S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.53
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 30E05, 30H99

НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРАХ В КЛАССАХ И.И. ПРИВАЛОВА

Ф.А. ШАМОЯН, Н.М. МАХИНА

Abstract. In this paper we consider the invariance of Privalov classes with respect to the differentiation operator. We prof a necessary and sufficient condition for the invariance of a plane weighted Privalov classes in the unit disc and we have expanded the indicated results for an any bounded domain on the complex plane.

Keywords: Privalov class, differentiation operator, Whitney decomposition.

1. Введение

Пусть $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, T — граница D; $H(D)$ — множество всех аналитических функций в D.

Пусть также Π_p, $0 < p < +\infty$, — класс И.И. Привалова в D:

$$\Pi_p = \left\{ f \in H(D) : \sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p d\varphi < +\infty \right\},$$

где $\ln^+ |a| = \max(\ln|a|, 0), \forall a \in \mathbb{C}$.

Хорошо известно, $\Pi_1 = N$, где N – класс функций ограниченного вида Р. Неванлинны: функций, аналитических в D, с ограниченной характеристикой

$$T(r, f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| d\varphi, 0 < r < 1.$$

Известная гипотеза Блоха-Невалинны (см. [1]) утверждает, что класс N инвариантен относительно дифференциального оператора: если $f \in N$, то $f' \in N$.

Shamoyan, F.A., Makhina, N.M. Some remarks on differential operators in the classes of I.I. Privalov.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

О. Фростман впервые (см. [2]) построил функцию, а именно, произведение Бляшке, производная которой не принадлежит классу Р. Неванлинны N: $\exists B(z,z_k)\in N : B'(z,z_k)\notin N$.

Возник вопрос о характеризации таких произведений.

Ф.А. Шамоян, В.А. Беднаж, В.А. Кустова получили (см. [3]), в терминах нулей, полную характеризацию тех произведений Бляшке (необходимое и достаточное условие), производная которых принадлежит не только классу N, но и классу Π_p для всех $0<p<+\infty$, а именно, был доказан следующий результат:

Пусть $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность точек из* D*:*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1-|z_k|)<+\infty;$$

E *— множество предельных точек последовательности* $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ *на* T*;* $\left\{e^{i\alpha_k}e^{i\beta_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ *— последовательность дополнительных дуг* E *на* T*. Если*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\ln^q\frac{1}{\beta_k-\alpha_k}<+\infty,$$

где $z_n=r_ne^{i\theta_n}$, $n=1,2,...$, *количество точек в каждом интервале* $(\alpha_k,\beta_k)\,,k=1,2,...$, *равномерно ограничено, то* $B^{(n)}(z,z_k)\in\Pi_p, n\in\mathbb{N}, 0<p<+\infty$.

Обратно, существует последовательность $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}\subset D$*, удовлетворяющая условию Бляшке, такая, что если*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k-\alpha_k)\ln^q\frac{1}{\beta_k-\alpha_k}=+\infty,$$

то $B^{(n)}(z,z_k)\notin\Pi_p, n\in\mathbb{N}, 0<p<+\infty$.

Обзор некоторых результатов, связанных с инвариантностью относительно дифференциальных операторов классов аналитических функций, содержат, например, работы Д. Кэмпбелла, Г. Уикса (см. [4]); С.В. Шведенко (см. [5]).

Обозначим, далее, ооответствующий плоский весовой класс И.И. Привалова, $0<p<+\infty$,

$$S_p(\omega,D)=\left\{f\in H(D):\int_0^1\omega(1-r)\int_{-\pi}^{\pi}\left(\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p d\varphi dr<+\infty\right\}.$$

где $\omega(x), x\in(0;1)$, — положительная непрерывная на $(0;1)$ функция.

Гипотезу Блоха-Неванлинны в классах И.И. Привалова Π_p можно сформулировать следующим образом: каково бы ни было $0<p<+\infty$ производная любой аналитической в D функции из класса Π_p принадлежит классу Π_p.

Ф.А. Шамоян, Е.Г. Родикова (см. [6]) доказали неинвариантность класса И.И. Привалова относительно оператора дифференциация: в классах И.И. Привалова $\Pi_p, 0<p<+\infty$, гипотеза Блоха-Неванлинны неверна, при этом если $f(z)\neq 0, z\in D$, то $f'\in S_p(w,D)$.

Ф.А. Шамоян, И.С. Курсина (см. [7]) установили инвариантность весовых плоских классов И.И. Привалова $S_p(\omega,D)$ относительно оператора дифференцирования для довольно общих весовых функций ω, получено полное описание таких весов:

Пусть $\omega \in S$*, где* S *– множество всех положительных функций из* $L^1(0;1)$*, для которых существуют числа* $m_\omega > 0,\ M_\omega > 0, q_\omega \in (0;1)$ *такие, что* $m_\omega \leq \dfrac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$ *при* $r \in (0;1)$, $\lambda \in [q_\omega;1]$.

Тогда следующие утверждения равносильны:

а) класс $S_p(\omega, D)$, $0 < p < +\infty$, *инвариантен относительно оператора дифференцирования* $D(f)(z) = f'(z)$*;*

б) $\displaystyle\int\limits_0^1 \omega(t) \ln^p \frac{1}{t} dt < +\infty.$

2. Формулировка основных результатов

В связи с результатами работ [3], [6] естественно возникает вопрос описания наименьшего весового пространства X аналитических в круге D функций, для которых из условия $f \in \Pi_p$ следует $f' \in X$.

В первой части этой работы, используя методы работы [7], мы докажем следующее утверждение:

Теорема 1. *Для того, чтобы из условия* $f \in \Pi_p$*,* $0 < p < +\infty$*, следовало* $f^{(n)} \in S_p(\omega, D), n \in \mathbb{N}, 0 < p < +\infty$*, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int\limits_0^1 \omega\left(1-r\right)\left(\ln\frac{1}{1-r}\right)^p dr < +\infty.$$

Учитывая вышеуказанные результаты для единичного круга D, возникает задача о распространении данных утверждений на случай областей комплексной плоскости $\mathbb{C}$, отличных от D.

Пусть G — некоторая область на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, ∂G — ее граница; $\rho(\zeta, \partial G)$ — эвклидово расстояние от точки ζ до границы ∂G; $H(G)$ — множество всех аналитических функций в G.

В дальнейшем нам также потребуется весовая функция, определенная на всей полуоси $\mathbb{R}_+ = (0;+\infty)$: пусть ω — монотонно убывающая, непрерывная функция на $\mathbb{R}_+$, удовлетворяющая условиям: существуют числа $m_\omega > 0$, $M_\omega > 0, q_\omega \in (0;1) : m_\omega \leq \dfrac{\omega(\lambda r)}{\omega(r)} \leq M_\omega$ при $r \in (0;+\infty)$, $\lambda \in [q_\omega;1]$.

Далее рассмотрим классы функций следующего вида:

$$S_p(\omega, G) = \left\{ f \in H(G) : \int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(\zeta, \partial G)}\right)\left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p dm_2(\zeta) < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$; m_2 — плоская мера Лебега на G.

Оказывается, утверждения, аналогичные вышеуказанным, можно сформулировать для всех ограниченных областей:

Теорема 2. *Пусть* ω *— вышеуказанная весовая функция;* G *— некоторая ограниченная область на комплексной плоскости* $\mathbb{C}$*, причем*

$$\int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right)\left(\left(\ln^+\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z) < +\infty.$$

Тогда класс $S_p(\omega, G)$ инвариантен относительно оператора дифференцирования при произвольном $0 < p < +\infty$.

3. Доказательство основных результатов

Докажем теорему 1 по методу, примененному в работе [7] (см. доказательство теоремы 1 данной работы).

Доказательство. Сначала заметим, что если $f \in \Pi_p$, то

$$\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right| \lesssim \frac{1}{(1-r)^{1/p}}. \tag{1}$$

Оценка (1) при $1 \le p < +\infty$ сразу следует из неравенства Гельдера и из следующих рассуждений.

Поскольку $\left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p$ является субгармонической функцией, то

$$\left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{(R^2-r^2)\left(\ln^+ \left|f(Re^{i\theta})\right|\right)^p}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + r^2} d\theta$$

при всех $0 \le r < R < 1$.

Поэтому, так как $\dfrac{2(R-r)}{(R-r)^2} \lesssim \dfrac{2}{(R-r)}$, то

$$\left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p \le \sup_{0<R<1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left|f(Re^{i\theta})\right|\right)^p d\theta.$$

Теперь, положив $R = \dfrac{r+1}{2}$, получим нужную оценку.

Если $0 < p < 1$, то воспользуемся известной теоремой Фефферманa-Стейна (см. [8]), согласно которой

$$\left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p \le \frac{A(p)}{(1-|z|)^2} \int\limits_{K_{\frac{1}{2}}(z)} \left(\ln^+ |f(\zeta)|\right)^p dm_2(\zeta), \tag{2}$$

где $K_{\frac{1}{2}}(z) = \left\{\zeta : |\zeta - z| \le \dfrac{1}{2}(1-|z|)\right\}$.

Теперь учтем, что $K_{\frac{1}{2}}(z) \subset \tilde{K}_{\frac{1}{2}}(z) = \left\{\zeta : |z| - \dfrac{1}{2}(1-|z|) \le |\zeta| \le |z| + \dfrac{1}{2}(1-|z|)\right\}$.

Поэтому из (2) получаем

$$\left(\ln^+ |f(z)|\right)^p \lesssim \frac{1}{1-|z|} \sup_{0<\rho<1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left|f(\rho e^{i\theta})\right|\right)^p d\theta.$$

То есть оценка $\ln^+ |f(z)| \lesssim \dfrac{1}{(1-|z|)^{1/p}}$ справедлива при всех $z \in D$, $0 < p < +\infty$.

Теперь из этой оценки точно таким же образом, как и в [7], получим

$$\int\limits_0^1 \int\limits_{-\pi}^{\pi} \omega(1-r) \left(\ln^+ \left|f'(re^{i\varphi}\right|\right)^p r dr d\varphi \lesssim$$

$$\lesssim \sup_{0<r<1} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left(\ln^+ \left|f(re^{i\varphi})\right|\right)^p d\varphi + \int\limits_0^1 \omega(1-r) \left(\ln \frac{1}{1-r}\right)^p dr.$$

Из данной оценки непосредственно следует достаточность условия теоремы.

Перейдем к доказательству необходимости условия теоремы. Снова применим методику работы [7]. Пусть

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{\lambda k(\alpha-1)} z^{2^{\lambda k}},$$

где λ — натуральное число, $0 < \alpha < 1$.

Ясно, что $f \in H^\infty(D)$, значит, $f \in \Pi_p$ при всех $0 < p < +\infty$.

Снова таким же образом, как в работе [7], устанавливается, что если $r_n = \exp\left(-\frac{1}{2^{\lambda_n}}\right)$, то функция $f(z)$ удовлетворяет оценке

$$\left(\ln \left|f'(r_n e^{i\theta})\right|\right)^p \geq c \ln^p \frac{1}{1-r_n},$$

где $\theta \in [0; 2\pi]\,, n = 1, 2, ...,$ c — некоторое положительное число.

Повторяя рассуждения вышеуказанной работы, получим, что

$$\int\limits_0^1 \omega\,(1-r) \ln^p \frac{1}{1-r} dr < +\infty.$$

$\square$

Перейдем к доказательству теоремы 2 и отметим, что в нем существенную роль играет классическая теорема Уитни:

Теорема A (разложение Уитни). *Пусть G — некоторое открытое связное множество на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, тогда существует такой набор квадратов $\mathrm{P} = \{Q_k\}_{k=1}^{+\infty}$, что $\bigcup\limits_k Q_k = G$, причем*

а) $\overset{o}{Q}_k \cap \overset{o}{Q}_m = \emptyset, k \neq m$;

б) $c_1 diam(Q_k) \leq \rho(Q_k, \partial G) \leq c_2 diam(Q_k)$, константы c_1, c_2 не зависят от G;

в) для произвольного $s \in \mathbb{R}_+, 0 \leq s < 5/4$, квадраты $\{Q_k^*(s)\}_{k=1}^{+\infty}$, имеющие те же центры, что и квадраты $\{Q_k\}_{k=1}^{+\infty}$ соответственно, но растянутые в s раз, покрывают множество G конечнократно.

Доказательство теоремы 2 проведем по схеме доказательства теоремы 1 из работы [9].

Доказательство. Воспользуемся теоремой A. Пусть $\mathrm{P} = \{Q_1, Q_2, \ldots, Q_k, \ldots\}$ — вышеуказанный набор квадратов, $G = \bigcup\limits_k Q_k$; учтем неравенства теоремы A и заметим, что $\omega\left(\frac{1}{\rho(\zeta_1, \partial G)}\right) \sim \omega\left(\frac{1}{\rho(\zeta_2, \partial G)}\right)$ для произвольных точек $\zeta_1, \zeta_2 \in Q_k$.

Имеем:

$$I = \int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\ln^+ \left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p dm_2(z) =$$

$$= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{Q_k} \omega\left(\frac{1}{\rho(z,\partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p dm_2(z) \le$$

$$\le c_1 \sum_{k=1}^{+\infty} \max_{z\in Q_k} \omega\left(\frac{1}{\rho(z,\partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p m_2(Q_k) \le$$

$$\le c_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(z_k,\partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z_k)\right|\right)^p \rho^2(z_k,\partial G), z_k\in\partial Q_k. \tag{3}$$

Пусть теперь Q_k^* – квадрат, имеющий тот же центр, что и Q_k, но растянутый в $(1+\varepsilon)$ раз, $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$, $Q_k\subset Q_k^*$. Заметим, что система $\{Q_k^*\}$ покрывает область G конечнократно. Пусть $0<\delta=\frac{1}{4}\rho(Q_k,\partial Q_k^*)$. Тогда можно утверждать, что для произвольного $z_k\in Q_k$, круг $K_\delta(z_k)=\{z:|z-z_k|<\delta\}$ полностью включается в квадрат Q_k^*.

Далее, по формуле Коши $f^{(n)}(z_k)=\frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\partial K_\delta(z_k)}\frac{f(z)}{(z-z_k)^{n+1}}dz$, а значит,

$$\left|f^{(n)}(z)\right| \le \frac{c(n)}{\delta^n}\max_{z\in\partial K_\delta(z_k)}|f(z)| \le \frac{c(n)}{\rho^n(\tilde z_k,\partial G)}\left|f(\tilde z_k)\right|, \tilde z_k\in\partial K_\delta(z_k).$$

Тогда $\ln^+\left|f^{(n)}(z)\right| \le \ln^+ c(n) + \ln^+\frac{1}{\rho^n(\tilde z_k,\partial G)} + \ln^+\left|f(\tilde z_k)\right|, \tilde z_k\in\partial K_\delta(z_k)$.

Отметим, что в условиях теоремы $\rho(z_k,\partial G)$ эквивалентно $\rho(\tilde z_k,\partial G)$. Действительно, из теоремы A получаем:

$$c_3 diam(Q_k) \le \rho(z_k,\partial G) \le c_4 diam(Q_k),$$

$$c_5 diam(Q_k^*) \le \rho(\tilde z_k,\partial G) \le c_6 diam(Q_k^*),$$

но по нашему построению $diam(Q_k) < diam(Q_k^*) < 1\frac{1}{4}diam(Q_k)$, а значит,

$$c_7\rho(\tilde z_k,\partial G) \le \rho(z_k,\partial G) \le c_8\rho(\tilde z_k,\partial G). \tag{4}$$

Аналогично можно показать, что $\rho(Q_k,\partial Q_k^*)$ эквивалентно $\rho(z_k,\partial G)$.

Тогда из (3) с учетом (4) получаем

$$I \le c_2 \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(z_k,\partial G)}\right)\left(\ln^+\left|f^{(n)}(z_k)\right|\right)^p \rho^2(z_k,\partial G) \le$$

$$\le c_9 \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(\tilde z_k,\partial G)}\right)\rho^2(\tilde z_k,\partial G)\left(\ln^+ c(n) + \ln^+\frac{1}{\rho^n(\tilde z_k,\partial G)} + \ln^+\left|f(\tilde z_k)\right|\right)^p \le$$

$$\le c_{10} \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(\tilde z_k,\partial G)}\right)\rho^2(\tilde z_k,\partial G)\left(\left(\ln^+\frac{1}{\rho^n(\tilde z_k,\partial G)}\right)^p + 1\right) +$$

$$+ c_{11} \sum_{k=1}^{+\infty} \omega\left(\frac{1}{\rho(\tilde z_k,\partial G)}\right)\rho^2(\tilde z_k,\partial G)\left(\ln^+\left|f(\tilde z_k)\right|\right)^p. \tag{5}$$

Пусть теперь также $0<\delta'=\frac{1}{8}\rho(Q_k,\partial Q_k^*)$, $K_{\delta'}(\tilde z_k)=\{z:|z-\tilde z_k|<\delta'\}$, значит, $K_{\delta'}(\tilde z_k)\subset Q_k^*$.

Учитывая субгармоничность функции $(\ln^+|f|)^p$ при $1 \le p < +\infty$ и теорему Фефрермана-Стейна при $0 < p < 1$, как и выше, получим:

$$\left(\ln^+|f(\tilde{z}_k)|\right)^p \le \frac{A}{\delta'^2} \int\limits_{K_{\delta'}(\tilde{z}_k)} \left(\ln^+|f(z)|\right)^p dm_2(z) \le$$

$$\le \frac{c_{12}}{\rho^2(\tilde{z}_k, \partial G)} \int\limits_{Q_k^*} \left(\ln^+|f(z)|\right)^p dm_2(z).$$

Аналогично,

$$\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(\tilde{z}_k, \partial G)}\right)^p + 1 \le \frac{c_{13}}{\rho^2(\tilde{z}_k, \partial G)} \int\limits_{Q_k^*} \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z).$$

Окончательно с учетом (5), получаем

$$\int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G}\right) \left(\ln^+ \left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p dm_2(z) \le$$

$$\le c_{14} \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{Q_k^*} \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z) +$$

$$+ c_{15} \sum_{k=1}^{+\infty} \int\limits_{Q_k^*} \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\ln^+|f(z)|\right)^p dm_2(z) \le$$

$$\le c_{16} \int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z) +$$

$$+ c_{17} \int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\ln^+|f(z)|\right)^p dm_2(z).$$

В последнем неравенстве мы воспользовались тем, что система $\{Q_k^*\}$ покрывает множество G конечнократно.

Таким образом, если

$$\int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G)}\right) \left(\left(\ln^+ \frac{1}{\rho^n(z, \partial G)}\right)^p + 1\right) dm_2(z) < +\infty, \tag{6}$$

то

$$\int\limits_G \omega\left(\frac{1}{\rho(z, \partial G}\right) \left(\ln^+ \left|f^{(n)}(z)\right|\right)^p dm_2(z) < +\infty,$$

и класс $S_p(\omega, G)$ инвариантен относительно оператора дифференцирования. □

Замечание. Отметим, что условие (6) является необходимым, если $G = D$ (см. [7] и теорему 1).

References

[1] R. Nevanlinna, *Le theoreme de Picard-Borel et la theorie des fonctions meromorphes*, Paris, Gauthiers-Villars, 1929.

[2] O. Frostman, *Sur les produits des Blaschke*, Kungl. Fysiografiska Sallskapets i Lund Forhandlingar, **12**:15 (1942), 169—182.

[3] F.A. Shamoyan, V.A. Bednazh, V.A. Kustova, *Blaschke product in Privalov classes*, Sib. Elect. Math. Reports, **18**:1 (2021), 168–175.

[4] D. Campbell, G. Wickes, *The Bloch-Nevanlinna conjecture revisited*, Bull. Austral. Math. Soc., **18**:3 (1978), 447–453.

[5] S.V. Shvedenko, *Hardy classes and the spaces of analytic functions associated with them in the unit disc, polydisc, and ball*, Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Mat. Anal., **23** (1985), 3-–124.

[6] E.G. Rodikova, F.A. Shamoyan, *On the differentiation in the Privalov classes*, J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys., **13**:5 (2020), 622–630.

[7] F.A. Shamoyan, I.S. Kursina, *On the invariance of some classes of holomorphic functions under integral and differential operators*, J. Math. Sci., **107**:4 (2001), 4097—4107.

[8] C. Fefferman, E. Stein. *Hp spaces of several variables*, Acta. Math., **129** (1972), 137-–193.

[9] N.M. Tkachenko, F.A. Shamoyan, *The Hardy-Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundar*, J. of Math. Phys., An., Geom, **23**:2 (2009), 192–210.

Faizo Agitovich Shamoyan
Saratov State University,
Astrakhanskaya st., 83,
410012, Saratov, Russia
E-mail address: shamoyanfa@yandex.ru

Natalia Mikhailovna Makhina
Bryansk State University,
Bezhitskaya st., 14,
241036, Bryansk, Russia
E-mail address: mahinanm@yandex.ru