 < \varepsilon < \dfrac{1}{4}$, $Q_k \subset Q_k^*$. Заметим, что система $\{Q_k^*\}$ покрывает область G конечнократно. Пусть $0 < \delta = \dfrac{1}{4}\rho(Q_k, \partial Q_k^*)$. Тогда можно утверждать, что для произвольного $z_k \in Q_k$, круг $K_\delta(z_k) = \{z : |z - z_k| < \delta\}$ полностью включается в квадрат Q_k^*.

Далее, по формуле Коши $f^{(n)}(z_k) = \dfrac{n!}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{\partial K_\delta(z_k)} \dfrac{f(z)}{(z - z_k)^{n+1}} dz$, а значит,

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \frac{c(n)}{\delta^n} \max_{z \in \partial K_\delta(z_k)} |f(z)| \leq \frac{c(n)}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)} \left|f(\tilde{z}_k)\right|, \tilde{z}_k \in \partial K_\delta(z_k).$$

Тогда $\ln^+\left|f^{(n)}(z)\right| \leq \ln^+ c(n) + \ln^+ \dfrac{1}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)} + \ln^+\left|f(\tilde{z}_k)\right|, \tilde{z}_k \in \partial K_\delta(z_k)$.

Отметим, что в условиях теоремы $\rho(z_k, \partial G)$ эквивалентно $\rho(\tilde{z}_k, \partial G)$. Действительно, из теоремы А получаем:

$$c_3 diam(Q_k) \leq \rho(z_k, \partial G) \leq c_4 diam(Q_k),$$

$$c_5 diam(Q_k^*) \leq \rho(\tilde{z}_k, \partial G) \leq c_6 diam(Q_k^*),$$

но по нашему построению $diam(Q_k) < diam(Q_k^*) < 1\dfrac{1}{4} diam(Q_k)$, а значит,

$$c_7 \rho(\tilde{z}_k, \partial G) \leq \rho(z_k, \partial G) \leq c_8 \rho(\tilde{z}_k, \partial G). \qquad (4)$$

Аналогично можно показать, что $\rho(Q_k, \partial Q_k^*)$ эквивалентно $\rho(z_k, \partial G)$.

Тогда из (3) с учетом (4) получаем

$$I \leq c_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(z_k, \partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z_k)\right|\right)^p \rho^2(z_k, \partial G) \leq$$

$$\leq c_9 \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(\tilde{z}_k, \partial G)}\right) \rho^2(\tilde{z}_k, \partial G) \left(\ln^+ c(n) + \ln^+ \frac{1}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)} + \ln^+ |f(\tilde{z}_k)|\right)^p \leq$$

$$\leq c_{10} \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(\tilde{z}_k, \partial G)}\right) \rho^2(\tilde{z}_k, \partial G) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)}\right)^p + 1\right) +$$

$$+ c_{11} \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(\tilde{z}_k, \partial G)}\right) \rho^2(\tilde{z}_k, \partial G) \left(\ln^+ |f(\tilde{z}_k)|\right)^p. \qquad (5)$$

Пусть теперь также $0 < \delta' = \dfrac{1}{8}\rho(Q_k, \partial Q_k^*)$, $K_{\delta'}(\tilde{z}_k) = \{z : |z - \tilde{z}_k| < \delta'\}$, значит, $K_{\delta'}(\tilde{z}_k) \subset Q_k^*$.

Учитывая субгармоничность функции $(\ln^+ |f|)^p$ при $1 \leq p < +\infty$ и теорему Феффермана-Стейна при $0 < p < 1$, как и выше, получим:

$$\left(\ln^+ |f(\tilde{z}_k)|\right)^p \leq \frac{A}{\delta'^2} \int\limits_{K_{\delta'}(\tilde{z}_k)} \left(\ln^+ |f(z)|\right)^p dm_2(z) \leq$$

$$\leq \frac{c_{12}}{\rho^2(\tilde{z}_k, \partial G)} \int\limits_{Q_k^*} \left(\ln^+ |f(z)|\right)^p dm_2(z).$$

Аналогично,

$$\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)}\right)^p + 1 \leq \frac{c_{13}}{\rho^2(\tilde{z}_k, \partial G)} \int\limits_{Q_k^*} \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z).$$

Окончательно с учетом (5), получаем

$$\int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G}\right) \left(\ln^+ \left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p dm_2(z) \leq$$

$$\leq c_{14} \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{Q_k^*} \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z) +$$

$$+ c_{15} \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{Q_k^*} \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\ln^+ |f(z)|\right)^p dm_2(z) \leq$$

$$\leq c_{16} \int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z) +$$

$$+ c_{17} \int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\ln^+ |f(z)|\right)^p dm_2(z).$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что система $\{Q_k^*\}$ покрывает множество G конечнократно.

Таким образом, если

$$\int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z) < +\infty, \qquad (6)$$

то
$$\int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z,\partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p dm_2(z) < +\infty,$$
и класс $S_p(\omega, G)$ инвариантен относительно оператора дифференцирования. $\square$

Замечание. Отметим, что условие (6) является необходимым, если $G = D$ (см. [7] и теорему 1).

References

[1] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthiers-Villars, Paris, 1929. JFM 55.0773.03

[2] O. Frostman, *Sur les produits des Blaschke*, Fysiogr. Sällsk. Lund Förh., **12**:15 (1942), 169—182. Zbl 0061.15112

[3] F.A. Shamoyan, V.A. Bednazh, V.A. Kustova, *Blaschke product in Privalov classes*, Sib. Èlectron. Math. Izv., **18**:1 (2021), 168–175. Zbl 1462.30116

[4] D. Campbell, G. Wickes, *The Bloch-Nevanlinna conjecture revisited*, Bull. Aust. Math. Soc., **18**:3 (1978), 447–453. Zbl 0373.30031

[5] S.V. Shvedenko, *Hardy classes and spaces of analytic functions in the unit circle, polycircle and ball, connected with them*, Itogi Nauki Tekh., Ser. Mat. Anal., **23** (1985), 3-–124. Zbl 0603.32004

[6] E.G. Rodikova, F.A. Shamoyan, *On the differentiation in the Privalov classes*, J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys., **13**:5 (2020), 622–630. Zbl 7334120

[7] F.A. Shamoyan, I.S. Kursina, *On invariance of some classes of holomorphic functions under integrodifferential operators*, J. Math. Sci., New York, **107**:4 (2001), 4097—4107. Zbl 1134.30326

[8] C. Fefferman, E. Stein. *H^p spaces of several variables*, Acta Math., **129** (1972), 137–193. Zbl 0257.46078

[9] N.M. Tkachenko, F.A. Shamoyan, *The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundar*, J. Math. Phys., Anal. Geom., **5**:2 (2009), 192–210. Zbl 1193.30053

Faizo Agitovich Shamoyan
Saratov State University,
Astrakhanskaya st., 83,
410012, Saratov, Russia
Email address: shamoyanfa@yandex.ru

Natalia Mikhailovna Makhina
Bryansk State University,
Bezhitskaya st., 14,
241036, Bryansk, Russia
Email address: mahinanm@yandex.ru