УДК 517.958
MSC 35L20, 35R30, 35Q99

Двумерная задача определения двух неизвестных уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде

М. Р. Томаев, Ж. Д. Тотиева

Аннотация

Представлена двумерная обратная задача определения двух неизвестных – скорости распространения волн и ядра для уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде. Прямая начально-краевая задача для функции смещения содержит нулевые начальные данные и граничное условие Неймана специального вида. В качестве дополнительной информации задается образ Фурье функции смещения точек среды при $x_3 = 0$. Предполагается, что искомые величины разлагаются в асимптотический ряд по степеням малого параметра. В работе построен метод нахождения двумерных коэффициента и ядра с точностью до поправки, имеющей порядок $O(\varepsilon^2)$. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

Ключевые слова: линейная вязкоупругость, обратная задача, дельта-функция, преобразование Фурье, ядро, коэффициент, устойчивость.

A two-dimensional inverse problem of determination of two unknowns – wave propagation velocity and kernel for a viscoelasticity equation in a weakly horizontally inhomogeneous medium is presented. The direct initial-boundary value problem for the displacement function contains zero initial data and the Neumann condition of a special form. As additional information, the Fourier image is given displacement function at $x_3 = 0$. It is assumed that the kernel decomposes into an asymptotic series. In this paper, we construct a method for determining kernel and coefficient with an accuracy of $O(\varepsilon^2)$, where ε is a small parameter. The theorems of global unique solvability and stability are proved.

Keywords: linear viscoelasticity, inverse problem, delta function, Fourier transform, kernel, coefficient, stability.

1. Постановка задачи

Рассмотрим при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R},\ x_3 > 0$ интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a(x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \int_0^t k(x_1, t-\tau)\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a(x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x,\tau)d\tau, \quad (1.1)$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u\mid_{t<0} \equiv 0, \quad (1.2)$$

$$a(x_2,0)\left[\frac{\partial u}{\partial x_3}(x,t)+\int_0^t k(x_1,t-\tau)\frac{\partial u}{\partial x_3}(x,\tau)d\tau\right]\Big|_{x_3=+0}=-\delta(x_1)\delta(x_2)\delta'(t), \qquad (1.3)$$

$u(x,t)$ – функция смещения, $a(x_2,x_3)$ – коэффициент, описывающий скорость распространения волн в среде, $k(x_1,t)$ – функция памяти, учитывающая вязкие свойства среды; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $\delta'(\cdot)$ – производная $\delta(\cdot)$.

Прямая задача заключается в отысканий функции $u(x,t)$ из уравнения (1.1) при соответствующих начальных и граничных условиях (1.2), (1.3).

Обратная задача: определить коэффициент $a(x_2,x_3)$ и ядро интегрального оператора $k(x_1,t),\ t>0$, входящих в (1.1), если относительно решения задачи (1.1)–(1.3) известна дополнительная информация

$$F_{x_1,x_2}[u](x_3,t,\nu,\lambda)|_{x_3=+0}=g(t,\nu,\lambda), \quad t>0,\ \nu,\lambda\in\mathbb{R}, \qquad (1.4)$$

$g(t,\nu,\lambda)$ – заданная функция,

$F_{x_1,x_2}[u](x_3,t,\nu,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}u(x,t)e^{-i(\nu x_1+\lambda x_2)}\,dx_1\,dx_2$–образ Фурье функции $u(x,t)$ по переменным x_1,x_2 (здесь и далее i – мнимая единица).

Определение. Пара функций $a(x_2,x_3)\in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty)),\ k(x_1,t)\in C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ называется решением обратной задачи (1.1)–(1.3), если соответствующее ей решение прямой задачи (1.1)–(1.3) $u(x,t)$ из класса обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R})$ удовлетворяет (1.4) для $g(t,\nu,\lambda)$, принадлежащей классу $D'([0,\infty))$ для фиксированного ненулевого набора (ν,λ).

Настоящее исследование относится к классу обратных задач линейной динамической вязкоупругости. Вязкоупругие среды – это среды с памятью (состояние таких сред в текущий момент времени зависит от всей предыстории процесса). Искомой величиной в поставленной задаче является скорость распространения упругих волн и ядро интегрального оператора, моделирующего явление памяти, которое имеет место при распространении волновых процессов в вязкоупругих средах.

Задачи определения ядра (зависящего от временной и пространственных переменных) – направление в теории обратных задач, возникшее в конце прошлого столетия [1–8] в связи с изучением свойств сред с памятью, в частности, новых синтетических материалов (полимеров, композитов). Ядро, от которого зависит поведение сред, не поддается непосредственному измерению, его можно определить только теоретически. Более подробный анализ источников по данному направлению представлен в монографии [9], которая является одной из последних фундаментальных работ в области исследования обратных задач для сред с памятью (или с последействием). В ней представлены результаты исследования корректности ряда постановок одномерных и многомерных обратных динамических задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при описании внутренних характеристик сред с последействием по измерениям волнового поля в доступных областях. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости поставленных обратных задач, а также получены оценки непрерывной зависимости решений этих задач от входных данных.

Из первых результатов по обратным задачам линейной вязкоупругости (близким к данной) можно отметить [5, 10, 11]. В работе [5] получена локальная разрешимость и единственность "в целом" одномерной обратной задачи определения ядра интегрального оператора свертки уравнения вязкоупругости с постоянными коэффициентами. Прямой задачей является задача Коши с распределенными данными. Обратная задача заменяется системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода. В [10, 11] для решения обратных задач в ограниченной области применяется метод разделения переменных, с помощью которого задачи сводятся к системе интегральных уравнений вольтерровского типа относительно неизвестных функций, зависящих от временной переменной.

Дальнейшее развитие исследований, в частности, за последние десять лет отражено, например, в работах [12–29]. В работах [12–17] отличительной особенностью исследований по определению ядер (имеющих специальный вид) является использование сосредоточенного источника возмущения волн и сведение исходной задачи к решению задач интегральной геометрии. Решениями обратных задач являются коэффициенты уравнения и пространственные части ядер, носитель которых сосредоточен в некоторой компактной области пространства. В статьях [18, 19] основным результатом является глобальная однозначная разрешимость одномерных обратных задач в пространствах непрерывных функций с весовой нормой. В последние годы наблюдается увеличение количества публикаций по численным расчетам одномерных ядер интегральных операторов [20–24].

Особый интерес представляют многомерные обратные задачи по определению ядер, когда искомая функция зависит от двух и более переменных. Многомерная обратная задача для (1.1) с начальными и граничными условиями (1.2) и (1.3), дополнительной информацией (1.6) исследована в [25]. В этой работе на основе комбинации метода шкал банаховых пространств и метода весовых норм получена глобльная однозначная разрешимость задачи определения ядра $k(x,t)$ в классе функций, аналитических по переменной x и гладких по переменной t.

В работе [26] рассмотрена одна модельная задача определения двумерного ядра интегро-дифференциального уравнения в среде со слабо горизонтальной неоднородностью, в которой развиты методы решения обратных задач из работы [27].

Из работ, посвященных коэффициентным обратным задачам для вязкоупругих сред, которых одновременно определяются ядра интегральных операторов, можно отметить работы [28, 29]. Например, в [29] изучена модельная одномерная задача одновременного определения скорости распространения волн и ядра интегрального оператора. Показывается, что обе неизвестные функции одной переменной однозначно определяются заданием образа Фурье по пространственной переменной решения прямой задачи на границе полупространства. Устанавливается условная оценка устойчивости решения задачи.

Принципиальным отличием от вышеперечисленных результатов и существенной новизной данной работы является тот факт, что в ней представлена многомерная обратная задача одновременного определения коэффициента уравнения вязкоупругости и ядра интегрального оператора, описывающих свойства вязкоупругой среды для полупространства.

Отметим, что одновременное восстановление нескольких параметров для сред с последействием, несомненно, является актуальной задачей с точки зрения приложений, так как становится возможным проводить анализ влияния памяти среды, например, на скорости распространения волн в пространстве. Для практических приложений более интересным является случай, когда характеристики среды зависят от двух и более переменных. Например, для геофизики одним из основных вопросов является количественная оценка горизонтальных неоднородностей в скоростях сейсмических волн. Накоплены факты, свидетельствующие о существовании внутри Земли неоднородностей по географичесим координатам, или горизонтальных неоднородностей. К числу таких фактов относятся систематические отклонения годографов волн от усредненного годографа, асиметрия гравитационного и электромагнитного полей. При этом отклонения от годографов, отвечающих сферически-симметричному распределению скоростей упругих волн, достаточно малы [30].

В данной работе, которая является продолжением исследования, представленного в [31], предложен новый подход к одновременному определению параметров, зависящих от двух переменных, в уравнении вязкоупругости для полупространства. Новизна подхода заключается в предположении, что $k(x_1, t)$, $a(x_2, x_3)$ слабо зависят от горизонтальных переменных x_1, x_2 следующим образом:

$$\begin{gathered} a(x_2, x_3) = a_0(x_3) + \varepsilon x_2 a_1(x_3) + O(\varepsilon^2), \\ k(x_1, t) = k_0(t) + \varepsilon x_1 k_1(t) + O(\varepsilon^2), \end{gathered} \tag{1.5}$$

где ε – малый параметр.

В равенствах (1.5) будем считать $a_0(x_3)$ заданной величиной, причем $a_0(x_3) \geq m > 0$.

Основная цель данной работы – построение метода нахождения $k_0(t)$ и $a_1(x_3), k_1(t)$ с точностью до величины $O(\varepsilon^2)$. Для этого, как мы увидим далее, достаточно задать функцию $g(t, \nu, \lambda)$ для двух различных ненулевых наборов (ν_j, λ_j), $j = 1, 2$.

Теоретическая ценность работы – получение необходимых и достаточных условий глобальной однозначной разрешимости обратной задачи (1.1)–(1.4) и оценки устойчивости ее решения.

Теоретические результаты являются фундаментом для практических приложений в решении сейсмических задач и численной реализации данного исследования. Установлено, что при увеличении силы землетрясения, грунт ведет себя не как упругое, а как вязкоупругое тело [32]. Грунты — это среды с памятью, то есть состояние таких сред в текущий момент времени зависит от всей предыстории процесса. Об этом, например, указывается в работе [33], в которой приводится подробный обзор исследований по выяснению природы поглощения сейсмических волн в грунтах и рассмотрены основные закономерности поглощения волн напряжений в дисперсных и полускальных грунтах. Как показано в работе [34], неучет поглощающих свойств среды ведет к существенным искажениям при восстановлении скоростной модели среды. Автор предполагает сделать численный анализ влияния функции памяти на скорость распространения волн в полупространстве позднее. Основой для численного анализа являются алгоритмы, приведенные в монографии [35].

Решение прямой задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде ряда по степеням ε

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j u_j(x,t). \tag{1.6}$$

Тогда, учитывая (1.4) и (1.6), имеем

$$F^{-1}_{x_1,x_2}[u](x_3,t,\nu,\lambda)\Big|_{x_3=+0}:=U(x_1,x_2,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j U_j(x_1,x_2,t).$$

Нетрудно проверить, что u_j (следовательно и U_j) – четные по совокупности x_1, x_2 при четных j и нечетные – при нечетных j. Тем самым, по известной функции $U(x_1,x_2,t)$ можно найти $U_0(x_1,x_2,t)$ и $U_1(x_1,x_2,t)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ [27]:

$$U_0(x_1,x_2,t)=\frac{U(x_1,x_2,t)+U(-x_1,-x_2,t)}{2},\quad U_1(x_1,x_2,t)=\frac{U(x_1,x_2,t)-U(-x_1,-x_2,t)}{2}.$$

Так как метод предполагает определение $a_1(x_3),\ k_0(t),\ k_1(t)$ с точностью до поправки порядка $O(\varepsilon^2)$, то в этом случае, подставляя (1.5), (1.6) в (1.1), получаем две обратные одномерные задачи последовательного определения $k_0(t)$ и $a_1(x_3), k_1(t)$:

(i) Задача определения функций $k_0(t)$ и $u_0(x,t)$ из равенств

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=a_0(x_3)\Big[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}\Big]+\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(a_0(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}\Big)$$

$$+\int_0^t k_0(t-\tau)\left[a_0(x_3)\Big[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}\Big]+\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(a_0(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}\Big)\right](x,\tau)d\tau, \tag{1.7}$$

$$u_0\mid_{t<0}\equiv 0, \tag{1.8}$$

$$a_0(+0)\left[\frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x,t)+\int_0^t k_0(t-\tau)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x,\tau)d\tau\right]\Bigg|_{x_3=+0}=-\delta(x_1)\delta(x_2)\delta'(t), \tag{1.9}$$

$$F_{x_1,x_2}[u_0](x_3,t,\nu,\lambda)|_{x_3=+0}=F_{x_1,x_2}[U_0](t,\nu,\lambda)=:g_0(t,\nu,\lambda),\quad t>0. \tag{1.10}$$

(ii) Задача определения функций $a_1(x_3), k_1(t)$ и $u_1(x,t)$ из равенств

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=L\Big[k_0,\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(x_2a_1(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}+a_0(x_3)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\Big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(x_2a_1(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_2}\Big)$$

$$+a_0(x_3)\Big[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\Big]+x_2a_1(x_3)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}\Big]$$

$$+\int_0^t x_1k_1(\tau)\left[a_0(x_3)\Big[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}\Big]+\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(a_0(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}\Big)\right](x,\tau)d\tau, \tag{1.11}$$

$$u_1|\,|_{t<0}\equiv 0, \tag{1.12}$$

$$L\Big[k_0, x_2 a_1(+0)\frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0(0)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\Big] + a_0(+0)x_1\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x,\tau)d\tau\Big|_{x_3=+0} = 0, \tag{1.13}$$

$$F_{x_1,x_2}[u_1](x_3,t,\nu,\lambda)|_{x_3=+0} = F_{x_1,x_2}[U_1](t,\nu,\lambda) =: g_1(t,\nu,\lambda), \quad t>0. \tag{1.14}$$

2. Задача определения функций $k_0(t)$ и $u_0(x,t)$

Введем новую переменную z по формуле

$$z=\phi(x_3) := \int_0^{x_3}\frac{d\xi}{\sqrt{a_0(\xi)}},\ c_0(z) := \sqrt{a_0(\phi^{-1}(z)}.$$

Через $\phi^{-1}(z)$ обозначена функция, обратная к $\phi(x_3)$.

Пусть

$$v(z,t,\nu,\lambda) := F_{x_1,x_2}[u_0](\phi^{-1}(z),t,\nu)\sqrt{\frac{c_0(z)}{c_0(0)}},$$

$$w(z,t,\nu,\lambda) := \left[v(z,t,\nu,\lambda) + \int_0^t k_0(t-\tau)v(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau\right]\exp\left(-k_0(0)t/2\right).$$

Тогда

$$v(z,t,\nu,\lambda) = \exp\left(k_0(0)t/2\right)w(z,t,\nu,\lambda) + \int_0^t r_0(t-\tau)\exp\left(k_0(0)\tau/2\right)w(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau, \tag{2.1}$$

$$r_0(t) = -k_0(t) - \int_0^t k_0(t-\tau)r_0(\tau)\,d\tau. \tag{2.2}$$

Относительно новых функций $w(z,t,\nu,\lambda)$ и $r_0(t)$ получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + H(z,\nu,\lambda)w - \int_0^t h(t-\tau)w(z,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau,\ z>0,\ t\in R, \tag{2.3}$$

$$w|_{t<0}\equiv 0, \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{c_0'(z)}{2c_0(z)}w\right)\Big|_{z=+0} = -\frac{1}{c_0(0)}\left(\delta'(t) - \frac{1}{2}r_0(0)\delta(t)\right), \tag{2.5}$$

$$w|_{z=+0} = \tilde{g}_0(t,\nu,\lambda) + \int_0^t \widehat{k}_0(t-\tau)\tilde{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau, \tag{2.6}$$

$$H(z,\nu,\lambda) := q(z) - (\nu^2+\lambda^2)c_0^2(z) + \frac{r_0^2(0)}{4} - r_0'(0),\ q(z) = \frac{[c_0'(z)]^2 - 2c_0(z)c_0''(z)}{4c_0^2(z)},$$

$$h(t) := r_0''(t)\exp\left(r_0(0)t/2\right), \quad \tilde{g}_0(t,\nu,\lambda) := F_{x_1,x_2}[g_0](t,\nu,\lambda)\exp(r_0(0)t/2),$$

$$\widehat{k}_0(t) := k_0(t)\exp\left(r_0(0)t/2\right).$$

Здесь, к примеру, r_0', r_0'' означает операцию однократного и двукратного дифференцирования по переменной t или z. Производная по параметру преобразования будет обозначаться, например, $g_\nu(t,\nu,\lambda)$.

В (2.5) использовано равенство $k_0(0) = -r_0(0)$, вытекающее из (2.2).

Из теории гиперболических уравнений следует, что функция $w(z,t,\nu,\lambda)$ как решение прямой задачи (2.3)–(2.5) обладает свойством $w \equiv 0$, $t < z$, $z > 0$ и в окрестности характеристической прямой $t = z$ имеет следующую структуру:

$$w(z,t,\nu,\lambda) = \frac{1}{c_0(+0)}\delta(t-z) + \tilde{w}(z,t,\nu,\lambda)\theta(t-z), \tag{2.7}$$

где $\tilde{w}(z,t,\nu,\lambda)$ – регулярная функция. Тогда

$$\tilde{g}_0(t,\nu,\lambda) := \frac{1}{c_0(+0)}\delta(t) + \widehat{g}_0(t,\nu,\lambda)\theta(t),\ \widehat{g}_0(t,\nu,\lambda) := g_{00}(t,\nu,\lambda)\exp(r_0(0)t/2),$$

здесь $g_{00}(t,\nu,\lambda)$ – регулярная часть $g_0(t,\nu,\lambda)$.

Подставляя функцию (2.7) в уравнения (2.3)–(2.6) и используя метод выделения особенностей, находим, что функция $\tilde{w}(z,t,\nu,\lambda)$ в области $t > z > 0$ удовлетворяет уравнениям ($w = \tilde{w}$ для $t > z$):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + H(z,\nu,\lambda)w - \frac{1}{c_0(+0)}h(t-z) - \int_z^t h(t-\tau)w(z,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau, \tag{2.8}$$

$$w|_{t=z+0} = -\frac{1}{2c_0(0)}\left(r_0(0) + \frac{c_0'(0)}{c_0(0)} - \int_0^z H(\xi,\nu,\lambda)d\xi\right) := \beta(z,\nu,\lambda), \tag{2.9}$$

$$\left.\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{c_0'(0)}{2c_0(0)}w\right)\right|_{z=+0} = 0, \tag{2.10}$$

$$w|_{z=+0} = \widehat{g}_0(t,\nu,\lambda) + \int_0^t \widehat{k}_0(t-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau + \frac{1}{c_0(+0)}\widehat{k}_0(t). \tag{2.11}$$

Таким образом, обратная задача определения $k_0(t)$, $u_0(x,t)$ из равенств (1.7)–(1.10) сводится к задаче определения $\widehat{k}_0(t)$, $w(z,t,\nu,\lambda)$ из равенств (2.8)–(2.11).

Перейдем к определению неизвестных величин $r_0(0), r_0'(0)$.

Требуя непрерывности функций $w(z,t,\nu,\lambda)$, $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)(z,t,\nu,\lambda)$ при $z = t = 0$ из соотношений (2.9), (2.11) несложно выразить $r_0(0), r_0'(0)$:

$$r_0(0) = 2c_0(0)\widehat{g}_0(0,\nu,\lambda) + \frac{c_0'(0)}{c_0(0)}, \tag{2.12}$$

$$r_0'(0) = -q(0) + (\nu^2+\lambda^2)c_0^2(0) + \frac{3}{4}\left[\frac{c_0'(0)}{c_0(0)}\right]^2$$

$$-c_0^2(0)\widehat{g}_0^2(0,\nu,\lambda)+c_0'(0)\widehat{g}_0(0,\nu,\lambda)-2c_0(0)\widehat{g}_0'(0,\nu,\lambda). \tag{2.13}$$

При выводе последних равенств были использованы следующие соотношения:

$$k'(t)=-r'(t)-r(0)k(t)-\int_0^t r'(t-\tau)k(\tau)\,d\tau,$$

$$k'(0)=-r'(0)+r^2(0),\ \widehat{k}'(0)=\frac{r^2(0)}{2}-r'(0).$$

В дальнейшем будем считать $r(0), r'(0)$ известными величинами.

В последующих равенствах вместо ν,λ будем подразумевать заданный набор значений.

Лемма 2.1 *Пусть для ненулевых фиксированных параметров ν,λ функция $g_{00}(t,\nu,\lambda)\in C^3[0,T]$, $c_0(z)\in C^4[0,T/2]$, $T>0$ фиксировано. Тогда обратная задача (2.8)–(2.11) для $(z,t)\in D_T$, $D_T=\{(z,t)|\ 0\le z\le t\le T-z\}$ эквивалентна задаче нахождения вектор-функции $\Big[w(z,t,\nu,\lambda),\ \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(z,t,\nu,\lambda),\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)(z,t,\nu,\lambda),\ h(t),\ h'(t),$ $\widehat{k}_0(t),\ \widehat{k}_0'(t),\ \widehat{k}_0''(t),\ \widehat{k}_0'''(t)\Big]$ из следующей нелинейной системы интегральных уравнений:*

$$w(z,t,\nu,\lambda)=\beta(z,\nu,\lambda)+\int_z^t \frac{\partial w}{\partial \tau}(z,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)&=\frac{1}{4c_0(0)}H\Big(\frac{z+t}{2},\nu,\lambda\Big)-\frac{c_0'(0)}{4c_0(0)}w(0,t-z,\nu,\lambda)\\
&+\frac{1}{2}\left(\widehat{g}_0'(t-z,\nu,\lambda)-r_0(0)\widehat{g}_0(t-z,\nu,\lambda)\right)\\
&-\frac{1}{2c_0(0)}h(t-z)z+\frac{1}{2c_0(0)}\widehat{k}_0'(t-z)+\frac{1}{2}\int_0^{t-z}\widehat{k}_0'(t-z-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau\\
&+\frac{1}{2}\int_z^{(z+t)/2}\Bigg[H(\xi,\nu,\lambda)w(\xi,t+z-\xi,\nu,\lambda)-\frac{1}{c_0(0)}h(t+z-2\xi)\\
&-\int_0^{t+z-2\xi}h(\tau)w(\xi,t+z-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\Bigg]\,d\xi.\\
&-\frac{1}{2}\int_0^z\left[H(\xi,\nu,\lambda)w(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda)-\int_0^{t-z}h(\tau)w(\xi,t-z+\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right]d\xi\\
&=:G_1[w,h,\widehat{k}_0,\widehat{k}_0'],
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(z,t,\nu,\lambda)=\frac{\partial}{\partial t}G_1[w,h,\widehat{k}_0,\widehat{k}_0'], \tag{2.16}$$

$$h(t)=\frac{1}{2}H'\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)$$

$$-2c_0(0)\left[\widehat{g}_0''(t,\nu,\lambda)-r_0(0)\widehat{g}_0'(t,\nu,\lambda)+r_{01}\widehat{g}_0(t,\nu,\lambda)-\frac{1}{2}H\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\beta\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\right]$$

$$-2\widehat{k}_0''(t)-2c_0(0)\int_0^t\widehat{k}_0''(t-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)d\tau-c_0(0)\int_0^t h(\tau)\beta\left(\frac{t-\tau}{2},\nu,\lambda\right)d\tau$$

$$+2c_0(0)\int_0^{\frac{t}{2}}\left[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)-\int_0^{t-2\xi}h(\tau)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right]d\xi$$

$$=: G_2\Big[\frac{\partial w}{\partial t},h,\widehat{k}_0''\Big], \tag{2.17}$$

$$h'(t)=\left(G_2\Big[\frac{\partial w}{\partial t},h,\widehat{k}_0''\Big]\right)', \tag{2.18}$$

$$\widehat{k}_0(t)=-r_0(0)+r_{01}t+\int_0^t(t-\tau)\widehat{k}_0''(\tau)\,d\tau, \tag{2.19}$$

$$\widehat{k}_0'(t)=r_{01}+\int_0^t\widehat{k}_0''(\tau)\,d\tau, \tag{2.20}$$

$$\widehat{k}_0''(t)=-h(t)+r_{00}\widehat{k}_0(t)-\int_0^t h(t-\tau)\widehat{k}_0(\tau)\,d\tau. \tag{2.21}$$

$$\widehat{k}_0'''(t)=-h'(t)+r_{00}\widehat{k}_0'(t)-h(0)\widehat{k}_0(t)-\int_0^t h'(t-\tau)\widehat{k}_0(\tau)\,d\tau, \tag{2.22}$$

где

$$r_{00}=\frac{r_0^2(0)}{4}-r_0'(0),\quad r_{01}=\frac{r_0^2(0)}{2}-r_0'(0).$$

Для доказательства леммы заметим, что справедливы равенства

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)w=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right)w.$$

С учетом этого интегрируем (2.8) вдоль соответствующих характеристик дифференциальных операторов первого порядка для $(z,t)\in D_T$. Интегрирование вдоль характеристики оператора $\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}$ совершим от точки (z,t) до точки $((z+t)/2,\ (z+t)/2)$ на плоскости переменных $(\xi,\ \tau)$. Используя равенство $\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)w((z+t)/2,\ (z+t)/2,\nu,\lambda)=\frac{1}{2c_0(0)}H((z+t)/2,\nu,\lambda)$, вытекающее из (2.9) после дифференцирования по z, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\right)w(z,t,\nu,\lambda)=\frac{1}{2c_0(0)}H\Big(\frac{z+t}{2},\nu,\lambda\Big)$$

$$+\int_z^{(z+t)/2}\Big[H(\xi,\nu,\lambda)w(\xi,t+z-\xi,\nu,\lambda)-\frac{1}{c_0(0)}h(t+z-2\xi)$$

$$-\int_0^{t+z-2\xi} h(\tau)w(\xi, t+z-\xi-\tau, \nu, \lambda)d\tau\Bigg] d\xi. \tag{2.23}$$

Интегрирование вдоль характеристики оператора $\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}$ совершим от точки $(0,\ t-z)$ до точки (z,t). Используя равенства (2.10), (2.11), находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\right) w(z,t,\nu,\lambda) = -\frac{c_0'(0)}{2c_0(0)} w(0, t-z, \nu, \lambda) + \widehat{g}_0'(t-z,\nu,\lambda) - r_0(0)\widehat{g}_0(t-z,\nu,\lambda)$$

$$-\frac{1}{c_0(0)} h(t-z)z + \frac{1}{c_0(0)}\widehat{k}_0'(t-z) + \int_0^{t-z} \widehat{k}_0'(t-z-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\, d\tau$$

$$+\int_0^z \left[H(\xi,\nu,\lambda)w(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda) - \int_0^{t-z} h(\tau)w(\xi,t-z+\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right] d\xi. \tag{2.24}$$

Из равенств (2.23) и (2.24) легко можно получить уравнение (2.15). В уравнении (2.23), полагая $z=0$ и используя условия (2.10), (2.11), находим

$$\widehat{g}_0'(t,\nu,\lambda) - r_0(0)\widehat{g}_0(t,\nu,\lambda) + \frac{1}{c_0(0)}\widehat{k}_0'(t) + \int_0^t \widehat{k}_0'(t-\tau)\tilde{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\, d\tau - \frac{c_0'(0)}{2c_0(0)} w(0,t-z,\nu,\lambda)$$

$$= \frac{1}{2c_0(0)} H\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right) + \int_0^{t/2} \Bigg[H(\xi,\nu,\lambda)w(\xi,t-\xi,\nu,\lambda) - \frac{1}{c_0(0)} h(t-2\xi)$$

$$-\int_0^{t-2\xi} h(\tau)w(\xi,t-\xi-\tau,\nu)d\tau\Bigg] d\xi.$$

Дифференцируя это равенство, после несложных выкладок получаем уравнение (2.17).

Остальные уравнения системы являются очевидными и, в основном, используются для замыкания системы интегральных уравнений. Значения $h(0), \widehat{k}''(0)$ становятся известными величинами, если решить при $t=0$ систему из двух уравнений (2.21) и (2.17). Тем самым лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть справедливы условия леммы 2.1. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1.7)–(1.10)* $k_0(t) \in C^3[0,T]$ *при любом фиксированном* $T>0$.

Пусть $\Gamma(K_0)$ – множество функций $k_0(t) \in C^3[0,T]$, удовлетворяющих для $t \in [0,T]$ неравенству $\|k_0(t)\|_{C^3[0,T]} \le K_0$ с фиксированной положительной постоянной K_0.

Теорема 2.2. *Пусть* $k_0^{(1)}(t), k_0^{(2)}(t) \in \Gamma(K_0)$ *– решения обратной задачи (1.7)–(1.10) с набором данных*

$$\left\{c_0^{(j)}(z),\ g_{00}^{(j)}(t,\nu,\lambda)\right\}$$

для $j=1,2$ *соответственно. Тогда найдется такое положительное число* $C = C(K_0, h_0(\nu,\lambda), m, T)$, $h_0(\nu,\lambda) = \max\left\{\|c_0^{(j)}(z)\|_{C^4[0,T/2]}, \|g_{00}^{(j)}(t,\nu,\lambda)\|_{C^3[0,T]},\ j=1,2\right\}$, *что справедлива оценка устойчивости*

$$\|k_0^{(1)}-k_0^{(2)}\|_{C^3[0,T]}\leq C\Big[\|c_0^{(1)}-c_0^{(2)}\|_{C^4[0,T/2]}+\|g_{00}^{(1)}-g_{00}^{(2)}\|_{C^3[0,T]}\Big]. \tag{2.25}$$

Доказательство теоремы 2.1. Основная идея доказательства состоит в применении принципа сжатых отображений к нелинейной системе интегральных уравнений Вольтерра второго рода (2.14)–(2.22). Запишем указанную систему уравнений в виде операторного уравнения

$$\varphi=A\varphi, \tag{2.26}$$

где $\varphi=[\varphi_j]$, $j=1,2,\ldots,9:$

$$\varphi_1(z,t,\nu,\lambda):=w(z,t,\nu,\lambda),$$

$$\varphi_2(z,t,\nu,\lambda):=\frac{\partial w}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)+\frac{1}{2c_0(0)}h(t-z)z-\frac{1}{2c_0(0)}\widehat{k}_0'(t-z),$$

$$\varphi_3(z,t,\nu,\lambda):=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(z,t,\nu,\lambda)+\frac{1}{2c_0(0)}h'(t-z)z-\frac{1}{2c_0(0)}\widehat{k}_0''(t-z)+\frac{1}{2}h(t-z)\int_0^z\beta(\xi,\nu)\,d\xi,$$

$$\varphi_4(t):=h(t)+2\widehat{k}_0''(t),\quad \varphi_5(t):=h'(t)+2\widehat{k}_0'''(t)+c_0(0)h(t)\beta(0,\nu),$$

$$\varphi_6(t):=\widehat{k}_0(t),\quad \varphi_7(t):=\widehat{k}_0'(t),\quad \varphi_8(t):=\widehat{k}_0''(t)+h(t)-r_{00}\widehat{k}_0(t),$$

$$\varphi_9(t):=\widehat{k}_0'''(t)+h'(t)-r_{00}\widehat{k}_0'(t)+h(0)\widehat{k}_0(t).$$

Оператор A определен на множестве вектор-функций $\varphi\in C[D_T]$ и в соответствии с равенствами (2.14)–(2.22) имеет вид $A=(A_1,\ A_2,\ldots,A_9):$

$$A_1\varphi=\varphi_{01}$$

$$+\int_z^t\Big[\varphi_2(z,\tau,\nu,\lambda)-\frac{1}{2c_0(0)}z\left(2\varphi_8(\tau-z)-\varphi_4(\tau-z)+2r_{00}\varphi_6(\tau-z)\right)+\frac{1}{2c_0(0)}\varphi_7(\tau-z)\Big]\,d\tau,$$

$$A_2\varphi=\varphi_{02}+\frac{1}{2}\int_0^{t-z}\varphi_7(t-z-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)d\tau+\frac{1}{2}\int_0^z\Big[H(\xi,\nu,\lambda)\varphi_1(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda)$$

$$-\int_0^{t-z}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\varphi_1(\xi,t-z+\xi-\tau,\nu)d\tau\Big]\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_z^{\frac{t+z}{2}}\Big[H(\xi,\nu,\lambda)\varphi_1(\xi,t+z-\xi,\nu)-\frac{1}{c_0(0)}(2\varphi_8(t+z-2\xi)-\varphi_4(t+z-2\xi)+2r_{00}\varphi_6(t+z-2\xi))$$

$$-\int_0^{t+z-2\xi}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\varphi_1(\xi,t+z-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\Big]\,d\xi,$$

$$A_3\varphi=\varphi_{03}+\frac{1}{2}\int_0^{t-z}(\varphi_4(t-z-\tau)-\varphi_8(t-z-\tau)-r_{00}\varphi_6(t-z-\tau))\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^z\left[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-z+\xi,\nu)\right.$$

$$\left.-\int_0^{t-z}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-z+\xi,\nu)d\tau\right]d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_z^{\frac{t+z}{2}}\left[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda)-\frac{1}{c_0(0)}h'(t+z-2\xi)\right.$$

$$-(2\varphi_8(t+z-2\xi)-\varphi_4(t+z-2\xi)+2r_{00}\varphi_6(t+z-2\xi))\beta(\xi,\nu)$$

$$\left.-\int_0^{t+z-2\xi}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t+y-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right]d\xi,$$

$$A_4\varphi=\varphi_{04}-2c_0(0)\int_0^t\widehat{k}_0''(t-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu)\,d\tau$$

$$-c_0(0)\int_0^t(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\,\beta_t'\left(\frac{t-\tau}{2},\nu,\lambda\right)\,d\tau$$

$$+2c_0(0)\int_0^{t/2}\left[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)\right.$$

$$\left.-\int_0^{t-2\xi}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\,\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right]d\xi,$$

$$A_5\varphi=\varphi_{05}-c_0(0)\int_0^t(\varphi_4(t-\tau)-\varphi_8(t-\tau)-r_{00}\varphi_6(t-\tau))\,\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau$$

$$-\frac{c_0(0)}{2}\int_0^t(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau)\beta\left(\frac{t-\tau}{2},\nu,\lambda\right)\,d\tau$$

$$+c_0(0)\int_0^{t/2}\left[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi,t-\xi,\nu)-(2\varphi_8(t-2\xi)-\varphi_4(t-2\xi)\right.$$

$$\left.+2r_{00}\varphi_6(t-2\xi)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,\xi,\nu)-\int_0^{t-2\xi}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi,t-\xi-\tau,\nu)d\tau\right]d\xi,$$

$$A_6\varphi=\varphi_{06}+\int_0^t(t-\tau)\left(\varphi_4(t-\tau)-\varphi_8(t-\tau)-r_{00}\varphi_6(t-\tau)\right)\,d\tau,$$

$$A_7\varphi=\varphi_{07}+\int_0^t\left(\varphi_4(t-\tau)-\varphi_8(t-\tau)-r_{00}\varphi_6(t-\tau)\right)\,d\tau,$$

$$A_8\varphi=\varphi_{08}-\int_0^t(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\,\varphi_6(\tau)\,d\tau,$$

$$A_9\varphi=\varphi_{09}-\int_0^t h'(t-\tau)\varphi_6(\tau)\,d\tau,$$

где введено обозначение $\varphi_0=[\varphi_{01},\ \varphi_{02},\ldots,\ \varphi_{09}]:$

$$\varphi_{01}(z,\nu,\lambda):=\beta(z,\nu,\lambda),$$

$$\varphi_{02}(z,t,\nu,\lambda) := \frac{1}{2}(\widehat{g}_0'(t-z,\nu,\lambda) - r_0(0)\widehat{g}_0(t-z,\nu,\lambda)) + \frac{1}{4c_0(0)} H\left(\frac{z+t}{2},\nu,\lambda\right)$$

$$-\frac{c_0'(0)}{4c_0(0)} w(0,t-z,\nu,\lambda),$$

$$\varphi_{03}(z,t,\nu,\lambda) := \frac{1}{2}(\widehat{g}_0''(t-y,\nu,\lambda) - r_0(0)\widehat{g}_0'(t-y,\nu,\lambda)) + \frac{1}{8c_0(0)} H\left(\frac{z+t}{2},\nu,\lambda\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left[H\left(\frac{y+t}{2},\nu,\lambda\right)\beta\left(\frac{z+t}{2},\nu,\lambda\right) - \frac{1}{c_0(0)}h(0)\right],$$

$$\varphi_{04}(t,\nu,\lambda) := \frac{1}{2}H'\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)$$

$$-2c_0(0)\left[\widehat{g}_0''(t,\nu,\lambda) - r_0(0)\widehat{g}_0'(t,\nu,\lambda) + r_{01}\widehat{g}_0(t,\nu,\lambda) - \frac{1}{2}H\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\beta\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\right],$$

$$\varphi_{05}(t,\nu,\lambda) := \frac{1}{2}H''\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)$$

$$-2c_0(0)\left[\widehat{g}_0'''(t,\nu,\lambda) - r_0(0)\widehat{g}_0''(t,\nu,\lambda) + r_{01}\widehat{g}_0'(t,\nu,\lambda) - \frac{1}{2}\left(H\Big(\frac{t}{2},\nu,\lambda\Big)\beta\Big(\frac{t}{2},\nu,\lambda\Big)\right)'\right]$$

$$+2c_0(0)H\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\frac{\partial\beta}{\partial t}\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right),$$

$$\varphi_{06}(t) := -r(0) + r_{01}t,\ \ \varphi_{07}(t) := r_{01},\ \ \varphi_{08}(t) := 0,\ \ \varphi_{09}(t) := 0.$$

В системе уравнений (2.26)

$$\begin{gathered} h(t) = 2\varphi_8(t) - \varphi_4(t) + 2r_{00}\varphi_6(t), \quad h'(t) = 2\varphi_9(t) + 2r_{00}\varphi_7(t) - \varphi_5(t) \\ +c_0(0)\left(2\varphi_8(t) - \varphi_4(t)\right) + 2\left(r_{00}c_0(0)\beta(0,\nu) - h(0)\right)\varphi_6(t), \\ \widehat{k}_0''(t) = \varphi_4(t) - \varphi_8(t) - r_{00}\varphi_6(t), \end{gathered} \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda) = \varphi_2(z,t,\nu,\lambda) - \frac{z}{2c_0(0)}(2\varphi_8(t-z) - \varphi_4(t-z)$$

$$+2r_{00}\varphi_6(t-z)) + \frac{1}{2c_0(0)}\varphi_7(t-z),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(z,t,\nu,\lambda) = \varphi_3(z,t,\nu,\lambda) - \frac{z}{2c_0(0)}h'(t-z) + \frac{1}{2c_0(0)}\widehat{k}_0''(t-z) - \frac{1}{2}h(t-z)\int_0^z \beta(\xi,\nu,\lambda)d\xi,$$

$$\widehat{k}_0'''(t) = \varphi_9(t) - h'(t) - r_{00}\varphi_7(t) + h(0)\varphi_6(t).$$

В последних двух равенствах вместо функций $h(t), h'(t), \widehat{k}_0''(t)$ в правой части подразумеваются их выражения через компоненты вектор-функции φ (2.26).

Введем банахово пространство непрерывных функций C_σ, порожденных семейством весовых норм

$$\|\varphi\|_\sigma = \max\left\{ \sup_{(z,t)\in D_T} \left|\varphi_i(z,t,\nu,\lambda)e^{-\sigma t}\right|,\ i=1,2,3,\ \sup_{t\in[0,T]} \left|\varphi_j(t)e^{-\sigma t}\right|, j=\overline{4,9} \right\},\ \sigma \geq 0.$$

При $\sigma = 0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой $\|\varphi\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma T}\|\varphi\| \leq \|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi\| \tag{2.28}$$

нормы $\|\varphi\|_\sigma$ и $\|\varphi\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0,\infty)$. Число σ выбирается позже. Пусть $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|) =: \{\varphi \mid \|\varphi - \varphi_0\|_\sigma \leq \|\varphi_0\|\}$ – шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 некоторого весового пространства C_σ ($\sigma \geq 0$). Для $\varphi \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ имеет место оценка $\|\varphi\|_\sigma \leq \|\varphi_0\|_\sigma + \|\varphi_0\| \leq 2\|\varphi_0\|$.

Пусть $\varphi(z,t,\nu,\lambda) \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Далее показывается, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар Q_σ в шар Q_σ. Приведем для примера технику оценки для второго нелинейного уравнения системы (2.26) (для остальных уравнений оценки получаются аналогично [18]). Для $(z,t) \in D_T$ имеем

$$||A_2\varphi - \varphi_{02}||_\sigma = \sup_{(z,t)\in D_T} \left|(A_2\varphi - \varphi_{02})e^{-\sigma t}\right|$$

$$= \sup_{(z,t)\in D_T} \left| \frac{1}{2}\int_0^{t-z} \varphi_7(t-z-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t-z-\tau)}e^{-\sigma(z+\tau)}\,d\tau \right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^z \Big[H(\xi,\nu,\lambda)\varphi_1(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t-z+\xi)}e^{-\sigma(z-\xi)}$$

$$\left. - \int_0^{t-z} (2\varphi_8(\tau) - \varphi_4(\tau) + 2r_{00}\varphi_6(\tau))e^{-\sigma\tau}\varphi_1(\xi,t-z+\xi-\tau,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t-z+\xi-\tau)}e^{-\sigma(z-\xi)}d\,\tau \right] d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_z^{\frac{t+z}{2}} \Big[H(\xi,\nu,\lambda)\varphi_1(\xi,t+z-\xi,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t+z-\xi)}e^{-\sigma(\xi-z)}$$

$$-a(2\varphi_8(t+z-2\xi) - \varphi_4(t+z-2\xi) + 2r_{00}\varphi_6(t+z-2\xi))e^{-\sigma(t+z-2\xi)}e^{-\sigma(2\xi-z)}$$

$$\left. - \int_0^{t+z-2\xi} (2\varphi_8(\tau) - \varphi_4(\tau) + 2r_{00}\varphi_6(\tau))e^{-\sigma\tau}\varphi_1(\xi,t+z-\xi-\tau,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t+z-\xi-\tau)}e^{-\sigma(\xi-z)}\,d\tau \Big] d\,\xi \right|$$

$$\leq \frac{1}{2}G\|\varphi_7\|_\sigma \frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma z} - e^{-\sigma t})$$

$$+\frac{1}{2}H_0\|\varphi_1\|_\sigma \frac{1}{\sigma}(1 - e^{-\sigma z}) + \frac{1}{2}(2\|\varphi_6\|_\sigma + \|\varphi_3\|_\sigma + 2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)\|\varphi_1\|_\sigma \frac{1}{\sigma}(1 - e^{-\sigma z})T$$

$$+\frac{1}{2}H_0\|\varphi_1\|_\sigma \frac{1}{\sigma}(1 - e^{-\sigma\frac{t-z}{2}}) + \frac{\lambda}{2c_0(0)}(2\|\varphi_6\|_\sigma + \|\varphi_3\|_\sigma + 2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma))\frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma z} - e^{-\sigma t})$$

$$+\frac{1}{2}(2\|\varphi_6\|_\sigma + \|\varphi_3\|_\sigma + 2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)\|\varphi_1\|_\sigma \frac{1}{\sigma}(1 - e^{-\sigma\frac{t-z}{2}})T$$

$$\leq 2\|\varphi_0\| \left[\frac{1}{2}G + H_0 + (3+2|r_{00}|)(\frac{\lambda}{2c_0(0)} + T\|\varphi_0\|)\right]\frac{1}{\sigma} := 2\|\varphi_0\|\chi_2(m, G, H_0, r_{00}, T, \|\varphi_0\|)\frac{1}{\sigma},$$

$H_0 := \max\limits_{z\in[0,T/2]} |H(z,\nu,\lambda)|\,,\ G := \max\limits_{t\in[0,T]} |\widehat{g}_0(t,\nu,\lambda)|\,.$

Таким образом, для всех уравнений системы (2.26) получаем

$$||A_j\varphi - \varphi_{0j}||_\sigma \leq 2\|\varphi_0\|\chi_j\frac{1}{\sigma}, \quad j = 1,2,\ldots,9$$

(χ_j – соответствующие константы, зависящие от тех же величин, что и χ_2).

Выбирая $\sigma \geq \sigma_0 := 2\max\limits_{1\leq j\leq 9}\{\chi_j\}$, получим, что A переводит шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ в шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$.

Пусть теперь φ^1, φ^2 — любые два элемента из $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$\begin{aligned}\left|\varphi_i^1\varphi_j^1 - \varphi_i^2\varphi_j^2\right| e^{-\sigma t} &\leq \left|\varphi_i^1\right|\left|\varphi_j^1 - \varphi_j^2\right| e^{-\sigma t} + \left|\varphi_j^2\right|\left|\varphi_i^1 - \varphi_i^2\right| e^{-\sigma t}\\ &\leq 4\|\varphi_0\|\left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|_\sigma,\end{aligned}$$

получим

$$\left\|A\varphi^1 - A\varphi^2\right\|_\sigma \leq \frac{\sigma_{00}}{\sigma}\left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|_\sigma,$$

где σ_{00} определяется так же, как и σ_0 (единственное отличие σ_{00} от σ_0 состоит в том, что входящая в коэффициенты χ_j постоянная $\|\varphi_0\|$ удваивается [18]).

Если число σ выбрано из условия $\sigma > \sigma^* := \max\{\sigma_0, \sigma_{00}\}$, то оператор A является сжимающим на $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда согласно принципу Банаха уравнение (2.26) имеет и притом единственное решение в $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$.

Так как $\widehat{k}_0(t) := \exp(r_0(0)t/2)k_0(t)$, то по найденной функции $\widehat{k}_0(t)$ функция $k_0(t)$ находится по формуле:

$$k_0(t) = \exp[-r_0(0)t/2]\widehat{k}_0(t). \tag{2.29}$$

Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Так как условия теоремы 2.1 выполнены, то решение (2.25) принадлежит множеству $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ и $\|\varphi_i\|_\sigma \leq 2\|\varphi_0\|$, $i = 1,2,\ldots,9$. Таким образом,

$$\max_{t\in[0,T]}|k_0(t)| \leq 2\|\varphi_0\|\exp\left(|r_0(0)|T\right) := K_0.$$

Пусть $\varphi^{(j)}$, $j = 1,2$ – вектор-функции, которые являются решениями (2.26) с набором данных $\left\{c_0^{(j)}(z), g_{00}^j(t,\nu,\lambda)\right\}$ соответственно. Известные функции $c_0^{(j)}(z)$, $(j = 1,2)$ входят в свободные члены интегральных уравнений (2.25) соответствующим образом через функции $H^{(j)}(z,\nu,\lambda)$, $q^{(j)}(z)$ $(j = 1,2)$. Переходя в этих выражениях к разностям $c_0^{(1)} - c_0^{(2)}$, имеем [35]

$$\|q^{(1)} - q^{(2)}\|_{C[0,T/2]} \leq C_0(m,h_0)\|c_0^{(1)} - c_0^{(2)}\|_{C^2[0,T/2]}.$$

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2.1, для $\sigma \geq \sigma^*$ получим оценку

$$\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|_\sigma \leq C_1\gamma + \frac{\sigma^*}{\sigma}\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|_\sigma, \tag{2.30}$$

$$\gamma := \|c_0^{(1)} - c_0^{(2)}\|_{C^4[0,T/2]} + \|g_{00}^{(1)} - g_{00}^{(2)}\|_{C^3[0,T]},$$

постоянная C_1 зависит от тех параметров, что и C в теореме 2.2. Из неравенств (2.28) и (2.30) следует оценка

$$\left\|\widehat{k}_0^{(1)} - \widehat{k}_0^{(2)}\right\| \leq C_2\gamma,$$

с постоянной $C_2 = \sigma C_1/(\sigma - \sigma^*)$. Тогда, рассматривая уравнение (2.29) для $\left\{k_0^{(1)}, \widehat{k}_0^{(2)}\right\}$, $\left\{k_0^{(1)}, \widehat{k}_0^{(2)}\right\}$ и используя (2.30), получим оценку (2.25).

3. Задача определения функций $a_1(x_3), k_1(t)$ и $u_1(x,t)$

Далее для краткой записи определим билинейный интегральный оператор L по формуле

$$L\left[k_0(t), u(x,t)\right] = u(x,t) + \int_0^t k_0(t-\tau)u(x,\tau)d\tau.$$

В дальнейшем иногда не будем в операторе L указывать зависимость функций от переменных, подразумевая зависимость первой функции от переменной t, а второй – от x, t или x_3, t, ν, λ.

В равенствах (1.11)–(1.14) перейдем от функций $u_1(x,t)$ и $u_0(x,t)$ к их образам Фурье $\tilde{u}_j(x_3,t,\nu,\lambda) := F_{x_1,x_2}[u_j](x_3,t,\nu,\lambda)$, $j = 0, 1$.

Тогда обратная задача (1.11)–(1.14) в терминах функции $\tilde{u}_1$ перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial t^2} = L\left[k_0, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(a_0(x_3)\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3}\right) - (\nu^2+\lambda^2)a_0(x_3)\tilde{u}_1\right]$$

$$+L\left[k_0, i\frac{\partial}{\partial x_3}\left(a_1(x_3)\frac{\partial \tilde{u}_{0\lambda}}{\partial x_3}\right) - i\lambda a_1(x_3)\tilde{u}_0 - i(\lambda^2+\nu^2)a_1(x_3)\tilde{u}_{0\lambda}\right]$$

$$+i\int_0^t k_1(t-\tau)\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(a_0(x_3)\frac{\partial \tilde{u}_{0\nu}}{\partial x_3}\right) - a_0(x_3)\left[2\nu\tilde{u}_0 + (\lambda^2+\nu^2)\tilde{u}_{0\nu}\right]\right](x_3,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau, \quad (3.1)$$

$$u_1 \mid_{t<0} \equiv 0, \quad (3.2)$$

$$\left(L\left[k_0, ia_1(+0)\frac{\partial \tilde{u}_{0\lambda}}{\partial x_3} + a_0(+0)\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3}\right] - ia_0(+0)\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial \tilde{u}_{0\nu}}{\partial x_3}(x_3,\tau,\nu,\lambda)d\tau\right)\Big|_{x_3=+0} = 0, \quad (3.3)$$

$$\tilde{u}_1(0,t,\nu,\lambda) = F_{x_1,x_2}[U_1](t,\nu,\lambda) := g_1(t,\nu,\lambda),\ t>0 \quad (3.4)$$

(в равенствах (3.1), (3.3) нижний индекс ν (λ) обозначает операцию дифференцирования по соответствующему параметру.

Пусть

$$V(z,t,\nu,\lambda) = L\left[k_0, \tilde{u}_1(\phi^{-1}(z),t,\nu,\lambda)\sqrt{\frac{c_0(z)}{c_0(0)}}\right]\exp\left(r_0(0)t/2\right).$$

Тогда (3.1)–(3.4) для $z>0,\ t\in R$ примут вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}+H(z,\nu,\lambda)V-\int_0^t h(t-\tau)V(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau-i\lambda c_1(z)w-i\left(\lambda^2+\nu^2\right)c_1(z)w_\lambda$$

$$+ic_1'(z)\left[q_1(z)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}-\frac{1}{2}q_2(z)w_\lambda\right]+ic_1(z)\left[q_1(z)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial z^2}-2q_2(z)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}+q_3(z)w_\lambda\right]$$

$$+i\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)\left[\frac{\partial^2 v_\nu}{\partial z^2}+[q(z)-(\lambda^2+\nu^2)c_0^2(z)]v_\nu-2\nu c_0^2(z)v(z,\tau,\nu)\right]d\tau,\quad (3.5)$$

$$V\mid_{t<0}\equiv 0,\qquad (3.6)$$

$$\left(ia_1(+0)\left[\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}-\frac{c_0'(+0)}{2c_0(+0)}w_\lambda\right]+\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{c_0'(+0)}{2c_0(+0)}V\right]\right.$$

$$\left.+i\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)\left[\frac{\partial v_\nu}{\partial z}-\frac{c_0'(+0)}{2c_0(+0)}v_\nu\right]d\tau\right)\Bigg|_{z=+0}=0,\qquad (3.7)$$

$$V\mid_{z=+0}=L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(t,\nu,\lambda)\right],\qquad (3.8)$$

где

$$c_1(z):=a_1(\phi^{-1}(z)),$$

$$q_1(z):=\frac{1}{c_0^2(z)},\ q_2(z):=\frac{c_0'(z)}{c_0^3(z)},\ q_3(z):=\frac{5[c_0'(z)]^2-2c_0''(0)c_0(z)}{4c_0^4(z)},\qquad (3.8')$$

$$\widehat{g}_1(t,\nu,\lambda)=g_1(t,\nu,\lambda)\exp(r_0(0)t/2).$$

В силу (2.1) и (2.7)

$$v=\exp(k_0(0)t/2)\left[\frac{1}{c_0(0)}\delta(t-z)+\tilde{w}(z,t,\nu,\lambda)\theta(t-z)\right]$$

$$+\int_0^t r_0(t-\tau)\exp(k_0(0)\tau/2)\left[\frac{1}{c_0(0)}\delta(\tau-z)+\tilde{w}(z,\tau,\nu,\lambda)\theta(\tau-z)\right]d\tau,$$

(далее знак ˜ над w будет опущен)

$$v_\nu=\exp(k_0(0)t/2)\left[w_\nu(z,t,\nu,\lambda)\theta(t-z)\right]+\int_z^t r_0(t-\tau)w_\nu(z,\tau,\nu,\lambda)\exp(k_0(0)\tau/2)\,d\tau.$$

Заметим, что для функции w_ν справедлива начально-краевая задача, получаемая дифференцированием равенств (2.8)–(2.11) по параметру ν:

$$\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2}+H(z,\nu,\lambda)w_\nu+H_\nu(z,\nu)w-\int_z^t h(t-\tau)w_\nu(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau,\qquad (3.9)$$

$$w_\nu|_{t=z+0} = \beta_\nu(z,\nu), \tag{3.10}$$

$$\left(\frac{\partial w_\nu}{\partial z} - \frac{c_0'(z)}{2c_0(z)} w_\nu\right)\Big|_{z=+0} = 0, \tag{3.11}$$

$$w_\nu|_{z=+0} = L[\widehat{k}_0, \widehat{g}_{0\nu}(t,\nu,\lambda)]. \tag{3.12}$$

Тогда с учетом вышеизложенного, имеем

$$\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial v_\nu}{\partial z}\,d\tau$$

$$= \int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)\left[\frac{\partial w_\nu}{\partial z}(z,\tau,\nu,\lambda) + \int_z^\eta \widehat{r}_0(\tau-\eta)\frac{\partial w_\nu}{\partial z}(z,\eta,\nu,\lambda)d\eta\right]d\tau, \tag{3.13}$$

где $\widehat{k}_1(t) := k_1(t)\exp(r_0(0)t/2)$, $\widehat{r}_0(t) := r_0(t)\exp(r_0(0)t/2)$,

$$\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial^2 v_\nu}{\partial z^2}\,d\tau$$

$$= \int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)\left[\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2} + \int_z^\tau \widehat{r}_0(\tau-\eta)\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2}(z,\eta,\nu,\lambda)\,d\eta\right]d\tau, \tag{3.14}$$

$$\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)[q(z)-(\lambda^2+\nu^2)c_0^2(z)]v_\nu d\tau$$

$$= \int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)[q(z)-(\lambda^2+\nu^2)c_0^2(z)]\left[w_\nu(z,\tau,\nu,\lambda) + \int_z^\tau \widehat{r}_0(\tau-\eta)w_\nu(z,\eta,\nu,\lambda)d\eta\right]d\tau, \tag{3.15}$$

$$\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)2\nu c_0^2(z)v(z,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau$$

$$= \frac{2\nu}{c_0(0)}c_0^2(z)\widehat{k}_1(t-z) + \frac{2\nu}{c_0(0)}c_0^2(z)\int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)\widehat{r}_0(\tau-z)d\tau$$

$$+ \int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)2\nu c_0^2(z)\left[w(z,\tau,\nu,\lambda) + \int_z^\tau \widehat{r}_0(\tau-\eta)w(z,\eta,\nu,\lambda)d\eta\right]d\tau, \tag{3.16}$$

Принимая во внимание (3.11), (3.13)–(3.16), можно переписать задачу (3.5)–(3.8) в следующем виде для $z > 0,\ t \in R$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + H(z,\nu,\lambda)V - \int_z^t h(t-\tau)V(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau + \nu\tilde{c}(z)\widehat{k}_1(t-z)$$

$$-i\lambda c_1(z)\left(\frac{1}{c_0(0)}\delta(t-z) + w(z,t,\nu,\lambda)\theta(t-z)\right) - i(\lambda^2+\nu^2)c_1(z)w_\lambda(z,t,\nu,\lambda)$$

$$+ic_1'(z)\left[q_1(z)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}-\frac{1}{2}q_2(z)w_\lambda\right]+ic_1(z)\left[q_1(z)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial z^2}-2q_2(z)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}+q_3(z)w_\lambda\right]$$

$$+\int_z^t p(z,\tau,\nu,\lambda)\widehat{k}_1(t-\tau)\,d\tau, \tag{3.17}$$

$$V\mid_{t<0}\equiv 0, \tag{3.18}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{c_0'(+0)}{2c_0(+0)}V\right)\Big|_{z=+0}=0, \tag{3.19}$$

$$V\mid_{t=z}=0, \tag{3.20}$$

$$V\mid_{z=0}=L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(t,\nu,\lambda)\right], \tag{3.21}$$

где

$$\tilde{c}(z)=i\frac{2}{c_0(0)}c_0^2(z),\quad p(z,t,\nu,\lambda)=\tilde{c}(z)\widehat{r}_0(t-z)$$

$$-iL_0\left[\widehat{r}_0,\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2}(z,t,\nu,\lambda)+[q(z)-(\lambda^2+\nu^2)c_0^2(z)]w_\nu(z,t,\nu,\lambda)-2\nu c_0^2(z)w(z,t,\nu,\lambda)\right].$$

(в определении $p(z,\tau,\nu,\lambda)$ оператор L_0 отличается от оператора L тем, что нижний индекс в интеграле оператора заменен на z).

Таким образом, мы свели обратную задача определения $a_1(x_3), k_1(t)$ из равенств (1.11)–(1.14) к задаче определения $c_1(z), \widehat{k}_1(t)$ из равенств (3.17)–(3.21).

С помощью формулы Даламбера, получаем для $t>z$

$$V(z,t,\nu,\lambda)=\frac{1}{2}\left(L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(t-z,\nu,\lambda)\right]+L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(t+z,\nu,\lambda)\right]\right)$$

$$-\frac{c_0'(0)}{4c_0(0)}\int\limits_{t-z}^{t+z}L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau-\frac{i\lambda}{2c_0(0)}\int\limits_{\frac{t-z}{2}}^{\frac{t+z}{2}}c_1(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^z\int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Bigg\{\nu\tilde{c}(\xi)\widehat{k}_1(\tau-\xi)+H(\xi,\nu,\lambda)V(\xi,\tau,\nu,\lambda)$$

$$-c_1(\xi)N(\xi,\tau,\nu,\lambda)+ic_1'(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda)-\frac{1}{2}q_2(\xi)w_\lambda(\xi,\tau,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_\xi^\tau\left[h(\tau-\eta)V(\xi,\eta,\nu,\lambda)+\widehat{k}_1(\tau-\eta)p(\xi,\eta,\nu,\lambda)\right]d\eta\Bigg\}d\tau d\xi:=F[V,c_1,c_1',\widehat{k}_1], \tag{3.22}$$

где

$$N(\xi,\tau,\nu,\lambda):=i\Big[\lambda w(\xi,\tau,\nu,\lambda)+(\lambda^2+\nu^2)w_\lambda$$

$$-q_1(\xi)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial z^2}(\xi,\tau,\nu) + 2q_2(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda) - q_3(\xi)w_\lambda(\xi,\tau,\nu,\lambda)\Big].$$

Переходя в равенстве (3.22) к пределу $t \to z+0$ с учетом $V|_{t=z} = 0$, имеем

$$-L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_1(2z,\nu,\lambda)\right] + \frac{c_0'(0)}{2c_0(0)}\int\limits_0^{2z} L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_1(\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau = -\frac{i\lambda}{c_0(0)}\int\limits_0^{z} c_1(\xi)d\xi$$

$$+\int\limits_0^{z}\int_\xi^{2z-\xi}\Bigg\{\nu\tilde{c}(\xi)\widehat{k}_1(\tau-\xi) + H(\xi,\nu,\lambda)V(\xi,\tau,\nu,\lambda)$$

$$-c_1(\xi)N(\xi,\tau,\nu,\lambda) + ic_1'(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda) - \frac{1}{2}q_2(\xi)w_\lambda(\xi,\tau,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_\xi^\tau\left[h(\tau-\eta)V(\xi,\eta,\nu,\lambda) + \widehat{k}_1(\tau-\eta)p(\xi,\eta,\nu,\lambda)\right]d\eta\Bigg\}d\tau d\xi. \qquad (3.23)$$

Из (3.23) следует, что $\widehat{g}_1(0,\nu,\lambda) = 0$. Заменяя $2z$ на t и дифференцируя (3.23) по t, получаем

$$-L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_1'(t,\nu,\lambda)\right] + \frac{c_0'(0)}{2c_0(0)}L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_1(t,\nu,\lambda)\right] = -\frac{i\lambda}{2c_0(0)}c_1(t/2)$$

$$+\int\limits_0^{t/2}\Bigg\{\nu\tilde{c}(\xi)\widehat{k}_1(t-2\xi) + H(\xi,\nu,\lambda)V(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)$$

$$-c_1(\xi)N(\xi,t-\xi,\nu,\lambda) + ic_1'(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda) - \frac{1}{2}q_2(\xi)w_\lambda(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_0^{t-2\xi}\left[h(\tau)V(\xi,t-\xi-\eta,\nu,\lambda) + \widehat{k}_1(\tau)p(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda)\right]d\eta\Bigg\}d\tau d\xi. \qquad (3.24)$$

Очевидно, что $c_1(0) = \frac{2c_0(0)}{i\lambda}\widehat{g}_1'(0,\nu,\lambda)$. Дифференцируя (3.24) по t, затем подставляя последовательно значения λ_1, λ_2 и составляя разность полученных равенств при фиксированном заданном ν, можно получить уравнение для $c'(z)(z=t/2)$:

$$c_1'(z) = \frac{1}{M(z)}\Delta_\lambda\left\{L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_{1\lambda}'(2z,\nu,\lambda)\right]' - \frac{c_0'(0)}{2c_0(0)}L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_{1\lambda}'(2z,\nu,\lambda)\right]\right\}$$

$$-\underbrace{\frac{2\Delta_\lambda\{N(z,z,\nu,\lambda)\}}{M(z)}}_{\widetilde{N}_\lambda(z,\nu,\lambda)}c_1(z) + \frac{1}{M(z)}\int\limits_0^{z}\Delta_\lambda\Bigg\{H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial V}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda) - c_1(\xi)\frac{\partial N}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)$$

$$+ic_1'(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda) - \frac{1}{2}q_2(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_0^{2z-2\xi}\left[h(\tau)\frac{\partial V}{\partial t}(\xi,2z-\xi-\tau,\nu,\lambda)+\widehat{k}_1(\tau)\frac{\partial p}{\partial t}(\xi,2z-\xi-\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau\Bigg\}d\xi, \qquad (3.25)$$

где $\Delta_\lambda\{\cdot\}$ – это разность значений выражения в скобках при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$. В частности, $\Delta_\lambda\{N(z,z,\nu,\lambda)\}:=N(z,z,\nu,\lambda_1)-N(z,z,\nu,\lambda_2)$. Далее по аналогии под $\Delta_\nu\{\cdot\}$ будем подразумевать разность значений для ν_1,ν_2.

Заметим, что с учетом (3.8′)

$$M(z):=i(\lambda_1-\lambda_2)\left[1+\frac{1}{4c_0(0)}-\frac{c_0'(z)}{2c_0^3(z)}\int_0^z c_0^2(\xi)d\xi\right]\neq 0$$

при выполнении условия $c_0'(z)\le 0,\lambda_1\neq\lambda_2$.

Далее, дифференцируя уравнение (3.24) по t (предварительно сделав замену переменной в первом интеграле $t-2\xi=\tau$), затем подставляя значения параметра ν_1,ν_2 ($\nu_1\neq\nu_2$) и составляя разность при фиксированном заданном значении λ, получаем уравнение для $\widehat{k}_1(t)$ $(t/2=z)$:

$$\widehat{k}_1(t)=-\frac{2}{\tilde{c}(0)(\nu_1-\nu_2)}\Delta_\nu\left\{L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_{1\nu}'(t,\nu,\lambda)\right]+\frac{ic_0'(0)}{c_0(0)}L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_{1\nu}'(t,\nu,\lambda)\right]\right\}$$

$$+\underbrace{\frac{\Delta_\nu\{2N(z,z,\nu,\lambda)\}}{\tilde{c}(0)(\nu_1-\nu_2)}}_{\widetilde{N}(z,\nu,\lambda)}c_1(z)-\frac{2}{\tilde{c}(0)(\nu_1-\nu_2)}\int\limits_0^z\Delta_\nu\Bigg\{H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial V}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)$$

$$-c_1(\xi)\frac{\partial N}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)+ic_1'(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda)-\frac{1}{2}q_2(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_0^{t-2\xi}\left[h(\tau)\frac{\partial V}{\partial t}(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda)+\widehat{k}_1(\tau)\frac{\partial p}{\partial t}(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau\Bigg\}d\xi. \qquad (3.26)$$

Для замыкания системы интегральных уравнений (3.22), (3.25), (3.26) используются очевидные равенства для $c_1(z)$:

$$c_1(z)=c_1(0)+\int_0^z c_1'(\xi)d\xi \qquad (3.27)$$

и для $\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)$, которое получается непосредственным дифференцированием по t уравнения (3.22):

$$\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)=\frac{\partial}{\partial t}F[V,c_1,c_1',\widehat{k}_1]. \qquad (3.28)$$

Уравнения (3.22), (3.25)–(3.28) эквиваленты равенствам (3.17)–(3.20) и образуют замкнутую линейную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода в области D_T относительно $V(z,t,\nu,\lambda)$, $\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)$, $c_1(z)$, $c_1'(z)$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится тот факт, что функции $N(z,t,\nu,\lambda),p(z,t,\nu,\lambda)\in C^1[D_T]$. Следовательно, необходимо показать, что $w_\lambda,\ w_\nu\in C^3[D_T]$.

Действительно, с помощью формулы Даламбера для задачи (3.13), (3.15), (3.16) получим линейное интегральное уравнение Вольтерровского типа с непрерывным свободным членом и непрерывным ядром в области D_T:

$$w_\nu = \frac{1}{2}\left(L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_{0\nu}(t-z,\nu)\right] + L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_{0\nu}(t+z,\nu)\right]\right) + \frac{c_0'(0)}{4c_0(0)}\int\limits_{t-z}^{t+z} L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_1(\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Bigg\{H(\xi,\nu)w_\nu(\xi,\tau,\nu) + H_\nu(\xi,\nu)w(\xi,\tau,\nu)$$

$$-\int_\xi^\tau h(\tau-\eta)w_\nu(\xi,\eta,\nu))d\eta\Bigg\}d\tau d\xi. \tag{3.29}$$

Из теории интегральных уравнений следует, что уравнение (3.29) имеет единственное решение, непрерывное в D_T. Степень гладкости решения устанавливается при помощи дифференцирования уравнения (3.29) достаточное количество раз. Легко проверяется, что правая часть продифференцированного уравнения будет непрерывной, а следовательно, будет непрерывна и левая часть [30, гл.2]. Таким образом, $w_\nu \in C^3[D_T]$.

Аналогично доказывается тот факт, что $w_\lambda \in C^3[D_T]$.

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы однозначной разрешимости и устойчивости обратной задачи определения $a_1(y)$, $k_1(t)$.

Теорема 3.1 *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и* $g_1(t,\nu,\lambda) \in C^2[0,T]$ *при фиксированных ненулевых* (ν,λ), *и* $g_1(0,\nu,\lambda) \equiv 0$, $g_1'(0,\nu,\lambda) \equiv \frac{i\lambda c_1(0)}{2c_0(0)}$, $c_0'(z) \le 0$. *Тогда существует единственное решение обратной задачи (1.11)–(1.14)* $c_1(z) \in C^1[0,T/2], k_1(t) \in C[0,T]$ *для любого фиксированного* $T > 0$.

Теорема 3.2. *Пусть* $c_1^{(1)}(z), c_1^{(2)}(z) \in C^1[0,T/2]$, $k_1^{(1)}(t), k_1^{(2)}(t) \in C[0,T]$ *– решения обратной задачи (1.11)–(1.14) с набором данных*

$$\left\{c_0^{(j)}(z),\ g_1^{(j)}(t,\nu,\lambda),\ k_0^{(j)}(t),\ \tilde{u}_0^{(j)}(\phi^{-1}(x_3),t,\nu,\lambda)\right\}$$

для $j = 1,2$ *соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 2.2 найдется такое положительное число* $\widetilde{C} = \widetilde{C}(C, h_1(\nu,\lambda))$, $h_1(\nu,\lambda) = \max\left\{\|g_1^{(j)}(t,\nu,\lambda)\|_{C^2[0,T]}, \|N^{(j)}(z,t,\nu,\lambda)\|_{C^1(D_T)}, \|p^{(j)}(z,t,\nu,\lambda)\|_{C^1(D_T)},\ j = 1,2\right\}$, *что справедлива оценка устойчивости*

$$\|c_1^{(1)} - c_1^{(2)}\|_{C^1[0,T/2]} + \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_{C[0,T]} \le \widetilde{C}\Big[\|c_0^{(1)} - c_0^{(2)}\|_{C[0,T/2]}$$

$$+\|\tilde{g}_1^{(1)} - \tilde{g}_1^{(2)}\|_{C^2[0,T]} + \|k_0^{(1)} - k_0^{(2)}\|_{C[0,T]}\Big]. \tag{3.31}$$

Доказательство теоремы 3.1 Система интегральных уравнений (3.22), (3.25)–(3.28) является замкнутой линейной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными свободными членами и ядрами относительно неизвестных функций в области D_T. Идея доказательства существования единственного решения данной системы состоит в применении обобщенного принципа сжатых отображений. Запишем систему (3.22), (3.25)–(3.28) в виде операторного уравнения

$$\psi = B\psi, \tag{3.32}$$

$$\psi := \Big[\underbrace{V(z,t,\nu,\lambda) + \frac{1}{2c_0(0)}\int_{\frac{t-z}{2}}^{\frac{t+z}{2}} c_1(\xi)d\xi}_{\psi_1},\ \underbrace{c_1'(z) + \widetilde{N}_\lambda(z,\nu,\lambda)c_1(z)}_{\psi_2},$$

$$\underbrace{\widehat{k}_1(2z) - \widetilde{N}_\nu(z,\nu,\lambda)c_1(z)}_{\psi_3},\ \underbrace{c_1(z)}_{\psi_4},$$

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda) + \frac{1}{2c_0(0)}\Big[c_1\left(\frac{t+z}{2}\right) - c_1\left(\frac{t-z}{2}\right)\Big] + \frac{\nu}{2}\widehat{k}_1(z)\int_0^z \tilde{c}(\xi)d\xi}_{\psi_5}\Big].$$

Тогда неизвестные функции $V(z,t,\nu,\lambda)$, $c_1'(z)$, $\widehat{k}_1(2z)$, $\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)$ могут быть определены через компоненты вектор-функции ψ:

$$V(z,t,\nu,\lambda) = \psi_1(\xi,\tau,\nu) + \frac{1}{2c_0(0)}\int_{\frac{\tau-\xi}{2}}^{\frac{\tau+\xi}{2}} \psi_4(s)ds,$$

$$c_1'(z) = \psi_2(z,\nu,\lambda) - \widetilde{N}_\lambda(z,\nu,\lambda)\psi_4(z),$$

$$\widehat{k}_1(2z) = \psi_3(z,\nu,\lambda) + \widetilde{N}_\nu(z,\nu,\lambda)\psi_4(z),$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda) = \psi_5(z,t,\nu,\lambda) - \frac{1}{2c_0(0)}\Big[\psi_4\left(\frac{t+z}{2}\right) - \psi_4\left(\frac{t-z}{2}\right)\Big]$$
$$-\frac{\nu}{2}\Big[\psi_3(z/2,\nu,\lambda) + \widetilde{N}_\nu(z/2,\nu,\lambda)\psi_4(z/2)\Big]\int_0^z \tilde{c}(\xi)d\xi.$$

Оператор $B = (B_1, B_2, B_3, B_4, B_5)$ определен на множестве функций $\psi \in C(D_T)$ при фиксированных ν, λ.

Покажем теперь, что некоторая степень n (n – натуральное число) линейного отображения $B\psi$ является сжатием. Положим

$$\|\psi\| = \max\{\max_{(z,t)\in D_T} |\psi_j(z,t,\nu,\lambda))|,\ j = 1,...,5\}.$$

Пусть $\psi^{(1)}, \psi^{(2)}$ – две непрерывные вектор-функции в D_T, удовлетворяющие линейной системе интегральных уравнений (3.32). Обозначим

$$\Delta(z,t) = \{(\xi,\tau):\ 0 \le \xi \le z,\ t - z + \xi \le \tau \le t + z - \xi\},$$

$$\Sigma(z,t,\xi)=\{\tau:\ (\xi,\tau)\in\Delta(z,t)\}.$$

Тогда в силу линейности из (3.32) для $(z,t)\in D_T$ в соответствии с уравнениями (3.22), (3.25)–(3.28) имеем (в последующих оценках для краткости будут опущены в списке аргументов параметры преобразования ν,λ)

$$|B_1\psi^{(1)}-B_1\psi^{(2)}|(z,t)$$

$$\leq \mu_1\int_0^z \max\Big\{\max_{\tau\in\Sigma(z,t,\xi)}|\psi_1^{(1)}(\xi,\tau)-\psi_1^{(2)}(\xi,\tau)|,|\psi_j^{(1)}(\xi)-\psi_j^{(2)}(\xi)|\Big\}\,d\xi$$

$$\leq \mu_1 z\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,\ j=2,3,4,$$

далее

$$|B_l\psi^{(1)}-B_l\psi^{(2)}|(z)$$

$$\leq \mu_2\int_0^z \max\Big\{|\psi_5^{(1)}(\xi,T-\xi)-\psi_5^{(2)}(\xi,T-\xi)|,|\psi_j^{(1)}(\xi)-\psi_j^{(2)}(\xi)|\Big\}\,d\xi$$

$$\leq \mu_l z\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,\ j=2,3,4;\ l=2,3;$$

$$|B_4\psi^{(1)}-B_4\psi^{(2)}|(z)\leq \mu_4\int_0^z \max\Big\{|\psi_2^{(1)}(\xi)-\psi_2^{(2)}(\xi)|,|\psi_4^{(1)}(\xi)-\psi_4^{(2)}(\xi)|\Big\}d\xi$$

$$\leq \mu_4 z\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,$$

$$|B_5\psi^{(1)}-B_5\psi^{(2)}|(z,t)$$

$$\leq \mu_5\int_0^z \max\Big\{\max_{\tau\in\Sigma(z,t,\xi)}|\psi_1^{(1)}(\xi,\tau)-\psi_1^{(2)}(\xi,\tau)|,|\psi_j^{(1)}(\xi)-\psi_j^{(2)}(\xi)|\Big\}\,d\xi$$

$$\leq \mu_5 z\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,\ j=2,3,4,$$

где μ_j – константы, зависящие от величин, входящих в $\widetilde{C}$ (теорема 3.2).

Полагая $\widetilde{M}=\max\{\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4,\mu_5\}$, получаем, что

$$\max_{1\leq j\leq 5}|B_j\psi^{(1)}-B_j\psi^{(2)}|(z,t)\leq \widetilde{M}z\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,\quad (z,t)\in D_T.$$

Далее

$$|B_1^2\psi^{(1)}-B_1^2\psi^{(2)}|(z,t)$$

$$\leq \mu_1\int_0^z \max\Big\{\max_{\tau\in\Sigma(z,t,\xi)}|B_1\psi^{(1)}(\xi,\tau)-B_1\psi^{(2)}(\xi,\tau)|,|B_j\psi^{(1)}(\xi)-B_j\psi^{(2)}(\xi)|\Big\}\,d\xi$$

$$\leq \mu_1\widetilde{M}\int_0^z \xi\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|\,d\xi\leq \mu_1\widetilde{M}\frac{z^2}{2!}\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,\ j=2,3,4,$$

аналогично

$$|B_j^2\psi^{(1)}-B_j^2\psi^{(2)}|(z)\leq \mu_j\widetilde{M}\int_0^z \xi\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|\,d\xi\leq \mu_j\widetilde{M}\frac{z^2}{2!}\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,\ j=2,3,4,5.$$

Отсюда

$$\max_{1\le j\le 5}|B_j^2\psi^{(1)}-B_j^2\psi^{(2)}|(z,t,\nu)\le \widetilde{M}^2\frac{z^2}{2!}\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,\quad (z,t)\in D_T.$$

и, вообще,

$$\max_{1\le j\le 5}|B_j^n\psi^{(1)}-B_j^n\psi^{(2)}|(z,t,\nu)\le \widetilde{M}^n\frac{z^n}{n!}\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,\quad (z,t)\in D_T,$$

$$\|B^n\psi^{(1)}-B^n\psi^{(2)}\|\le \widetilde{M}^n\frac{(\frac{T}{2})^n}{n!}\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|.$$

При любом фиксированном T число n можно выбрать настолько большим, что

$$\widetilde{M}^n\frac{(\frac{T}{2})^n}{n!}:=\alpha<1.$$

Тогда отображение B^n является сжатием. Согласно обобщению принципа сжимающих отображений уравнение $B\psi=\psi$ имеет одно и только одно решение, принадлежащее $C(D_T)$. Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство теоремы 3.2.

Пусть $\psi^{(j)}$ – вектор функций, которые являются решениями (3.32) с набором данных $\left\{c_0^{(j)}(z),\, g_1^{(j)}(t),\, k_0^{(j)}(t),\, w^{(j)}(z,t)\right\}$, $j=1,2$, соответственно, т.е. справедливы уравнения $\psi^{(j)}=B\psi^{(j)}$.

Далее, известная функция $c_0^{(j)}(z)$, $j=1,2$ входит в свободные члены этих интегральных уравнений соответствующим образом через функцию $1/M(z)$, которая может быть оценена как $|1/M(z)|<1/|\lambda_1-\lambda_2|$, и функцию $N(z,z,\nu,\lambda)$. Переходя к разностям $c_0^{(1)}-c_0^{(2)}$, подобно тому, как это сделано в теореме 2.2, из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 3.1, получим оценку

$$\left\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\right\|\le\mu_0\gamma+\alpha\left\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\right\|, \tag{3.33}$$

где

$$\gamma:=\|c_0^{(1)}-c_0^{(2)}\|_{C^1[0,T/2]}+\|g_1^{(1)}-g_1^{(2)}\|_{C^2[0,T]}+\|k_0^{(1)}-k_0^{(2)}\|_{C[0,T]}$$

и постоянная μ_0 зависит от величин, входящих в $\widetilde{C}$. Из равенства (3.33) следует, что

$$\left\|\varphi^{(1)}-\varphi^{(2)}\right\|\le\widetilde{\mu}\gamma$$

с постоянной $\widetilde{\mu}=\mu_0/(1-\alpha)$.

Рассматривая уравнение $k_1(t)=\exp[k_0(0)t/2]\widehat{k}_1(t)$ для $\left\{k_1^{(1)},\widehat{k}_1^{(1)}\right\}$, $\left\{k_1^{(2)},\widehat{k}_1^{(2)}\right\}$ и используя (3.33), получаем оценку (3.31). Теорема 3.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A. and Sinestrari E.* An inverse problem in the theory of materials with memory I, Nonlinear Anal. TMA. 1988. V. 12. P. 1217–1335.

2. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью // Матем. анализ и дискретная математика. Новосибирск, изд-во Новосибирского университета: 1989. С. 19–27.

3. *Grasselli M., Kabanikhin S.I., Lorentsi A.* An inverse problem for an integro-differential equation // Sibirsk. Mat. Zh. 1992. V. 33, N 3. P. 58–68; Siberian Math. J. 1992. V. 33, N 3. P. 41–426.

4. *Bukhgeym A. L.* Inverse problems of memory reconstruction // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 1993. V. 1, N 3. P. 193–206.

5. *Graselli M.* Determining the relaxation tensor in linear viscoelasticity of integral type // Japan J. Industrial Appl. Math. 1994, V. 11. P. 131–153. http://dx.doi.org/10.1007/BF03167305

6. *Cavaterra C. and Grasselli M.* Idendifying memory kernels in linear thermoviscoelasticity of Boltzmann type// Mathematical Models and Methods in Applied Sciences. 1994. V. 4, N 6. P. 807–842. http://dx.doi.org/10.1142/S0218202594000455

7. *Дурдиев Д. К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журнал. 1994. Т. 35, N 3. С. 574–582.

8. *Bukhgeim A. L., Dyatlov G. V.* Inverse problems for equations with memory // SIAM J. Math. Fool. 1998. V. 1, N 2. P. 1–17.

9. *Durdiev D. K., Totieva Z. D.* Kernel Determination Problems in Hyperbolic Integro-Differential Equations, Springer Nature Singapore Pte Ltd, Series title «Infosys Science Foundation Series in Mathematical Sciences», 2023, P. 368. https://doi.org/10.1007/978-981-99-2260-4

10. *Janno J. and von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. methods in Appl. Sciences. 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.

11. *Janno J. and Von Wolfersdorf L.* An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity // Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 13–24.

12. *Lorenzi A., Messina F., Romanov V. G.* Recovering a Lame kernel in a viscoelastic system // Applicable Analysis. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.

13. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Recovering a Lame kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Applicable Analysis. 2010. V. 89, N 3. P. 377–390.

14. *Lorenzi A. and Romanov V. G.* Recovering two Lame Kernels in a Viscoelastic System // Inverse Probl. Imaging. 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.

15. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача для уравнения вязкоупругости // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53, N 6. С. 1401–1412. https://doi.org/10.1134/S0037446612060171.

16. *Romanov V. G.* Inverse problems for differential equations with memory // Eurasian J. of Mathematical and Computer Applications. 2014. V. 2, N 4. P. 51–80

17. *Романов В. Г.* Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, N 3. С. 617–626. http://mi.mathnet.ru/smj2558.

18. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сибирский математический журнал. 2017. т.58, N 3. С. 553-572. https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.307.

19. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А.* Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // ТМФ. 2018. Т. 195, N 3. С. 491–506. https://doi.org/10.4213/tmf9480.

20. *Karchevsky A. L., Fatianov A. G.* Numerical solution of the inverse problem for a system of elasticity with the aftereffect for a vertically inhomogeneous medium // Sib. Zh. Vychisl. Mat. 2001. T.4, N 3. P. 259–268. http://mi.mathnet.ru/sjvm399.

21. *Durdiev U. D.* Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory// Sib. Elektron. Mat. Izv. 2020. T. 17, P. 179–189. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.013.

22. *Bozorov Z. R.* Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2020. T. 8, N 2. P. 4–16.

23. *Davies A. R. and Douglas R. J.* A kernel approach to deconvolution of the complex modulus in linear viscoelasticity // Inverse Problems. 2020. V. 36, 015001.

24. *Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolic V., Rajendran L.M. and Wohlmuth B.* Determining Kernels In Linear Viscoelasticity, 2021. arXiv:2112.14071. https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.14071.

25. *Totieva Zh.D.* A global solvability of a two-dimensional kernel determination problem for a viscoelasticity equation // Mathematical Methods in the Applied Sciences. —2022. —Vol. 45, No. 12. —P. 7555–7575. DOI:10.1002/mma.8261.

26. *Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р.* Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, N 2. С. 209–221. http://mi.mathnet.ru/dvmg264.

27. *Благовещенский А. С., Федоренко Д. А.* Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т. 354. С. 81–99.

28. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении // Сиб. журн. индустр. матем 2009. Т. 12, N 3. С. 28–40.

29. *Рахмонов А. А., Дурдиев У. Д., Бозоров З. Р.* Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды // ТМФ. 2021. Т. 207, N 1. С. 112–132. https://doi.org/10.4213/tmf10035.

30. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984.

31. *Тотиева Ж. Д.* Определение ядра уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде // Сиб. матем. журн. 2020. Т 61, N 2. С. 453–475. https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.217.

32. *Добрынина А. А.* Добротность литосферы и очаговые параметры землетрясений Бакальской рифтовой системы: автореферат дисс... к.ф.-.м.н.—Новосибирск: 2011, 17 с. https://earthpapers.net/dobrotnost-litosfery-i-ochagovye-parametry-zemletryaseniy-baykalskoy-riftovoy-sistemy

33.*Вознесенский Е. А., Кушнарева Е. С., Фуникова В. В.* Природа и закономерности поглощения волн напряжений в грунтах // Вестник Московского университета. Серия 4. Геология.—2011, N 4.—С. 39-47. DOI: 10.3103/S0145875211040120

34. *Алексеев А. С., Добринский В. И.* Некоторые вопросы практического использования обратных динамических задач сейсмики // Математические проблемы геофизики.—Новосибирск: ВЦ СО АН СССР, 1975.—Вып. 6, ч. 2.—С. 7-53.

35. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1988.

Финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-27-00264, https://rscf.ru/project/23-27-00264/.

Тотиева Жанна Дмитриевна
Северо-Осетинский государственный университет
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44-46;
E-mail:jannatuaeva@inbox.ru

Томаев Марат Русланович
Северо-Осетинский государственный университет
РОССИЯ, 362025, Владикавказ, ул. Ватутина, 44-46;
E-mail:mtomaev49@inbox.ru