S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.953+517.958:624.27

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35G31

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ЖЕСТКОСТИ В УРАВНЕНИИ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

У.Д.Дурдиев

Abstract. This article considers the initial-boundary value problem of forced vibrations of a beam of finite length and the inverse problem of determining the stiffness coefficient depending on x. With the help of eigenvalues and eigenfunctions of the beam oscillation operator, the problems are reduced to integral equations. We apply the Schauder contraction mapping principle to these equations and prove existence and uniqueness theorems for solutions.

Keywords: Forced vibrations, stiffness coefficient, eigenvalues and eigenfunctions, Schauder principle, operator, existence and uniqueness theorems.

1. Введение

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин имеют важные приложения в проектировании конструкций, теории устойчивости вращающихся валов, теории колебаний кораблей и трубопроводов и приводят к дифференциальным уравнениям порядков выше второго [1], [2]. В последние годы возрос интерес к исследованию линейных и нелинейных начально-краевых задач для уравнения колебаний балки [3]-[8]. В работе [9] получено аналитическое решение дифференциального уравнения поперечных колебаний кусочно-однородной балки в частотной области для любого вида краевых условий.

Обратные задачи математической физики изучены достаточно широко. Методика доказательств локальных теорем существования и единственности решения обратных динамических задач, теорем единственности и условной устойчивости, а также численные подходы решения задач рассмотрены в работах

Durdiev, U.D., The inverse problem of finding the stiffness coefficient in the equation of forced vibrations of the beam.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

[10]-[19] и др. В работе [20] рассматривается задача определения коэффициента жесткости зависящего от времени в уравнении поперечных колебаний балки.

В данной статье рассматривается начально-краевая задача о поперечных колебаний балки конечной длины и обратная задача определения коэффициента жесткости, зависящего от x.

Рассмотрим уравнение неоднородного колебания балки

$$\rho S u_{tt} + EJu_{xxxx} + \Lambda(x)u = \Gamma(x,t),$$

где ρ – линейная плотность балки, S – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости материала, J – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, $\Lambda(x)$ – коэффициент жесткости основания (коэффициент постели), $\Gamma(x,t)$ – внешняя сила.

Это уравнение можно записать в виде:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} + L(x)u = G(x,t), \tag{1}$$

где $a^2 = EJ/\rho S$, $L(x) = \Lambda(x)/\rho S$ и $G(x,t) = \Gamma(x,t)/\rho S$ и

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D}). \tag{2}$$

Уравнение (1) рассматривается в области

$$D = \{(x,t) :\ 0 < x < l,\ 0 < t < T\},$$

где l – длина балки, T – временной интервал, с начальными

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in [0,l] \tag{3}$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} u(0,t) = u_x(0,t) = 0, &\quad \text{(заделка)}, \\ u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0, &\quad \text{(свободный конец)} \quad 0 \le t \le T. \end{aligned} \tag{4}$$

В прямой задаче требуется определить функцию $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D)$, удовлетворяющую равенствам (1)-(4), при заданных чисел a, l, T и достаточно гладких функций $L(x)$, $G(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$.

Обратная задача: найти коэффициент $L(x)$, если относительно решения прямой задачи (1)-(4) известна дополнительная информация

$$H(x) = \int_0^T u(x,t)h(t)dt, \tag{5}$$

где заданная функция $h(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$h(t) \in C^2(0,T), \quad h(0) = h(T) = h'(0) = h'(T) = 0. \tag{6}$$

2. Исследование прямой задачи

В уравнении (1) перенося слагаемое $L(x)u$ в правую часть введем обозначение $F(x,t) = G(x,t) - L(x)u$. Тогда получим:

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = F(x,t) \tag{7}$$

Для решения уравнения (7) с начальными (3) и граничными условиями (4) используем метод разделения переменных, представив $u(x,t) = X(x)T(t)$ и получаем спектральную задачу относительно $X(x)$. Эта задача полностью исследована в работе [8]. Приведем необходимые сведения из этой работы. Найдены

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)Y_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)Y_n(x). \tag{8}$$

$\lambda_n = -d_n^4$ – собственные значения спектральной задачи, где

$$d_n = \frac{\pi}{l}\left(n - \frac{1}{2} + (-1)^n\Theta_n\right), \quad \Theta_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$X_n(x) = \begin{cases} a_n ch d_n\left(x - \frac{l}{2}\right) + b_n \sin d_n\left(x - \frac{l}{2}\right), & n = 2k-1, \\ c_n sh d_n\left(x - \frac{l}{2}\right) + f_n \cos d_n\left(x - \frac{l}{2}\right), & n = 2k, \end{cases} \tag{9}$$

– система собственных функций, где

$$a_n = sh^{-1}\left(\frac{d_n l}{2}\right), \quad b_n = \cos^{-1}\left(\frac{d_n l}{2}\right),$$

$$c_n = -ch^{-1}\left(\frac{d_n l}{2}\right), \quad f_n = \sin^{-1}\left(\frac{d_n l}{2}\right).$$

Нормирую эту систему функций (9), получаем

$$Y_n(x) = \frac{X(x)}{\|X(x)\|}, \quad \|X(x)\| = \begin{cases} \sqrt{l} cth\left(\frac{d_n l}{2}\right), & n = 2k-1, \\ \sqrt{l} th\left(\frac{d_n l}{2}\right), & n = 2k, \end{cases} \tag{10}$$

Заметим, что система (10) ортонормирована и полна в пространстве $L_2[0,l]$ и образует в нем ортонормированный базис.

Решение поставленной задачи (1)-(4) будем искать в виде суммы рядов:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)Y_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t)Y_n(x).$$

где

$$u_n(t) = \varphi_n \cos a d_n^2 t + \frac{\psi_n}{a d_n^2} \sin a d_n^2 t,$$

здесь

$$\varphi_n = \int_0^t \varphi(x)Y_n(x)dx, \qquad \psi_n = \int_0^l \psi(x)Y_n(x)dx,$$

$$v_n(t) = \frac{1}{a d_n^2}\int_0^l F_n(s) \sin a d_n^2 (t-s) ds,$$

и

$$F_n(t) = \int_0^l F(x,t)Y_n(x)dx.$$

а $Y_n(x)$ определяется по формуле (10).

Для доказательства единственности решения поставленной задачи воспользуемся следующим утверждением из работы [6].

Теорема 2.1. *Если существует решение начально-граничной задачи* (1)-(4), *то для любого* $t \in [0,T]$ *справлива следующая оценка*

$$\int_0^l (u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + Lu^2)dx \leq \tag{11}$$

$$\leq e^T \left[\int_0^l \left(\psi^2(x) + a^2 \varphi''^2(x) + L(x)\varphi^2(x) \right) dx + \iint_D G^2(x,t)dxdt \right].$$

где функция $L(x) \geq 0$, $x \in [0,l]$.

Обратим внимание, что имеет место соотношение

$$E_0(t) = \frac{1}{2}\int_0^l (\rho S u_t^2 + EJu_{xx}^2 + \Lambda(x)u^2)dx =$$

$$= \frac{1}{\rho S}\frac{1}{2}\int_0^l \left[u_t^2(x,t) + a^2 u_{xx}^2(x,t) + L(x)u^2(x,t) \right] dx = \frac{1}{\rho S} E(t).$$

Доказательство Теоремы 2.1. Рассмотрим тождество

$$u_t L^* u = \frac{1}{2}\left(u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + L(x)u^2 \right)_t' + a^2 (u_t u_{xxx} - u_{tx}u_{xx})_x'.$$

Интегрирую по области

$$D_\tau = D \cap \{t < \tau\}, \qquad 0 < \tau \leq T,$$

и с учетом формулы Грина получим соотношение

$$E(\tau) - E(0) + a^2 \int_0^l (u_t u_{xxx} - u_{xt}u_{xx})\Big|_{x=l} dt$$

$$- a^2 \int_0^l (u_t u_{xxx} - u_{xt}u_{xx})\Big|_{x=0} dt = \iint_{D_\tau} u_t G(x,t)dxdt.$$

Это соотношение вместе с граничными условиями (4) означает, что

$$E(\tau) = E(0) + \iint_{D_\tau} u_t G(x,t)dxdt. \tag{12}$$

В силу известного неравенство $2ab \le a^2+b^2$, соотношение (12) перепишется в следующем виде:

$$E(\tau) \le E(0) + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_\tau} G^2 dxdt + \frac{1}{2}\iint\limits_{D_\tau} u_t^2 dxdt = A + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau dt \int\limits_0^l u_t^2 dx \le$$

$$\le A + \frac{1}{2}\int\limits_0^\tau dt \int\limits_0^l \left(u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + Lu^2 dx\right) dx = A + \int\limits_0^\tau E(t)dt.$$

Таким образом, для любого $\tau \in [0,T]$ приходим к интегральному неравенству

$$E(\tau) \le A + \int\limits_0^\tau E(t)dt. \tag{13}$$

Умножаем неравенство (13) на $e^{-\tau}$ и приводим к виду

$$\frac{d}{d\tau}\left[e^{-\tau}\int\limits_0^\tau E(t)dt\right] \le Ae^{-\tau}. \tag{14}$$

Интегрирую неравенство (14) по τ от 0 до T, получаем

$$A + \int\limits_0^T E(t)dt \le Ae^T.$$

Отсюда вместе с неравенством (13) следует оценка (11). Теорема доказана.

Следующие утверждения следуют из оценки (11).

Замечание 2.2. *Если в условиях теоремы 2.1 правая часть уравнения* (1) *равна нулю, т.е.* $G(x,t) \equiv 0$, *то соотношение*

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\int\limits_0^l \left[\psi^2(x) + a^2 {\varphi''}^2(x) + L(x)\varphi^2(x)\right] dx \tag{15}$$

справедливо для любого $t \in [0,T]$, *т.е. из соотношения* (15) *следует, что полная энергия свободных колебаний однородной балки остается постоянной и равной его начальной энергии на протяжении всего процесса колебаний.*

Справедливость отношения (15) непосредственно следует из отношения (12).

Замечание 2.3. *(теорема единственности). Если существует функция* $u(x,t)$, *удовлетворяющая условиям* (1)-(3) *и граничным условиям* (4), *то она единственна.*

Доказательство. Предположим, что существуют две функции $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$, удовлетворяющие условиям теоремы 2.1. Тогда их разница

$$u_1(x,t) - u_2(x,t) = u(x,t)$$

принадлежит классу (2) и удовлетворяет однородному уравнению $L^*u = 0$ в D, нулевым начальным $u(x,0) = u_t(x,0) \equiv 0$ и граничным условиям (4). Для такого решения из (15) имеем

$$E(t) = \frac{1}{2} \int\limits_0^l \left(u_t^2 + a^2 u_{xx}^2 + L(x) u^2 \right) dx \equiv 0.$$

Если $L(x) > 0$, то последнее тождество возможно тогда и только тогда, когда $u_t(x, 0) \equiv 0$, $u_{xx} \equiv 0$ и $u = 0$ в D. Если $L(x) = 0$, то $u(x, t) = c_1 x + c_2$, где c_1 и c_2 – положительные постоянные. Так как функция $u(x, t)$ удовлетворяет граничными условиям (4), то $c_1 = c_2 = 0$. Следовательно, $u(x, t) \equiv 0$ в D.

Исследуем теперь вопросы существования решения.

Поставив в (8) вместо $F(x, t)$ уу выражение $G(x, t) - L(x)u$ получим:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos a d_n^2 t + \frac{\psi_n}{a d_n^2} \sin a d_n^2 t \right) Y_n(x) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x)}{a d_n^2} \int\limits_0^l \sin a d_n^2 (t-s) \int\limits_0^l G(\xi, s) d\xi ds -$$
$$- \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x)}{a d_n^2} \int\limits_0^l \sin a d_n^2 (t-s) \int\limits_0^l L(\xi) u(\xi, s) d\xi ds. \tag{16}$$

Для удобства введем следующие обозначения:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\varphi_n \cos a d_n^2 t + \frac{\psi_n}{a d_n^2} \sin a d_n^2 t \right) Y_n(x) +$$
$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x)}{a d_n^2} \int\limits_0^l \sin a d_n^2 (t-s) \int\limits_0^l G(\xi, s) d\xi ds,$$
$$K(x, \xi, s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x)}{a d_n^2} \sin a d_n^2 (t-s) L(\xi).$$

Тогда (16) перепишется в виде:

$$u(x,t) = f(x,t) - \int\limits_0^l \int\limits_0^l K(x, \xi, s) u(\xi, s) d\xi ds.$$

Таким образом, мы получили интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода. Для решения этого уравнения используем метод последовательных приближений представив решение в виде:

$$u(x,t) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k(x,t), \tag{17}$$

где

$$u_0(x,t) = f(x,t),$$
$$u_k = - \int\limits_0^l \int\limits_0^l K(x, \xi, s) u_{k-1}(\xi, s) d\xi ds.$$

Оценивая u_n в области D, имеем

$$|u_0| \leq f_0,$$

$$|u_1| \leq \left| \int\limits_0^l \int\limits_0^l K(x,\xi,s) u_0(\xi,s) d\xi ds \right| \leq K_0 f_0 l^2,$$

$$|u_2| \leq \left| \int\limits_0^l \int\limits_0^l K(x,\xi,s) u_1(\xi,s) d\xi ds \right| \leq K_0^2 f_0 l^4,$$

$$...$$

$$|u_k| \leq \left| \int\limits_0^l \int\limits_0^l K(x,\xi,s) u_{k-1}(\xi,s) d\xi ds \right| \leq f_0 (K_0 l^2)^k,$$

где

$$K_0 = \max_{\xi,x\in[0,l],\ s\in[0,T]} |K(x,\xi,s)| \leq \frac{C_0}{\sqrt{l}} \cdot \frac{l^2 l_0}{a\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq \frac{2C_0 l^{\frac{3}{2}} l_0}{a\pi^2},$$

$$C_0 = \max\{C_1, 6\}, \quad C_1 = \frac{4}{(1-e^{-d_1 l})^2},$$

$$l_0 = \max_{\xi\in[0,l]} |L(\xi)|, \quad f_0 = \max_{x\in[0,l],\ t\in[0,])} |f(x,t)|.$$

Здесь C_i – положительные константы, зависящих от l и T.

Для сходимости ряда необходимо, чтобы выполнялось неравенство $K_0 l^2 < 1$, отсюда получаем условие для l:

$$l < \left(\frac{a\pi^2}{2C_2 l_0} \right)^{\frac{2}{7}}.$$

Тогда для ряда (17) имеет есто оценка:

$$|u(x,t)| \leq \sum_{k=1}^{\infty} f_0 (K_0 l^2)^k \tag{18}$$

Таким образом, справедлива следующая лемма:

Лемма 2.4. *Для любого* $(x,t) \in D$ *и для всех* l*, удовлетворящий неравенств*

$$l < \left(\frac{a\pi^2}{2C_2 l_0} \right)^{\frac{2}{7}}$$

верна оценка (18).

Формальное почленное дифференцирование интегрального уравнения (16) дает

$$u_{tt}(x,t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(a^2 d_n^4 \varphi_n \cos a d_n^2 t + a d_n^2 \sin a d_n^2 t \right) Y_n(x) -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) a d_n^2 \int\limits_0^l \sin a d_n^2 (t-s) \int\limits_0^l G(\xi,s) d\xi ds +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} Y_n(x) a d_n^2 \int_0^l \sin a d_n^2 (t-s) \int_0^l L(\xi) u(\xi, s) d\xi ds. \tag{19}$$

$$u_{xxxx}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n^4 \left(\varphi_n \cos a d_n^2 t + \frac{\psi_n}{a d_n^2} \sin a d_n^2 t \right) Y_n(x) +$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x) d_n^2}{a} \int_0^l \sin a d_n^2 (t-s) \int_0^l G(\xi, s) d\xi ds -$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x) d_n^2}{a} \int_0^l \sin a d_n^2 (t-s) \int_0^l L(\xi) u(\xi, s) d\xi ds. \tag{20}$$

Лемма 2.5. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $G(x,t)$ удовлетворяют условиям*

$$\varphi(x) \in C^6[0,l], \ \ \varphi(0) = \varphi'(0) = \varphi''(l) = \varphi'''(l) = \varphi^{IV}(0) = $$
$$= \varphi^{V}(0) = 0,$$
$$\psi(x) \in C^4[0,l], \ \ \psi(0) = \psi'(0) = \psi''(l) = \psi'''(l) = 0,$$
$$G(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_x^4 D, \ \ G(0,t) = G'(0,t) = G''(l,t) = G'''(l,t) = 0,$$
$$0 \le t \le T,$$

то имеет место представления:

$$\varphi_n = \frac{\varphi_n^{(6)}}{d_n^6}, \quad \psi_n = \frac{\psi^{(4)}}{d_n^4}, \quad g_n(t) = \frac{g_n^{(4)}(t)}{d_n^4}, \tag{21}$$

где

$$\varphi_n^{(6)} =$$
$$\begin{cases} \dfrac{1}{\|X_n\|} \displaystyle\int_0^l \varphi_n^{(6)}(x) \left(a_n ch d_n \left(x - \frac{l}{2} \right) + b_n \sin d_n \left(x - \frac{l}{2} \right) \right) dx, & n = 2k-1, \\ \dfrac{1}{\|X_n\|} \displaystyle\int_0^l \varphi_n^{(6)}(x) \left(c_n sh d_n \left(x - \frac{l}{2} \right) - f_n \cos d_n \left(x - \frac{l}{2} \right) \right) dx, & n = 2k, \end{cases}$$

$$\psi_n^{(4)} = \int_0^l \psi^{(4)} Y_n(x) dx,$$

$$g_n^{(4)}(t) = \int_0^l G^{(4)}(x,t) Y_n(x) dx.$$

Интегрирую о частьям интегралы по φ_n шесть раз, по ψ_n и $g_n(t)$ четыре раза, учитывая условия леммы 2.5, получаем (21).

На основании леммы 2.5 ряды (16), (19), (20) мажорируются сходящимся числовым рядом

$$C^* \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(|\varphi_n^{(6)}| + |\psi_n^{(4)}| + |g_n^{(4)}(t)| \right),$$

следовательно, они сходятся равномерно в $\overline{D}$. Таким образом, сумма рядов (16) удовлетворяет условиям задачи (1)–(4).

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 2.6. *Если функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $G(x,t)$ удовлетворяют условиям леммы 2.5, то существует единственное решение задачи* (1)–(4) *и оно определяется суммой ряда* (16).

Для обоснования устойчивости решения задачи (1)-(4) рассмотрим пространство квадратично-суммируемых функций $L_2[0,l]$.

Теорема 2.7. *Решение* (8) *начально-краевой задачи* (1)-(4) *удовлетворяет следующим оценкам*

$$\|u(x,t)\|_{L_2[0,l]} \leq \leq C_3\Big(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|G(x,t)\|_{L_2[D]} + \|L(x)\|_{L_2[0,l]}\Big) \tag{22}$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D})} \leq \leq C_8\Big(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{[0,l]} + \|\psi(x)\|_{C[0,l]} + \|G(x,t)\|_{C(\overline{D})} + \|L(x)\|_{C[0,l]}\Big) \tag{23}$$

Доказательство Теоремы 2.7. Поскольку система функций $Y_n(x)$ ортонормирована, то из представления (8) получаем

$$\|u_n(x,t)\|^2_{L_2[0,l]} \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2(t). \tag{24}$$

Каждый ряд в правой части этого неравенство будет оцениваться отдельно

$$2\sum_{n=1}^{\infty} u_n^2(t) \leq C_4\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n^2+\psi_n^2) = C_5\left(\|\varphi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]}\right). \tag{25}$$

$$2\sum_{n=1}^{\infty} v_n^2(t) \leq 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{ad_n^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l F(x,s)Y_n(x)\sin ad_n^2(t-s)dsdx\right]^2 =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{ad_n^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,s)Y_n(x)\sin ad_n^2(t-s)dsdx - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{ad_n^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l L(x)u(x,s)Y_n(x)\sin ad_n^2(t-s)dsdx\right]^2 \leq$$

$$\leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{ad_n^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l G(x,s)Y_n(x)\sin ad_n^2(t-s)dsdx\right]^2 +$$

$$+ 4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{ad_n^2}\int\limits_0^t\int\limits_0^l L(x)u(x,s)Y_n(x)\sin ad_n^2(t-s)dsdx\right]^2 \leq$$

$$\leq 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2d_n^4}\int\limits_0^t G_n^2(s)ds + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a^2d_n^4}L_n^2\int\limits_0^t u(x,s)ds \leq$$

$$\leq C_6\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{\infty}G_n^2(s)ds + C_7\sum_{n=1}^{\infty}L_n^2 =$$

$$(26)\qquad = C_6\int\limits_0^t\int\limits_0^l G^2(x,s)dxds + C_7\int\limits_0^l L^2(x)dx =$$

$$= C_6\int\limits_0^t \|G(x,t)\|^2_{L_2[0,l]}ds + C_7\|L(x)\|^2_{L_2[0,l]} \leq$$

$$\leq C_6\|G(x,t)\|^2_{L_2(D)} + C_7\|L(x)\|^2_{L_2[0,l]}.$$

Поставляя полученные оценки (25) и (26) в (24), нетрудно убедиться в справедливости оценки (22).

Из (8), при любых $(x,t)\in\overline{D}$ имеем

$$|u(x,t)| \leq C_9\sum_{n=1}^{\infty}\left(|\varphi_n| + \frac{|\psi_n|}{n^2}\right) + C_{10}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\int\limits_0^t|G_n(s)|ds + \frac{1}{n^2}|L_n|\right) \leq$$

$$\leq C_9\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|\varphi_n^{(4)}|}{n^4} + \frac{|\psi_n|}{n^2}\right) + C_{10}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}\int\limits_0^t|G_n(s)|ds + \frac{1}{n^2}|L_n|\right) \leq$$

$$\leq C_9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(|\varphi_n^{(4)}| + |\psi_n|\right) + C_{10}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\int\limits_0^t|G_n(s)|ds + |L_n|\right).$$

Отсюда, используя неравенство Коши–Буняковского, получим

$$|u(x,t)| \leq C_9\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left[\left(\sum_{n=1}^{\infty}|\varphi_n^{(4)}|^2\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|\psi_n|^2\right)^{1/2}\right] +$$

$$+ C_{10}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{1/2}\left[\left(\int\limits_0^t\sum_{n=1}^{\infty}|G_n(s)|^2ds\right)^{1/2} + \left(\sum_{n=1}^{\infty}|L_n|^2\right)^{1/2}\right] =$$

$$= C_{11}\left(\|\varphi^{(4)}(x)\|_{L_2[0,l]} + \|\psi(x)\|_{L_2[0,l]} + \|G(x,t)\|_{L_2(D)} + \|L(x)\|_{L_2[0,l]}\right).$$

Оценка (23) посредственно следует из полученной оценки.

3. Основной результат и его доказательство

Умножив обе части уравнение (1) на $h(t)$ и проинтегрировав от 0 до T по t, с учетом условий (5), (6) получим:

$$\int\limits_0^T u(x,t)h''(t)dt + a^2H^{(4)}(x) + L(x)H(x) = \int\limits_0^T G(x,t)h(t)dt.$$

Разрешая это уравнение относительно $L(x)$, имеем:

$$L(x) = \frac{1}{H(x)}\left[g_0(x) - \int\limits_0^T u(x,t)h''(t)dt - a^2 H^{(4)}(x)\right], \tag{27}$$

где $g_0(x) = \int\limits_0^T G(x,t)h(t)dt$.

Полученное выражение поставив в (16), находим следующее интегральное уравнение относительно $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos ad_n^2 t + \frac{\psi_n}{ad_n^2}\sin ad_n^2 t\right)Y_n(x)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(x)}{ad_n^2}\int\limits_0^l \sin ad_n^2(t-s)\int\limits_0^l G(\xi,s)d\xi ds-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(x)}{ad_n^2}\int\limits_0^l \sin ad_n^2(t-s)\int\limits_0^l \frac{g_0(\xi)}{H(\xi)}u(\xi,s)d\xi ds-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(x)}{ad_n^2}\int\limits_0^l \sin ad_n^2(t-s)\int\limits_0^l \frac{1}{H(\xi)}\int\limits_0^T u(\xi,y)h''(y)dyu(\xi,s)d\xi ds-$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(x)}{ad_n^2}\int\limits_0^l \sin ad_n^2(t-s)\int\limits_0^l \frac{a^2H^{(4)}(\xi)}{H(\xi)}u(\xi,s)d\xi ds. \tag{28}$$

Для удобства введем некоторые обозначения:

$$\Psi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\varphi_n \cos ad_n^2 t + \frac{\psi_n}{ad_n^2}\sin ad_n^2 t\right)Y_n(x)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(x)}{ad_n^2}\int\limits_0^l \sin ad_n^2(t-s)\int\limits_0^l G(\xi,s)d\xi ds,$$

$$G_1(x,t,\xi,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(x)}{ad_n^2}\sin ad_n^2(t-s)\frac{g_0(\xi)}{H(\xi)},$$

$$G_2(x,t,y,\xi,s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(x)}{ad_n^2}\sin ad_n^2(t-s)\frac{h''(y)}{H(\xi)},$$

$$G_3(x,t,\xi,s) = a^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{Y_n(x)}{ad_n^2}\sin ad_n^2(t-s)\frac{H^{(4)}(\xi)}{H(\xi)}.$$

и запишем уравнение (28) в более удобном виде:

$$u(x,t) = \Psi(x,t) - \int\limits_0^l\int\limits_0^l u(\xi,s)G_1(x,t,\xi,s)d\xi ds-$$

$$-\int_0^l\int_0^l\int_0^T u(\xi,y)u(\xi,s)G_2(x,t,y,\xi,s)dyd\xi ds-\int_0^l\int_0^l u(\xi,s)G_3(x,t,\xi,s)d\xi ds. \tag{29}$$

Вводя оператор A в соответствие с правой частью (29), мы можем переписать соотношение (29) как операторное уравнение

$$u = Au, \tag{30}$$

где оператор A имеет вид

$$(Au)(x,t)=\Psi(x,t)-\int_0^l\int_0^l u(\xi,s)G_1(x,t,\xi,s)d\xi ds-$$

$$-\int_0^l\int_0^l\int_0^T u(\xi,y)u(\xi,s)G_2(x,t,y,\xi,s)dyd\xi ds-\int_0^l\int_0^l u(\xi,s)G_3(x,t,\xi,s)d\xi ds. \tag{31}$$

Пусть

$$\Psi_0=\max_{(x,t)\in D}|\Psi(x,t)|,$$

$$\mu_1=\max_{(x,t)\in D,\ \xi\in[0,l],\ s\in[0,T]}\left|G_1(x,t,\xi,s)\right|,$$

$$\mu_2=\max_{(x,t)\in D,\ \xi,y\in[0,l],\ s\in[0,T]}|G_2(x,t,y,\xi,s)|,$$

$$\mu_3=\max_{(x,t)\in D,\ \xi\in[0,l],\ s\in[0,T]}|G_3(x,t,\xi,s)|, \tag{32}$$

d – некоторое положительное число, и

$$S_d(0)=\{u:\ \|u\|\le d\}. \tag{33}$$

Для доказательство существования решения операторного уравнения (30), воспользуемся принципом Шаудера [21].

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия леммы 2.5, кроме того,* $H(x)\in C^4(0,l)$ *и* $|H(x)|\ge H_0>0$ *при* $x\in(0,l)$. *Тогда для всех* l *и* $d>\Psi_0$, *удовлетворяющих*

$$0<l\le\sqrt{\frac{d-\Psi_0}{(\mu_1+\mu_2dT+\mu_3)d}}, \tag{34}$$

оператор A *равномерно ограничен, где* μ_i $(i=1,2,3)$ *- положительные постоянные.*

Доказательство.

Вначале установим равномерную ограниченность оператора A. Для этого, покажем, что существует $\rho\in(0,d]$, такая что $\|Au\|\le\rho$, где $\|Au\|=\max\limits_{(x,t)\in\bar D}|Au|$. Для $u\in S_d(0)$, $(x,t)\in D$, в силу (32) находим оценку

$$\|Au\|\le\Psi_0+\mu_1dl^2+\mu_2d^2l^2T+\mu_3dl^2=\rho.$$

Для l, удовлетворяющий (34), оператор $A\in S_d(0)$ будет равномерно ограниченным. Лемма доказана.

Лемма 3.2. *Для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta(\varepsilon)=\varepsilon/N^*$, *где* $N^*=\mu_1l^2+2\mu_2l^2T+\mu_3l^2$, *что оператор* A *является равностепенно непрерывным.*

Доказательство. Составим следующую разность:

$$Au_1 - Au_2 = -\int_0^l \int_0^l \left(u_1(\xi,s) - u_2(\xi,s)\right) G_1(x,t,\xi,s) d\xi ds -$$

$$-\int_0^l \int_0^l \int_0^T (u_1(\xi,y)u_1(\xi,s) - u_2(\xi,y)u_2(\xi,s)) G_2(x,t,y,\xi,s) dy d\xi ds -$$

$$-\int_0^l \int_0^l (u_1(\xi,s) - u_2(\xi,s)) G_3(x,t,\xi,s) d\xi ds,$$

введем обозначение $u_1 - u_2 =: \tilde{u}$. После проведение очевидных оценок, получим

$$\|Au_1 - Au_2\| \leq \mu_1 l^2 \|\tilde{u}\| + 2\mu_2 l^2 T \|\tilde{u}\| + \mu_3 l^2 \|\tilde{u}\|,$$

отсюда имеем

$$\|Au_1 - Au_2\| \leq N^* \|u_1 - u_2\| \leq N^* \delta,$$

где $N^* = \mu_1 l^2 + 2\mu_2 l^2 T + \mu_3 l^2$, если взять $\delta_0 = \varepsilon / N^*$, то для $\delta \in (0, \delta_0]$ оператор A является равностепенно непрерывеным. Тогда оператор A - вполне непрерывен на S_d, и согласно принципу Шаудера он имеет на S_d по крайней мере одну неподвижную точку [21]. Таким образом, из леммы 3.1 и леммы 3.2 следует следующееe утверждение о существовании решения операторного уравнения (30):

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия леммы 2.5, леммы 3.1, леммы 3.2 и соотношения* (6). *Тогда для l, удовлетворяющих условию* (34) *уравнение* (30) *имеет решение $u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(D)$.*

Докажем единственность этого решения.

Теорема 3.4. *Для всех $u \in S_d(0)$, при*

$$l < \sqrt{\frac{H_0}{Cd(H_0 + Th_0)}},$$

операторное уравнение (30) *имеет единственное решение в $C^{4,2}_{x,t}(D)$, где $C = C_0/ad_n^2$, $h_0 = \max\limits_{0<t<T} \|h''(t)\|$.*

Доказательство. Пусть задача (1)–(5) имеет два решения u_1, u_2, $u_1 \neq u_2$ и L_1, L_2, $L_1 \neq L_2$. Их разности мы обозначем через $\tilde{u} = u_1 - u_2$, $\tilde{L} = L_1 - L_2$. Для разности мы получаем следующую задачу

$$\tilde{u}_{tt} + a^2 \tilde{u}_{xxxx} = -L_1 \tilde{u} - \tilde{L} u_2$$

$$\tilde{u}\big|_{t=0} = 0, \quad \tilde{u}_t\big|_{t=0} = 0,$$

$$\tilde{u}(0,t) = \tilde{u}_x(0,t) = \tilde{u}_{xx}(l,t) = \tilde{u}_{xxx}(l,t) = 0.$$

Решение этой задачи выглядит следующим образом:

$$\tilde{u}(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Y_n(x)}{ad_n^2} \int_0^l \sin ad_n^2(t-s) \int_0^l \left(-L_1 \tilde{u} - \tilde{L} u_2\right) d\xi ds.$$

Из (27) для $\tilde{L}$ следует оценка

$$\|\tilde{L}\| \leq \frac{Th_0}{H_0}\|\tilde{u}\|,$$

в силу которой, имеем

$$\|\tilde{u}\| \leq Cl^2\left(d\|\tilde{u}\| + \frac{Th_0}{H_0}d\|\tilde{u}\|\right),$$

или

$$\|\tilde{u}\| \leq Cl^2 d\left(1 + \frac{Th_0}{H_0}\right)\|\tilde{u}\|,$$

Отсюда для

$$l < \sqrt{\frac{H_0}{Cd(H_0 + Th_0)}},$$

получим

$$u_1 = u_2,$$

что доказывает справедливость теоремы 3.4.

References

[1] A.N. Tikhonov, A.A. Samarskii, *Uravneniya matematicheskoi fiziki (Equations of Mathematical Physics)*, - Moscow: Nauka, 1966. - 724 pp. (In Russian)

[2] A.N. Krylov, *Vibratsiya sudov (Ship Vibration)*, - Leningrad, Moscow, 1936. - 442 pp. (In Russian)

[3] S. Li, E. Reynders, K. Maes, G. De Roeck, *Vibration-based estimation of axial force for abeam member with uncertain boundary conditions*, J. Sound Vibrat., **332**:4 (2013), 795–806. DOI: 10.1016/j.jsv.2012.10.019.

[4] Y.-R. Wang, Z.-W. Fang, *Vibrations in an elastic beam with nonlinear supports at both ends*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **56**:2 (2015), DOI: 10.1134/ S0021894415020200.

[5] K.B. Sabitov, A.A. Akimov, *Initial-Boundary Value Problem for a Nonlinear Beam Vibration Equation*, Differ. Equation., **56**:5 (2020), 621–634. DOI: 10.1134/S0012266120050079

[6] K.B. Sabitov, *A remark on the theory of initial-boundary value problems for the equation of rods and beams*, Differ. Equations, **53**:1 (2017), 86–98. DOI: 10.1134/S0012266117010086

[7] S.G. Kasimov, U.S. Madrakhimov, *Initial-Boundary Value Problem for the Beam Vibration Equation in the Multidimensional Case*, Differ. Equations., **55**:10 (2019), 1336–1348. DOI: 10.1134/S0012266119100094

[8] K.B. Sabitov, O.V. Fadeeva, *Initial-boundary value problem for the equation of forced vibrations of a cantilever beam*, Vestn. Samar. Gos. Tekhn. Univ., Ser. Fiz.-Mat. Nauki [J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci.], **25**:1 (2021), 51–66. DOI: 10.14498/vsgtu1845

[9] A.L. Karchevsky, *Analytical Solutions to the Differential Equation of Transverse Vibrations of a Piecewise Homogeneous Beam in the Frequency Domain for the Boundary Conditions of Various Types*, J. Appl. Ind. Math., **14**:4 (2020), 648–665. DOI: 10.33048/SIBJIM.2020.23.404

[10] D.K. Durdiev, Zh.D. Totieva, *The problem of determining the one-dimensional kernel of the electroviscoelasticity equation*, Siberian Math. J., **58**:3 (2017), 427–444

[11] D.K. Durdiev, *A multidimensional inverse problem for an equation with memory*, Siberian Math. J., **35**:3 (1994), 514–521.

[12] D.K. Durdiev, A.A. Rahmonov, *The problem of determining the 2D-kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium*, J. Appl. Industr. Math., **14**:2 (2020), 281–295.

[13] A.L. Karchevsky, A.G. Fatyanov, *Numerical solution of the inverse problem for an elasticity system with aftereffect for a vertically inhomogeneous medium*, J. Appl. Industr. Math., **4**:3 (2001), 259–268. (in Russian)

[14] A.L. Karchevsky, *Determination the possibility of a rock burst in a coal seam*, J. Appl. Industr. Math., **11**:4 (2017), 527–534.

[15] U.D. Durdiev, *Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory*, Siberian Electronic Mathematical Reports, **17** (2020), 179–189. DOI 10.33048/semi.2020.17.013

[16] U. Durdiev, Z. Totieva, *A problem of determining a special spatial part of 3D memory kernel in an integro-differential hyperbolic equation*, Math Meth Appl Sci. (2019), 1–12. https://doi.org/10.1002/mma.5863

[17] U.D. Durdiev, *A problem of identification of a special 2D memory kernel in an integro–differential hyperbolic equation*, Eurasian Journal of Mathematical and Computer Applications, **7**:2 (2019), 4–19.

[18] U.D. Durdiev, *An inverse problem for the system of viscoelasticity equations in homogeneous anisotropic media*, J. Appl. Industr. Math., **13**:4 (2019), 623–628.

[19] K.B. Sabitov, *Inverse problems of determining the right-hand side and the initial conditions for the beam vibration equation* Differ. Equations. **56**:6 (2020), 761–774. DOI: 10.1134/S0012266120060099

[20] U.D. Durdiev, *Inverse problem for determining the unknown coefficient in the beam vibration equation* Differ. Equations. **58**:1 (2022), 37–44. (In Russian) DOI: 10.31857/S0374064122010058

[21] V.A. Trenogin, *The Functional Analysis*, Nauka, Moscow, 1980.

Umidjon Durdimuratovich Durdiev
Bukhara State University,
str. M.Ikbol, 11,
Bukhara, 200114, Uzbekistan
E-mail address: umidjan93@mail.ru