

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том 19, №2, стр. 784–791 (2022)
DOI 10.33048/semi.2022.19.065

УДК 517.53
MSC 30E05, 30H99

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В КЛАССАХ И.И. ПРИВАЛОВА

Ф.А. ШАМОЯН, Н.М. МАХИНА

ABSTRACT. In this paper we consider the invariance of Privalov classes with respect to the differentiation operator. We prove a necessary and sufficient condition for the invariance of a plane weighted Privalov classes in the unit disc and we have expanded the indicated results for an any bounded domain on the complex plane.

Keywords: Privalov class, differentiation operator, Whitney decomposition.

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости \mathbb{C} , T — граница D ; $H(D)$ — множество всех аналитических функций в D .

Пусть также Π_p , $0 < p < +\infty$, — класс И.И. Привалова в D :

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p d\varphi < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |a| = \max(\ln |a|, 0)$, $\forall a \in \mathbb{C}$.

Хорошо известно, $\Pi_1 = N$, где N — класс функций ограниченного вида Р. Неванлинны: функций, аналитических в D , с ограниченной характеристикой

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ |f(re^{i\varphi})| d\varphi, 0 < r < 1.$$

SHAMOYAN, F.A., MAKHINA, N.M. SOME REMARKS ON DIFFERENTIAL OPERATORS IN THE CLASSES OF I.I. PRIVALOV.

© 2022 ШАМОЯН Ф.А., МАХИНА Н.М.

Поступила 23 июня 2022 г., опубликована 11 ноября 2022 г.

Известная гипотеза Блоха-Невалинны (см. [1]) утверждает, что класс N инвариантен относительно дифференциального оператора: если $f \in N$, то $f' \in N$.

О. Фростман впервые (см. [2]) построил функцию, а именно, произведение Бляшке, производная которой не принадлежит классу P . Невалинны N : $\exists B(z, z_k) \in N : B'(z, z_k) \notin N$.

Возник вопрос о характеристизации таких произведений.

Ф.А. Шамоян, В.А. Беднаж, В.А. Кустова получили (см. [3]), в терминах нулей, полную характеристизацию тех произведений Бляшке (необходимое и достаточное условие), производная которых принадлежит не только классу N , но и классу Π_p для всех $0 < p < +\infty$, а именно, был доказан следующий результат:

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность точек из D :

$$\sum_{k=1}^\infty (1 - |z_k|) < +\infty;$$

E — множество предельных точек последовательности $\{z_k\}_{k=1}^\infty$ на T ; $\{e^{i\alpha_k} e^{i\beta_k}\}_{k=1}^\infty$ — последовательность дополнительных дуг E на T . Если

$$\sum_{k=1}^\infty (\beta_k - \alpha_k) \ln^q \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} < +\infty,$$

где $z_n = r_n e^{i\theta_n}$, $n = 1, 2, \dots$, количество точек в каждом интервале (α_k, β_k) , $k = 1, 2, \dots$, равномерно ограничено, то $B^{(n)}(z, z_k) \in \Pi_p, n \in \mathbb{N}, 0 < p < +\infty$.

Обратно, существует последовательность $\{z_k\}_{k=1}^\infty \subset D$, удовлетворяющая условию Бляшке, такая, что если

$$\sum_{k=1}^\infty (\beta_k - \alpha_k) \ln^q \frac{1}{\beta_k - \alpha_k} = +\infty,$$

то $B^{(n)}(z, z_k) \notin \Pi_p, n \in \mathbb{N}, 0 < p < +\infty$.

Обзор некоторых результатов, связанных с инвариантностью относительно дифференциальных операторов классов аналитических функций, содержат, например, работы Д. Кэмпбелла, Г. Уикса (см. [4]); С.В. Шведенко (см. [5]).

Обозначим, далее, оответствующий плоский весовой класс И.И. Привалова, $0 < p < +\infty$,

$$S_p(\omega, D) = \left\{ f \in H(D) : \int_0^1 \omega(1-r) \int_{-\pi}^\pi (\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p d\varphi dr < +\infty \right\}.$$

где $\omega(x), x \in (0; 1)$, — положительная непрерывная на $(0; 1)$ функция.

Гипотезу Блоха-Невалинны в классах И.И. Привалова Π_p можно сформулировать следующим образом: каково бы ни было $0 < p < +\infty$ производная любой аналитической в D функции из класса Π_p принадлежит классу Π_p .

Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова (см. [6]) доказали неинвариантность класса И.И. Привалова относительно оператора дифференциация: в классах И.И. Привалова $\Pi_p, 0 < p < +\infty$, гипотеза Блоха-Невалинны неверна, при этом если $f(z) \neq 0, z \in D$, то $f' \in S_p(w, D)$.

Ф.А. Шамоян, И.С. Курсина (см. [7]) установили инвариантность весовых плоских классов И.И. Привалова $S_p(\omega, D)$ относительно оператора дифференцирования для довольно общих весовых функций ω , получено полное описание таких весов:

Пусть $\omega \in S$, где S – множество всех положительных функций из $L^1(0; 1)$, для которых существуют числа $m_\omega > 0$, $M_\omega > 0$, $q_\omega \in (0; 1)$ такие, что $m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$ при $r \in (0; 1)$, $\lambda \in [q_\omega; 1]$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) класс $S_p(\omega, D)$, $0 < p < +\infty$, инвариантен относительно оператора дифференцирования $D(f)(z) = f'(z)$;

б)
$$\int_0^1 \omega(t) \ln^p \frac{1}{t} dt < +\infty.$$

2. ФОРМУЛИРОВКА ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В связи с результатами работ [3], [6] естественно возникает вопрос описания наименьшего весового пространства X аналитических в круге D функций, для которых из условия $f \in \Pi_p$ следует $f' \in X$.

В первой части этой работы, используя методы работы [7], мы докажем следующее утверждение:

Теорема 1. Для того, чтобы из условия $f \in \Pi_p$, $0 < p < +\infty$, следовало $f^{(n)} \in S_p(\omega, D)$, $n \in \mathbb{N}$, $0 < p < +\infty$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_0^1 \omega(1-r) \left(\ln \frac{1}{1-r} \right)^p dr < +\infty.$$

Учитывая вышеуказанные результаты для единичного круга D , возникает задача о распространении данных утверждений на случай областей комплексной плоскости \mathbb{C} , отличных от D .

Пусть G – некоторая область на комплексной плоскости \mathbb{C} , ∂G – ее граница; $\rho(\zeta, \partial G)$ – евклидово расстояние от точки ζ до границы ∂G ; $H(G)$ – множество всех аналитических функций в G .

В дальнейшем нам также потребуется весовая функция, определенная на всей полуоси $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty)$: пусть ω – монотонно убывающая, непрерывная функция на \mathbb{R}_+ , удовлетворяющая условиям: существуют числа $m_\omega > 0$, $M_\omega > 0$, $q_\omega \in (0; 1)$: $m_\omega \leq \frac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$ при $r \in (0; +\infty)$, $\lambda \in [q_\omega; 1]$.

Далее рассмотрим классы функций следующего вида:

$$S_p(\omega, G) = \left\{ f \in H(G) : \int_G \omega \left(\frac{1}{\rho(\zeta, \partial G)} \right) (\ln^+ |f(\zeta)|)^p dm_2(\zeta) < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$; m_2 – плоская мера Лебега на G .

Оказывается, утверждения, аналогичные вышеуказанным, можно сформулировать для всех ограниченных областей:

Теорема 2. Пусть ω — вышеуказанная весовая функция; G — некоторая ограниченная область на комплексной плоскости \mathbb{C} , причем

$$\int_G \omega \left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right)^p + 1 \right) dm_2(z) < +\infty.$$

Тогда класс $S_p(\omega, G)$ инвариантен относительно оператора дифференцирования при произвольном $0 < p < +\infty$.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Докажем теорему 1 по методу, примененному в работе [7] (см. доказательство теоремы 1 данной работы).

Доказательство. Сначала заметим, что если $f \in \Pi_p$, то

$$\ln^+ |f(re^{i\varphi})| \lesssim \frac{1}{(1-r)^{1/p}}. \tag{1}$$

Оценка (1) при $1 \leq p < +\infty$ сразу следует из неравенства Гельдера и из следующих рассуждений.

Поскольку $(\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p$ является субгармонической функцией, то

$$(\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2 - r^2) (\ln^+ |f(Re^{i\theta})|)^p}{R^2 - 2rR \cos(\theta - \varphi) + r^2} d\theta$$

при всех $0 \leq r < R < 1$.

Поэтому, так как $\frac{2(R-r)}{(R-r)^2} \lesssim \frac{2}{(R-r)}$, то

$$(\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p \leq \sup_{0 < R < 1} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(Re^{i\theta})|)^p d\theta.$$

Теперь, положив $R = \frac{r+1}{2}$, получим нужную оценку.

Если $0 < p < 1$, то воспользуемся известной теоремой Феффермана-Стейна (см. [8]), согласно которой

$$(\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p \leq \frac{A(p)}{(1-|z|)^2} \int_{K_{\frac{1}{2}}(z)} (\ln^+ |f(\zeta)|)^p dm_2(\zeta), \tag{2}$$

где $K_{\frac{1}{2}}(z) = \left\{ \zeta : |\zeta - z| \leq \frac{1}{2}(1 - |z|) \right\}$.

Теперь учтем, что

$$K_{\frac{1}{2}}(z) \subset \tilde{K}_{\frac{1}{2}}(z) = \left\{ \zeta : |z| - \frac{1}{2}(1 - |z|) \leq |\zeta| \leq |z| + \frac{1}{2}(1 - |z|) \right\}.$$

Поэтому из (2) получаем

$$(\ln^+ |f(z)|)^p \lesssim \frac{1}{1-|z|} \sup_{0 < \rho < 1} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(\rho e^{i\theta})|)^p d\theta.$$

То есть оценка $\ln^+ |f(z)| \lesssim \frac{1}{(1-|z|)^{1/p}}$ справедлива при всех $z \in D$, $0 < p < +\infty$.

Теперь из этой оценки точно таким же образом, как и в [7], получим

$$\begin{aligned} & \int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} \omega(1-r) (\ln^+ |f'(re^{i\varphi})|)^p r dr d\varphi \lesssim \\ & \lesssim \sup_{0 < r < 1} \int_{-\pi}^{\pi} (\ln^+ |f(re^{i\varphi})|)^p d\varphi + \int_0^1 \omega(1-r) \left(\ln \frac{1}{1-r} \right)^p dr. \end{aligned}$$

Из данной оценки непосредственно следует достаточность условия теоремы.

Перейдем к доказательству необходимости условия теоремы. Снова применим методику работы [7]. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{\lambda k(\alpha-1)} z^{2^{\lambda k}},$$

где λ — натуральное число, $0 < \alpha < 1$.

Ясно, что $f \in H^\infty(D)$, значит, $f \in \Pi_p$ при всех $0 < p < +\infty$.

Снова таким же образом, как в работе [7], устанавливается, что если $r_n = \exp\left(-\frac{1}{2^{\lambda n}}\right)$, то функция $f(z)$ удовлетворяет оценке

$$(\ln |f'(r_n e^{i\theta})|)^p \geq c \ln^p \frac{1}{1-r_n},$$

где $\theta \in [0; 2\pi]$, $n = 1, 2, \dots$, c — некоторое положительное число.

Повторяя рассуждения вышеуказанной работы, получим, что

$$\int_0^1 \omega(1-r) \ln^p \frac{1}{1-r} dr < +\infty.$$

□

Перейдем к доказательству теоремы 2 и отметим, что в нем существенную роль играет классическая теорема Уитни:

Теорема А (разложение Уитни). Пусть G — некоторое открытое связное множество на комплексной плоскости \mathbb{C} , тогда существует такой набор квадратов $P = \{Q_k\}_{k=1}^{+\infty}$, что $\bigcup_k Q_k = G$, причем

- $\overset{\circ}{Q}_k \cap \overset{\circ}{Q}_m = \emptyset$, $k \neq m$;
- $c_1 \text{diam}(Q_k) \leq \rho(Q_k, \partial G) \leq c_2 \text{diam}(Q_k)$, константы c_1, c_2 не зависят от G ;
- для произвольного $s \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq s < 5/4$, квадраты $\{Q_k^*(s)\}_{k=1}^{+\infty}$, имеющие те же центры, что и квадраты $\{Q_k\}_{k=1}^{+\infty}$ соответственно, но растянутые в s раз, покрывают множество G конечнократно.

Доказательство теоремы 2 проведем по схеме доказательства теоремы 1 из работы [9].

Доказательство. Воспользуемся теоремой А. Пусть $P = \{Q_1, Q_2, \dots, Q_k, \dots\}$ — вышеуказанный набор квадратов, $G = \bigcup_k Q_k$; учтем неравенства теоремы А и заметим, что $\omega\left(\frac{1}{\rho(\zeta_1, \partial G)}\right) \sim \omega\left(\frac{1}{\rho(\zeta_2, \partial G)}\right)$ для произвольных точек $\zeta_1, \zeta_2 \in Q_k$.

Имеем:

$$\begin{aligned} I &= \int_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\ln^+ |f^{(n)}(z)|\right)^p dm_2(z) = \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{Q_k} \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\ln^+ |f^{(n)}(z)|\right)^p dm_2(z) \leq \\ &\leq c_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \max_{z \in Q_k} \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\ln^+ |f^{(n)}(z)|\right)^p m_2(Q_k) \leq \\ &\leq c_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(z_k, \partial G)}\right) \left(\ln^+ |f^{(n)}(z_k)|\right)^p \rho^2(z_k, \partial G), z_k \in \partial Q_k. \end{aligned} \tag{3}$$

Пусть теперь Q_k^* — квадрат, имеющий тот же центр, что и Q_k , но растянутый в $(1 + \varepsilon)$ раз, $0 < \varepsilon < \frac{1}{4}$, $Q_k \subset Q_k^*$. Заметим, что система $\{Q_k^*\}$ покрывает область G конечнократно. Пусть $0 < \delta = \frac{1}{4}\rho(Q_k, \partial Q_k^*)$. Тогда можно утверждать, что для произвольного $z_k \in Q_k$, круг $K_\delta(z_k) = \{z : |z - z_k| < \delta\}$ полностью включается в квадрат Q_k^* .

Далее, по формуле Коши $f^{(n)}(z_k) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial K_\delta(z_k)} \frac{f(z)}{(z - z_k)^{n+1}} dz$, а значит,

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{c(n)}{\delta^n} \max_{z \in \partial K_\delta(z_k)} |f(z)| \leq \frac{c(n)}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)} |f(\tilde{z}_k)|, \tilde{z}_k \in \partial K_\delta(z_k).$$

Тогда $\ln^+ |f^{(n)}(z)| \leq \ln^+ c(n) + \ln^+ \frac{1}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)} + \ln^+ |f(\tilde{z}_k)|, \tilde{z}_k \in \partial K_\delta(z_k)$.

Отметим, что в условиях теоремы $\rho(z_k, \partial G)$ эквивалентно $\rho(\tilde{z}_k, \partial G)$. Действительно, из теоремы А получаем:

$$c_3 \text{diam}(Q_k) \leq \rho(z_k, \partial G) \leq c_4 \text{diam}(Q_k),$$

$$c_5 \text{diam}(Q_k^*) \leq \rho(\tilde{z}_k, \partial G) \leq c_6 \text{diam}(Q_k^*),$$

но по нашему построению $\text{diam}(Q_k) < \text{diam}(Q_k^*) < 1\frac{1}{4}\text{diam}(Q_k)$, а значит,

$$c_7 \rho(\tilde{z}_k, \partial G) \leq \rho(z_k, \partial G) \leq c_8 \rho(\tilde{z}_k, \partial G). \tag{4}$$

Аналогично можно показать, что $\rho(Q_k, \partial Q_k^*)$ эквивалентно $\rho(z_k, \partial G)$.

Тогда из (3) с учетом (4) получаем

$$I \leq c_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(z_k, \partial G)}\right) \left(\ln^+ |f^{(n)}(z_k)|\right)^p \rho^2(z_k, \partial G) \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq c_9 \sum_{k=1}^{+\infty} \omega \left(\frac{1}{\rho(\tilde{z}_k, \partial G)} \right) \rho^2(\tilde{z}_k, \partial G) \left(\ln^+ c(n) + \ln^+ \frac{1}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)} + \ln^+ |f(\tilde{z}_k)| \right)^p \leq \\
&\leq c_{10} \sum_{k=1}^{+\infty} \omega \left(\frac{1}{\rho(\tilde{z}_k, \partial G)} \right) \rho^2(\tilde{z}_k, \partial G) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)} \right)^p + 1 \right) + \\
&\quad + c_{11} \sum_{k=1}^{+\infty} \omega \left(\frac{1}{\rho(\tilde{z}_k, \partial G)} \right) \rho^2(\tilde{z}_k, \partial G) (\ln^+ |f(\tilde{z}_k)|)^p. \tag{5}
\end{aligned}$$

Пусть теперь также $0 < \delta' = \frac{1}{8} \rho(Q_k, \partial Q_k^*)$, $K_{\delta'}(\tilde{z}_k) = \{z : |z - \tilde{z}_k| < \delta'\}$, значит, $K_{\delta'}(\tilde{z}_k) \subset Q_k^*$.

Учитывая субгармоничность функции $(\ln^+ |f|)^p$ при $1 \leq p < +\infty$ и теорему Фейффермана-Стейна при $0 < p < 1$, как и выше, получим:

$$\begin{aligned}
(\ln^+ |f(\tilde{z}_k)|)^p &\leq \frac{A}{\delta'^2} \int_{K_{\delta'}(\tilde{z}_k)} (\ln^+ |f(z)|)^p dm_2(z) \leq \\
&\leq \frac{c_{12}}{\rho^2(\tilde{z}_k, \partial G)} \int_{Q_k^*} (\ln^+ |f(z)|)^p dm_2(z).
\end{aligned}$$

Аналогично,

$$\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)} \right)^p + 1 \leq \frac{c_{13}}{\rho^2(\tilde{z}_k, \partial G)} \int_{Q_k^*} \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)} \right)^p + 1 \right) dm_2(z).$$

Окончательно с учетом (5), получаем

$$\begin{aligned}
&\int_G \omega \left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right) (\ln^+ |f^{(n)}(z)|)^p dm_2(z) \leq \\
&\leq c_{14} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{Q_k^*} \omega \left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)} \right)^p + 1 \right) dm_2(z) + \\
&\quad + c_{15} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{Q_k^*} \omega \left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right) (\ln^+ |f(z)|)^p dm_2(z) \leq \\
&\leq c_{16} \int_G \omega \left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)} \right)^p + 1 \right) dm_2(z) + \\
&\quad + c_{17} \int_G \omega \left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right) (\ln^+ |f(z)|)^p dm_2(z).
\end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что система $\{Q_k^*\}$ покрывает множество G конечнократно.

Таким образом, если

$$\int_G \omega \left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)} \right)^p + 1 \right) dm_2(z) < +\infty, \tag{6}$$

то

$$\int_G \omega \left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)} \right) \left(\ln^+ |f^{(n)}(z)| \right)^p dm_2(z) < +\infty,$$

и класс $S_p(\omega, G)$ инвариантен относительно оператора дифференцирования. \square

Замечание. Отметим, что условие (6) является необходимым, если $G = D$ (см. [7] и теорему 1).

REFERENCES

- [1] R. Nevanlinna, *Le théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes*, Gauthiers-Villars, Paris, 1929. JFM 55.0773.03
- [2] O. Frostman, *Sur les produits des Blaschke*, Fysiogr. Sällsk. Lund Förh., **12**:15 (1942), 169–182. Zbl 0061.15112
- [3] F.A. Shamoyan, V.A. Bednazh, V.A. Kustova, *Blaschke product in Privalov classes*, Sib. Electron. Math. Izv., **18**:1 (2021), 168–175. Zbl 1462.30116
- [4] D. Campbell, G. Wickes, *The Bloch-Nevanlinna conjecture revisited*, Bull. Aust. Math. Soc., **18**:3 (1978), 447–453. Zbl 0373.30031
- [5] S.V. Shvedenko, *Hardy classes and spaces of analytic functions in the unit circle, polycircle and ball, connected with them*, Itogi Nauki Tekh., Ser. Mat. Anal., **23** (1985), 3–124. Zbl 0603.32004
- [6] E.G. Rodikova, F.A. Shamoyan, *On the differentiation in the Privalov classes*, J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys., **13**:5 (2020), 622–630. Zbl 7334120
- [7] F.A. Shamoyan, I.S. Kursina, *On invariance of some classes of holomorphic functions under integrodifferential operators*, J. Math. Sci., New York, **107**:4 (2001), 4097–4107. Zbl 1134.30326
- [8] C. Fefferman, E. Stein. *H^p spaces of several variables*, Acta Math., **129** (1972), 137–193. Zbl 0257.46078
- [9] N.M. Tkachenko, F.A. Shamoyan, *The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundar*, J. Math. Phys., Anal. Geom., **5**:2 (2009), 192–210. Zbl 1193.30053

FAIZO AGITOVICH SHAMOYAN
 SARATOV STATE UNIVERSITY,
 ASTRAKHANSKAYA ST., 83,
 410012, SARATOV, RUSSIA
Email address: shamoyanfa@yandex.ru

NATALIA MIKHAILOVNA MAKHINA
 BRYANSK STATE UNIVERSITY,
 BEZHITSKAYA ST., 14,
 241036, BRYANSK, RUSSIA
Email address: mahinann@yandex.ru