УДК 517.958
MSC 35L20, 35R30, 35Q99

Двумерная задача определения двух неизвестных уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде

Ж. Д. Тотиева

Аннотация

Представлена двумерная обратная задача определения двух неизвестных – скорости распространения волн и ядра для уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде. Прямая начально-краевая задача для функции смещения содержит нулевые начальные данные и граничное условие Неймана специального вида. В качестве дополнительной информации задается образ Фурье функции смещения точек среды при $x_3 = 0$. Предполагается, что искомые величины разлагаются в асимптотический ряд по степеням малого параметра. В работе построен метод нахождения двумерных коэффициента и ядра с точностью до поправки, имеющей порядок $O(\varepsilon^2)$. Доказаны теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

Ключевые слова: линейная вязкоупругость, обратная задача, дельта-функция, преобразование Фурье, ядро, коэффициент, устойчивость.

A two-dimensional inverse problem of determination of two unknowns – wave propagation velocity and kernel for a viscoelasticity equation in a weakly horizontally inhomogeneous medium is presented. The direct initial-boundary value problem for the displacement function contains zero initial data and the Neumann condition of a special form. As additional information, the Fourier image is given displacement function at $x_3 = 0$. It is assumed that the kernel decomposes into an asymptotic series. In this paper, we construct a method for determining kernel and coefficient with an accuracy of $O(\varepsilon^2)$, where ε is a small parameter. The theorems of global unique solvability and stability are proved.

Keywords: linear viscoelasticity, inverse problem, delta function, Fourier transform, kernel, coefficient, stability.

1. Постановка задачи

Рассмотрим при $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3,\ t \in \mathbb{R},\ x_3 > 0$ интегро-дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a(x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right) + \int_0^t k(x_1, t-\tau) \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(a(x_2, x_3)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(x,\tau)d\tau, \quad (1.1)$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$u\,|_{t<0} \equiv 0, \quad (1.2)$$

$$a(x_2,0)\left[\frac{\partial u}{\partial x_3}(x,t)+\int_0^t k(x_1,t-\tau)\frac{\partial u}{\partial x_3}(x,\tau)d\tau\right]\Big|_{x_3=+0}=-\delta(x_1)\delta(x_2)\delta'(t), \qquad (1.3)$$

$u(x,t)$ – функция смещения, $a(x_2,x_3)$ – коэффициент, описывающий скорость распространения волн в среде, $k(x_1,t)$ – функция памяти, учитывающая вязкие свойства среды; $\delta(\cdot)$ – дельта-функция Дирака, $\delta'(\cdot)$ – производная $\delta(\cdot)$.

Прямая задача заключается в отысканий функции $u(x,t)$ из уравнения (1.1) при соответствующих начальных и граничных условиях (1.2), (1.3).

Обратная задача: определить коэффициент $a(x_2,x_3)$ и ядро интегрального оператора $k(x_1,t),\ t>0$, входящих в (1.1), если относительно решения задачи (1.1)–(1.3) известна дополнительная информация

$$F_{x_1,x_2}[u](x_3,t,\nu,\lambda)|_{x_3=+0}=g(t,\nu,\lambda), \quad t>0,\ \nu,\lambda\in\mathbb{R}, \qquad (1.4)$$

$g(t,\nu,\lambda)$ – заданная функция,

$F_{x_1,x_2}[u](x_3,t,\nu,\lambda)=\int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x,t)e^{-i(\nu x_1+\lambda x_2)}\,dx_1\,dx_2$–образ Фурье функции $u(x,t)$ по переменным x_1,x_2 (здесь и далее i – мнимая единица).

Определение. Пара функций $a(x_2,x_3)\in C^1(\mathbb{R}\times[0,\infty)),\ k(x_1,t)\in C(\mathbb{R}\times[0,\infty))$ называется решением обратной задачи (1.1)–(1.3), если соответствующее ей решение прямой задачи (1.1)–(1.3) $u(x,t)$ из класса обобщенных функций $D'(\mathbb{R}^3_+\times\mathbb{R})$ удовлетворяет (1.4) для $g(t,\nu,\lambda)$, принадлежащей классу $D'([0,\infty))$ для фиксированного ненулевого набора (ν,λ).

Настоящее исследование относится к классу обратных задач линейной динамической вязкоупругости. Вязкоупругие среды – это среды с памятью (состояние таких сред в текущий момент времени зависит от всей предыстории процесса). Искомой величиной в поставленной задаче является скорость распространения упругих волн и ядро интегрального оператора, моделирующего явление памяти, которое имеет место при распространении волновых процессов в вязкоупругих средах.

Задачи определения ядра (зависящего от временной и пространственных переменных) – направление в теории обратных задач, возникшее в конце прошлого столетия [1–7] в связи с изучением свойств сред с памятью, в частности, новых синтетических материалов (полимеров, композитов). Ядро, от которого зависит поведение сред, не поддается непосредственному измерению, его можно определить только теоретически. Более подробный анализ источников по данному направлению представлен в монографии [8], которая является одной из последних фундаментальных работ в области исследования обратных задач для сред с памятью (или с последействием). В ней представлены результаты исследования корректности ряда постановок одномерных и многомерных обратных динамических задач для гиперболических интегро-дифференциальных уравнений, возникающих при описании внутренних характеристик сред с последействием по измерениям волнового поля в доступных областях. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости поставленных обратных задач, а также получены оценки непрерывной зависимости решений этих задач от входных данных.

Из первых результатов по обратным задачам линейной вязкоупругости (близким к данной) можно отметить [9–11]. Дальнейшее развитие исследований, в частности, за последние десять лет отражено, например, в работах [12–18]. В последние годы наблюдается увеличение количества публикаций по численным расчетам ядер интегральных операторов [19–24].

Особый интерес представляют многомерные обратные задачи по определению ядер, когда искомая функция зависит от двух и более переменных. Многомерная обратная задача для (1.1) с начальными и граничными условиями (1.2) и (1.3), дополнительной информацией (1.6) исследована в [25]. В этой работе на основе метода шкал банаховых пространств получена локальная однозначная разрешимость задачи определения ядра $k(x,t)$ в классе функций, аналитических по переменной x и гладких по переменной t.

В работе [26] рассмотрена одна модельная задача определения двумерного ядра интегро-дифференциального уравнения в среде со слабо горизонтальной неоднородностью, в которой развиты методы решения обратных задач из работы [27].

Отметим, что восстановление неизвестных характеристик для сред с последействием, несомненно, является актуальной задачей с точки зрения приложений, так как становится возможным проводить анализ влияния памяти среды на ее характеристики. При этом требуется в рамках одной задачи находить коэффициент уравнения и ядро интегрального оператора. Для практических приложений более интересным является случай, когда характеристики среды являются многомерными величинами. Например, для геофизики одним из основных вопросов является количественная оценка горизонтальных неоднородностей в скоростях сейсмических волн. Накоплены факты, свидетельствующие о существовании внутри Земли неоднородностей по географичесим координатам, или горизонтальных неоднородностей. К числу таких фактов относятся систематические отклонения годографов волн от усредненного годографа, асиметрия гравитационного и электромагнитного полей. При этом отклонения от годографов, отвечающих сферически-симметричному распределению скоростей упругих волн, достаточно малы [28].

Из работ, посвященных коэффциентным обратным задачам для вязкоупругих сред, которых одновременно (либо последовательно) определяются ядра интегральных операторов, можно отметить работы [9,29–32]. Например, в [29] изучена модельная одномерная задача одновременного определения скорости распространения волн и ядра интегрального оператора. Показывается, что обе неизвестные функции одной переменной однозначно определяются заданием образа Фурье по пространственной переменной решения прямой задачи на границе полупространства. Устанавливается оценка устойчивости решения задачи.

В данной работе, которая является продолжением исследования [33], предполагается, что $k(x_1,t)$, $a(x_2,x_3)$ слабо зависят от горизонтальных переменных x_1, x_2 соответственно:

$$\begin{aligned} a(x_2,x_3) &= a_0(x_3) + \varepsilon x_2 a_1(x_3) + O(\varepsilon^2), \\ k(x_1,t) &= k_0(t) + \varepsilon x_1 k_1(t) + O(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{1.5}$$

где ε – малый параметр.

В равенствах (1.5) будем считать $a_0(x_3)$ заданной величиной, причем $a_0(x_3) \geq m > 0$.

Основная цель данной работы – построение метода нахождения $k_0(t)$ и $a_1(x_3), k_1(t)$ с точностью до величины $O(\varepsilon^2)$. Для этого, как мы увидим далее, достаточно задать функцию $g(t,\nu,\lambda)$ для различных ненулевых наборов значений преобразования $(\nu_j,\lambda_j),\ \ j=1,2$. Результатами исследования являются теоремы глобальной однозначной разрешимости и устойчивости решения обратной задачи.

Решение прямой задачи (1.1)–(1.3) будем искать в виде ряда по степеням ε

$$u(x,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j u_j(x,t). \tag{1.6}$$

Тогда, учитывая (1.4) и (1.6), имеем

$$F^{-1}_{x_1,x_2}[u](x_3,t,\nu,\lambda)\Big|_{x_3=+0}:=U(x_1,x_2,t)=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^j U_j(x_1,x_2,t).$$

Нетрудно проверить, что u_j (следовательно и U_j) – четные по совокупности x_1,x_2 при четных j и нечетные – при нечетных j. Тем самым, по известной функции $U(x_1,x_2,t)$ можно найти $U_0(x_1,x_2,t)$ и $U_1(x_1,x_2,t)$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$ [27]:

$$U_0(x_1,x_2,t)=\frac{U(x_1,x_2,t)+U(-x_1,-x_2,t)}{2},\quad U_1(x_1,x_2,t)=\frac{U(x_1,x_2,t)-U(-x_1,-x_2,t)}{2}.$$

Так как метод предполагает определение $a_1(x_3),\ k_0(t),\ k_1(t)$ с точностью до поправки порядка $O(\varepsilon^2)$, то в этом случае, подставляя (1.5), (1.6) в (1.1), получаем две обратные одномерные задачи последовательного определения $k_0(t)$ и $a_1(x_3),k_1(t)$:

(i) Задача определения функций $k_0(t)$ и $u_0(x,t)$ из равенств

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}=a_0(x_3)\Big[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}\Big]+\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(a_0(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}\Big)$$

$$+\int_0^t k_0(t-\tau)\left[a_0(x_3)\Big[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}\Big]+\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(a_0(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}\Big)\right](x,\tau)d\tau, \tag{1.7}$$

$$u_0\mid_{t<0}\equiv 0, \tag{1.8}$$

$$a_0(+0)\left[\frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x,t)+\int_0^t k_0(t-\tau)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x,\tau)d\tau\right]\Bigg|_{x_3=+0}=-\delta(x_1)\delta(x_2)\delta'(t), \tag{1.9}$$

$$F_{x_1,x_2}[u_0](x_3,t,\nu,\lambda)|_{x_3=+0}=F_{x_1,x_2}[U_0](t,\nu,\lambda):=g_0(t,\nu,\lambda),\quad t>0. \tag{1.10}$$

(ii) Задача определения функций $a_1(x_3),k_1(t)$ и $u_1(x,t)$ из равенств

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}=L\Big[k_0,\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(x_2a_1(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}+a_0(x_3)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\Big)+\frac{\partial}{\partial x_2}\Big(x_2a_1(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_2}\Big)$$

$$+a_0(x_3)\Big[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}\Big]+x_2a_1(x_3)\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}\Big]$$

$$+\int_0^t x_1k_1(\tau)\left[a_0(x_3)\Big[\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_2^2}\Big]+\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(a_0(x_3)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}\Big)\right](x,\tau)d\tau, \tag{1.11}$$

$$u_1|\,|_{t<0}\equiv 0, \tag{1.12}$$

$$L\Big[k_0, x_2 a_1(+0)\frac{\partial u_0}{\partial x_3} + a_0(0)\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\Big] + a_0(+0)x_1\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial u_0}{\partial x_3}(x,\tau)d\tau\bigg|_{x_3=+0} = 0, \tag{1.13}$$

$$F_{x_1,x_2}[u_1](x_3,t,\nu,\lambda)|_{x_3=+0} = F_{x_1,x_2}[U_1](t,\nu,\lambda) := g_1(t,\nu,\lambda), \quad t>0. \tag{1.14}$$

2. Задача определения функций $k_0(t)$ и $u_0(x,t)$

Введем новую переменную z по формуле

$$z=\phi(x_3) := \int_0^{x_3}\frac{d\xi}{\sqrt{a_0(\xi)}},\ c_0(z) := \sqrt{a_0(\phi^{-1}(z)}.$$

Через $\phi^{-1}(z)$ обозначена функция, обратная к $\phi(x_3)$.

Пусть

$$v(z,t,\nu,\lambda) := F_{x_1,x_2}[u_0](\phi^{-1}(z),t,\nu)\sqrt{\frac{c_0(z)}{c_0(0)}},$$

$$w(z,t,\nu,\lambda) := \left[v(z,t,\nu,\lambda) + \int_0^t k_0(t-\tau)v(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau\right]\exp\left(-k_0(0)t/2\right).$$

Тогда

$$v(z,t,\nu,\lambda) = \exp\left(k_0(0)t/2\right)w(z,t,\nu,\lambda)+\int_0^t r_0(t-\tau)\exp\left(k_0(0)\tau/2\right)w(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau, \tag{2.1}$$

$$r_0(t) = -k_0(t) - \int_0^t k_0(t-\tau)r_0(\tau)\,d\tau. \tag{2.2}$$

Относительно новых функций $w(z,t,\nu,\lambda)$ и $r_0(t)$ получаем:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + H(z,\nu,\lambda)w - \int_0^t h(t-\tau)w(z,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau,\ z>0,\ t\in R, \tag{2.3}$$

$$w|_{t<0}\equiv 0, \tag{2.4}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{c_0'(z)}{2c_0(z)}w\right)\bigg|_{z=+0} = -\frac{1}{c_0(0)}\left(\delta'(t) - \frac{1}{2}r_0(0)\delta(t)\right), \tag{2.5}$$

$$w|_{z=+0} = \tilde g_0(t,\nu,\lambda) + \int_0^t \widehat{k}_0(t-\tau)\tilde g_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau, \tag{2.6}$$

$$H(z,\nu,\lambda) := q(z) - (\nu^2+\lambda^2)c_0^2(z) + \frac{r_0^2(0)}{4} - r_0'(0),\ q(z) = \frac{[c_0'(z)]^2 - 2c_0(z)c_0''(z)}{4c_0^2(z)},$$

$$h(t) := r_0''(t)\exp\left(r_0(0)t/2\right), \quad \tilde g_0(t,\nu,\lambda) := F_{x_1,x_2}[g_0](t,\nu,\lambda)\exp(r_0(0)t/2),$$

$$\widehat{k}_0(t) := k_0(t)\exp\left(r_0(0)t/2\right).$$

Здесь, к примеру, r_0', r_0'' означает операцию однократного и двукратного дифференцирования по переменной t или z. Производная по параметру преобразования будет обозначаться, например, $g_\nu(t,\nu,\lambda)$.

В (2.5) использовано равенство $k_0(0) = -r_0(0)$, вытекающее из (2.2).

Из теории гиперболических уравнений следует, что функция $w(z,t,\nu,\lambda)$ как решение прямой задачи (2.3)–(2.5) обладает свойством $w \equiv 0$, $t < z$, $z > 0$ и в окрестности характеристической прямой $t = z$ имеет следующую структуру:

$$w(z,t,\nu,\lambda) = \frac{1}{c_0(+0)}\delta(t-z) + \tilde{w}(z,t,\nu,\lambda)\theta(t-z), \tag{2.7}$$

где $\tilde{w}(z,t,\nu,\lambda)$ – регулярная функция. Тогда

$$\tilde{g}_0(t,\nu,\lambda) := \frac{1}{c_0(+0)}\delta(t) + \widehat{g}_0(t,\nu,\lambda)\theta(t),\ \ \widehat{g}_0(t,\nu,\lambda) := g_{00}(t,\nu,\lambda)\exp(r_0(0)t/2),$$

здесь $g_{00}(t,\nu,\lambda)$ – регулярная часть функции $F_{x_1,x_2}[g_0](t,\nu,\lambda)$.

Подставляя функцию (2.7) в уравнения (2.3)–(2.6) и используя метод выделения особенностей, находим, что функция $\tilde{w}(z,t,\nu,\lambda)$ в области $t > z > 0$ удовлетворяет уравнениям ($w = \tilde{w}$ для $t > z$):

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + H(z,\nu,\lambda)w - \frac{1}{c_0(+0)}h(t-z) - \int_z^t h(t-\tau)w(z,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau, \tag{2.8}$$

$$w|_{t=z+0} = -\frac{1}{2c_0(0)}\left(r_0(0) + \frac{c_0'(0)}{c_0(0)} - \int_0^z H(\xi,\nu,\lambda)d\xi\right) := \beta(z,\nu,\lambda), \tag{2.9}$$

$$\left.\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \frac{c_0'(0)}{2c_0(0)}w\right)\right|_{z=+0} = 0, \tag{2.10}$$

$$w|_{z=+0} = \widehat{g}_0(t,\nu,\lambda) + \int_0^t \widehat{k}_0(t-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau + \frac{1}{c_0(+0)}\widehat{k}_0(t). \tag{2.11}$$

Таким образом, обратная задача определения $k_0(t)$, $u_0(x,t)$ из равенств (1.7)–(1.10) сводится к задаче определения $\widehat{k}_0(t)$, $w(z,t,\nu,\lambda)$ из равенств (2.8)–(2.11).

Перейдем к определению неизвестных величин $r_0(0), r_0'(0)$.

Требуя непрерывности функций $w(z,t,\nu,\lambda)$, $\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)(z,t,\nu,\lambda)$ при $z = t = 0$ из соотношений (2.9), (2.11) несложно выразить $r_0(0), r_0'(0)$:

$$r_0(0) = 2c_0(0)\widehat{g}_0(0,\nu,\lambda) + \frac{c_0'(0)}{c_0(0)}, \tag{2.12}$$

$$r_0'(0) = -q(0) + (\nu^2+\lambda^2)c_0^2(0) + \frac{3}{4}\left[\frac{c_0'(0)}{c_0(0)}\right]^2$$
$$-c_0^2(0)\widehat{g}_0^2(0,\nu,\lambda) + c_0'(0)\widehat{g}_0(0,\nu,\lambda) - 2c_0(0)\widehat{g}_0'(0,\nu,\lambda). \tag{2.13}$$

При выводе последних равенств были использованы следующие соотношения:

$$k'(t) = -r'(t) - r(0)k(t) - \int_0^t r'(t-\tau)k(\tau)\,d\tau,$$

$$k'(0) = -r'(0) + r^2(0),\ \widehat{k}'(0) = \frac{r^2(0)}{2} - r'(0).$$

В дальнейшем будем считать $r(0), r'(0)$ известными величинами.

В последующих равенствах вместо ν, λ будем подразумевать заданный набор значений.

Лемма 2.1 *Пусть для ненулевых фиксированных параметров ν, λ функция $g_{00}(t,\nu,\lambda) \in C^3[0,T]$, $c_0(z) \in C^4[0,T/2]$, $T > 0$ фиксировано. Тогда обратная задача (2.8)–(2.11) для $(z,t) \in D_T$, $D_T = \{(z,t)|\ 0 \le z \le t \le T - z\}$ эквивалентна задаче нахождения вектор-функции $\Big[w(z,t,\nu,\lambda),\ \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)(z,t,\nu,\lambda),\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)(z,t,\nu,\lambda),\ h(t),\ h'(t),$ $\widehat{k}_0(t),\ \widehat{k}_0'(t),\ \widehat{k}_0''(t),\ \widehat{k}_0'''(t)\Big]$ из следующей нелинейной системы интегральных уравнений:*

$$w(z,t,\nu,\lambda) = \beta(z,\nu,\lambda) + \int_z^t \frac{\partial w}{\partial \tau}(z,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau, \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda) &= \frac{1}{4c_0(0)} H\Big(\frac{z+t}{2},\nu,\lambda\Big) - \frac{c_0'(0)}{4c_0(0)} w(0,t-z,\nu,\lambda) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\widehat{g}_0'(t-z,\nu,\lambda) - r_0(0)\widehat{g}_0(t-z,\nu,\lambda)\right) \\
&- \frac{1}{2c_0(0)} h(t-z)z + \frac{1}{2c_0(0)}\widehat{k}_0'(t-z) + \frac{1}{2}\int_0^{t-z} \widehat{k}_0'(t-z-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau \\
&+ \frac{1}{2}\int_z^{(z+t)/2} \Big[H(\xi,\nu,\lambda)w(\xi,t+z-\xi,\nu,\lambda) - \frac{1}{c_0(0)}h(t+z-2\xi) \\
&- \int_0^{t+z-2\xi} h(\tau)w(\xi,t+z-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\Big]\,d\xi. \\
&- \frac{1}{2}\int_0^z \left[H(\xi,\nu,\lambda)w(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda) - \int_0^{t-z} h(\tau)w(\xi,t-z+\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right] d\xi \\
&=: G_1[w,h,\widehat{k}_0,\widehat{k}_0'],
\end{aligned} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(z,t,\nu,\lambda) = \frac{\partial}{\partial t} G_1[w,h,\widehat{k}_0,\widehat{k}_0'], \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
h(t) &= \frac{1}{2}H'\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right) \\
&- 2c_0(0)\left[\widehat{g}_0''(t,\nu,\lambda) - r_0(0)\widehat{g}_0'(t,\nu,\lambda) + r_{01}\widehat{g}_0(t,\nu,\lambda) - \frac{1}{2}H\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\beta\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\right] \\
&- 2\widehat{k}_0''(t) - 2c_0(0)\int_0^t \widehat{k}_0''(t-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)d\tau - c_0(0)\int_0^t h(\tau)\beta\left(\frac{t-\tau}{2},\nu,\lambda\right)d\tau \\
&+ 2c_0(0)\int_0^{\frac{t}{2}} \left[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda) - \int_0^{t-2\xi} h(\tau)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right] d\xi
\end{aligned}$$

$$=: G_2\Big[\frac{\partial w}{\partial t}, h, \widehat{k}_0''\Big], \tag{2.17}$$

$$h'(t) = \left(G_2\Big[\frac{\partial w}{\partial t}, h, \widehat{k}_0''\Big]\right)', \tag{2.18}$$

$$\widehat{k}_0(t) = -r_0(0) + r_{01}t + \int_0^t (t-\tau)\widehat{k}_0''(\tau)\,d\tau, \tag{2.19}$$

$$\widehat{k}_0'(t) = r_{01} + \int_0^t \widehat{k}_0''(\tau)\,d\tau, \tag{2.20}$$

$$\widehat{k}_0''(t) = -h(t) + r_{00}\widehat{k}_0(t) - \int_0^t h(t-\tau)\widehat{k}_0(\tau)\,d\tau. \tag{2.21}$$

$$\widehat{k}_0'''(t) = -h'(t) + r_{00}\widehat{k}_0'(t) - h(0)\widehat{k}_0(t) - \int_0^t h'(t-\tau)\widehat{k}_0(\tau)\,d\tau, \tag{2.22}$$

где

$$r_{00} = \frac{r_0^2(0)}{4} - r_0'(0), \quad r_{01} = \frac{r_0^2(0)}{2} - r_0'(0).$$

Для доказательства леммы заметим, что справедливы равенства

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) w = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) w.$$

С учетом этого интегрируем (2.8) вдоль соответствующих характеристик дифференциальных операторов первого порядка для $(z,t) \in D_T$. Интегрирование вдоль характеристики оператора $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}$ совершим от точки (z,t) до точки $((z+t)/2,\ (z+t)/2)$ на плоскости переменных $(\xi,\ \tau)$. Используя равенство $\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) w((z+t)/2,\ (z+t)/2, \nu, \lambda) = \frac{1}{2c_0(0)} H((z+t)/2, \nu, \lambda)$, вытекающее из (2.9) после дифференцирования по z, получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\right) w(z,t,\nu,\lambda) = \frac{1}{2c_0(0)} H\Big(\frac{z+t}{2}, \nu, \lambda\Big)$$
$$+ \int_z^{(z+t)/2} \Big[H(\xi,\nu,\lambda) w(\xi, t+z-\xi, \nu, \lambda) - \frac{1}{c_0(0)} h(t+z-2\xi)$$
$$- \int_0^{t+z-2\xi} h(\tau) w(\xi, t+z-\xi-\tau, \nu, \lambda) d\tau \Big] d\xi. \tag{2.23}$$

Интегрирование вдоль характеристики оператора $\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}$ совершим от точки $(0,\ t-z)$ до точки (z,t). Используя равенства (2.10), (2.11), находим

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) w(z,t,\nu,\lambda) = -\frac{c_0'(0)}{2c_0(0)} w(0, t-z, \nu, \lambda) + \widehat{g}_0'(t-z,\nu,\lambda) - r_0(0)\widehat{g}_0(t-z,\nu,\lambda)$$

$$-\frac{1}{c_0(0)}h(t-z)z+\frac{1}{c_0(0)}\widehat{k}_0'(t-z)+\int_0^{t-z}\widehat{k}_0'(t-z-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau$$

$$+\int_0^z\left[H(\xi,\nu,\lambda)w(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda)-\int_0^{t-z}h(\tau)w(\xi,t-z+\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right]d\xi. \quad (2.24)$$

Из равенств (2.23) и (2.24) легко можно получить уравнение (2.15). В уравнении (2.23), полагая $z=0$ и используя условия (2.10), (2.11), находим

$$\widehat{g}_0'(t,\nu,\lambda)-r_0(0)\widehat{g}_0(t,\nu,\lambda)+\frac{1}{c_0(0)}\widehat{k}_0'(t)+\int_0^t\widehat{k}_0'(t-\tau)\tilde{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau-\frac{c_0'(0)}{2c_0(0)}w(0,t-z,\nu,\lambda)$$

$$=\frac{1}{2c_0(0)}H\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)+\int_0^{t/2}\left[H(\xi,\nu,\lambda)w(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)-\frac{1}{c_0(0)}h(t-2\xi)\right.$$

$$\left.-\int_0^{t-2\xi}h(\tau)w(\xi,t-\xi-\tau,\nu)d\tau\right]d\xi.$$

Дифференцируя это равенство, после несложных выкладок получаем уравнение (2.17).

Остальные уравнения системы являются очевидными и, в основном, используются для замыкания системы интегральных уравнений. Значения $h(0),\widehat{k}''(0)$ становятся известными величинами, если решить при $t=0$ систему из двух уравнений (2.21) и (2.17). Тем самым лемма доказана.

Теорема 2.1. *Пусть справедливы условия леммы 2.1. Тогда существует единственное решение обратной задачи (1.7)–(1.10) $k_0(t)\in C^3[0,T]$ при любом фиксированном $T>0$.*

Пусть $\Gamma(K_0)$ – множество функций $k_0(t)\in C^3[0,T]$, удовлетворяющих для $t\in[0,T]$ неравенству $\|k_0(t)\|_{C^3[0,T]}\le K_0$ с фиксированной положительной постоянной K_0.

Теорема 2.2. *Пусть $k_0^{(1)}(t),k_0^{(2)}(t)\in\Gamma(K_0)$ – решения обратной задачи (1.7)–(1.10) с набором данных*

$$\left\{c_0^{(j)}(z),\ g_{00}^{(j)}(t,\nu,\lambda)\right\}$$

для $j=1,2$ соответственно. Тогда найдется такое положительное число $C=C(K_0,h_0(\nu,\lambda),m,T)$, $h_0(\nu,\lambda)=\max\left\{\|c_0^{(j)}(z)\|_{C^4[0,T/2]},\|g_{00}^{(j)}(t,\nu,\lambda)\|_{C^3[0,T]},\ j=1,2\right\}$, что справедлива оценка устойчивости

$$\|k_0^{(1)}-k_0^{(2)}\|_{C^3[0,T]}\le C\left[\|c_0^{(1)}-c_0^{(2)}\|_{C^4[0,T/2]}+\|g_{00}^{(1)}-g_{00}^{(2)}\|_{C^3[0,T]}\right]. \quad (2.25)$$

Доказательство теоремы 2.1. Основная идея доказательства состоит в применении принципа сжатых отображений к нелинейной системе интегральных уравнений

Вольтерра второго рода (2.14)–(2.22). Запишем указанную систему уравнений в виде операторного уравнения

$$\varphi = A\varphi, \tag{2.26}$$

где $\varphi = [\varphi_j]$, $j = 1, 2, \ldots, 9$:

$$\varphi_1(z,t,\nu,\lambda) := w(z,t,\nu,\lambda),$$

$$\varphi_2(z,t,\nu,\lambda) := \frac{\partial w}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda) + \frac{1}{2c_0(0)} h(t-z)z - \frac{1}{2c_0(0)} \widehat{k}_0'(t-z),$$

$$\varphi_3(z,t,\nu,\lambda) := \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(z,t,\nu,\lambda) + \frac{1}{2c_0(0)} h'(t-z)z - \frac{1}{2c_0(0)} \widehat{k}_0''(t-z) + \frac{1}{2} h(t-z) \int_0^z \beta(\xi,\nu)\, d\xi,$$

$$\varphi_4(t) := h(t) + 2\widehat{k}_0''(t), \quad \varphi_5(t) := h'(t) + 2\widehat{k}_0'''(t) + c_0(0)h(t)\beta(0,\nu),$$

$$\varphi_6(t) := \widehat{k}_0(t), \quad \varphi_7(t) := \widehat{k}_0'(t), \quad \varphi_8(t) := \widehat{k}_0''(t) + h(t) - r_{00}\widehat{k}_0(t),$$

$$\varphi_9(t) := \widehat{k}_0'''(t) + h'(t) - r_{00}\widehat{k}_0'(t) + h(0)\widehat{k}_0(t).$$

Оператор A определен на множестве вектор-функций $\varphi \in C[D_T]$ и в соответствии с равенствами (2.14)–(2.22) имеет вид $A = (A_1,\ A_2, \ldots, A_9)$:

$$A_1\varphi = \varphi_{01}$$

$$+ \int_z^t \left[\varphi_2(z,\tau,\nu,\lambda) - \frac{1}{2c_0(0)} z \left(2\varphi_8(\tau-z) - \varphi_4(\tau-z) + 2r_{00}\varphi_6(\tau-z)\right) + \frac{1}{2c_0(0)} \varphi_7(\tau-z) \right] d\tau,$$

$$A_2\varphi = \varphi_{02} + \frac{1}{2}\int_0^{t-z} \varphi_7(t-z-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^z \Big[H(\xi,\nu,\lambda)\varphi_1(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda)$$

$$- \int_0^{t-z} (2\varphi_8(\tau) - \varphi_4(\tau) + 2r_{00}\varphi_6(\tau))\varphi_1(\xi,t-z+\xi-\tau,\nu)d\tau \Big] d\xi$$

$$+ \frac{1}{2}\int_z^{\frac{t+z}{2}} \Big[H(\xi,\nu,\lambda)\varphi_1(\xi,t+z-\xi,\nu) - \frac{1}{c_0(0)} (2\varphi_8(t+z-2\xi) - \varphi_4(t+z-2\xi) + 2r_{00}\varphi_6(t+z-2\xi))$$

$$- \int_0^{t+z-2\xi} (2\varphi_8(\tau) - \varphi_4(\tau) + 2r_{00}\varphi_6(\tau))\varphi_1(\xi,t+z-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau \Big] d\xi,$$

$$A_3\varphi = \varphi_{03} + \frac{1}{2}\int_0^{t-z} (\varphi_4(t-z-\tau) - \varphi_8(t-z-\tau) - r_{00}\varphi_6(t-z-\tau))\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\, d\tau$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^z \Big[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-z+\xi,\nu)$$

$$- \int_0^{t-z} (2\varphi_8(\tau) - \varphi_4(\tau) + 2r_{00}\varphi_6(\tau))\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-z+\xi,\nu)d\tau \Big] d\xi$$

$$+ \frac{1}{2}\int_z^{\frac{t+z}{2}} \Big[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda) - \frac{1}{c_0(0)} h'(t+z-2\xi)$$

$$-(2\varphi_8(t+z-2\xi)-\varphi_4(t+z-2\xi)+2r_{00}\varphi_6(t+z-2\xi))\beta(\xi,\nu)$$

$$\left.-\int_0^{t+z-2\xi}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t+y-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right]d\xi,$$

$$A_4\varphi=\varphi_{04}-2c_0(0)\int_0^t\widehat{k}_0''(t-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu)\,d\tau$$

$$-c_0(0)\int_0^t(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\,\beta_t'\left(\frac{t-\tau}{2},\nu,\lambda\right)\,d\tau$$

$$+2c_0(0)\int_0^{t/2}\left[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)\right.$$

$$\left.-\int_0^{t-2\xi}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\,\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda)d\tau\right]d\xi,$$

$$A_5\varphi=\varphi_{05}-c_0(0)\int_0^t(\varphi_4(t-\tau)-\varphi_8(t-\tau)-r_{00}\varphi_6(t-\tau))\,\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)\,d\tau$$

$$-\frac{c_0(0)}{2}\int_0^t(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau)\beta\left(\frac{t-\tau}{2},\nu,\lambda\right)\,d\tau$$

$$+c_0(0)\int_0^{t/2}\left[H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi,t-\xi,\nu)-(2\varphi_8(t-2\xi)-\varphi_4(t-2\xi)\right.$$

$$\left.+2r_{00}\varphi_6(t-2\xi)\frac{\partial w}{\partial t}(\xi,\xi,\nu)-\int_0^{t-2\xi}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\,\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(\xi,t-\xi-\tau,\nu)d\tau\right]d\xi,$$

$$A_6\varphi=\varphi_{06}+\int_0^t(t-\tau)\,(\varphi_4(t-\tau)-\varphi_8(t-\tau)-r_{00}\varphi_6(t-\tau))\,d\tau,$$

$$A_7\varphi=\varphi_{07}+\int_0^t(\varphi_4(t-\tau)-\varphi_8(t-\tau)-r_{00}\varphi_6(t-\tau))\,d\tau,$$

$$A_8\varphi=\varphi_{08}-\int_0^t(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))\,\varphi_6(\tau)\,d\tau,$$

$$A_9\varphi=\varphi_{09}-\int_0^t h'(t-\tau)\varphi_6(\tau)\,d\tau,$$

где введено обозначение $\varphi_0=[\varphi_{01},\ \varphi_{02},\dots,\ \varphi_{09}]:$

$$\varphi_{01}(z,\nu,\lambda):=\beta(z,\nu,\lambda),$$

$$\varphi_{02}(z,t,\nu,\lambda):=\frac{1}{2}(\widehat{g}_0'(t-z,\nu,\lambda)-r_0(0)\widehat{g}_0(t-z,\nu,\lambda))+\frac{1}{4c_0(0)}H\left(\frac{z+t}{2},\nu,\lambda\right)$$

$$-\frac{c_0'(0)}{4c_0(0)}w(0,t-z,\nu,\lambda),$$

$$\varphi_{03}(z,t,\nu,\lambda):=\frac{1}{2}(\widehat{g}_0''(t-y,\nu,\lambda)-r_0(0)\widehat{g}_0'(t-y,\nu,\lambda))+\frac{1}{8c_0(0)}H\left(\frac{z+t}{2},\nu,\lambda\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left[H\left(\frac{y+t}{2},\nu,\lambda\right)\beta\left(\frac{z+t}{2},\nu,\lambda\right)-\frac{1}{c_0(0)}h(0)\right],$$

$$\varphi_{04}(t,\nu,\lambda):=\frac{1}{2}H'\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)$$

$$-2c_0(0)\left[\widehat{g}_0''(t,\nu,\lambda)-r_0(0)\widehat{g}_0'(t,\nu,\lambda)+r_{01}\widehat{g}_0(t,\nu,\lambda)-\frac{1}{2}H\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\beta\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\right],$$

$$\varphi_{05}(t,\nu,\lambda):=\frac{1}{2}H''\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)$$

$$-2c_0(0)\left[\widehat{g}_0'''(t,\nu,\lambda)-r_0(0)\widehat{g}_0''(t,\nu,\lambda)+r_{01}\widehat{g}_0'(t,\nu,\lambda)-\frac{1}{2}\left(H\Big(\frac{t}{2},\nu,\lambda\Big)\beta\Big(\frac{t}{2},\nu,\lambda\Big)\right)'\right]$$

$$+2c_0(0)H\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right)\frac{\partial\beta}{\partial t}\left(\frac{t}{2},\nu,\lambda\right),$$

$$\varphi_{06}(t):=-r(0)+r_{01}t,\ \ \varphi_{07}(t):=r_{01},\ \ \varphi_{08}(t):=0,\ \ \varphi_{09}(t):=0.$$

В системе уравнений (2.26)

$$\begin{gathered}h(t)=2\varphi_8(t)-\varphi_4(t)+2r_{00}\varphi_6(t),\quad h'(t)=2\varphi_9(t)+2r_{00}\varphi_7(t)-\varphi_5(t)\\+c_0(0)\left(2\varphi_8(t)-\varphi_4(t)\right)+2\left(r_{00}c_0(0)\beta(0,\nu)-h(0)\right)\varphi_6(t),\\\widehat{k}_0''(t)=\varphi_4(t)-\varphi_8(t)-r_{00}\varphi_6(t),\end{gathered}\tag{2.27}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)=\varphi_2(z,t,\nu,\lambda)-\frac{z}{2c_0(0)}(2\varphi_8(t-z)-\varphi_4(t-z)$$

$$+2r_{00}\varphi_6(t-z))+\frac{1}{2c_0(0)}\varphi_7(t-z),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(z,t,\nu,\lambda)=\varphi_3(z,t,\nu,\lambda)-\frac{z}{2c_0(0)}h'(t-z)+\frac{1}{2c_0(0)}\widehat{k}_0''(t-z)-\frac{1}{2}h(t-z)\int_0^z\beta(\xi,\nu,\lambda)d\xi,$$

$$\widehat{k}_0'''(t)=\varphi_9(t)-h'(t)-r_{00}\varphi_7(t)+h(0)\varphi_6(t).$$

В последних двух равенствах вместо функций $h(t),h'(t),\widehat{k}_0''(t)$ в правой части подразумеваются их выражения через компоненты вектор-функции φ (2.26).

Введем банахово пространство непрерывных функций C_σ, порожденных семейством весовых норм

$$\|\varphi\|_\sigma=\max\left\{\sup_{(z,t)\in D_T}\left|\varphi_i(z,t,\nu,\lambda)e^{-\sigma t}\right|,\ i=1,2,3,\ \sup_{t\in[0,T]}\left|\varphi_j(t)e^{-\sigma t}\right|,j=\overline{4,9}\right\},\ \sigma\geq 0.$$

При $\sigma=0$ это пространство является пространством непрерывных функций с обычной нормой $\|\varphi\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma T}\|\varphi\|\leq\|\varphi\|_\sigma\leq\|\varphi\|\tag{2.28}$$

нормы $\|\varphi\|_\sigma$ и $\|\varphi\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0,\infty)$. Число σ выбирается позже. Пусть $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|) =: \{\varphi \mid \|\varphi - \varphi_0\|_\sigma \le \|\varphi_0\|\}$ – шар радиуса $\|\varphi_0\|$ с центром в точке φ_0 некоторого весового пространства C_σ $(\sigma \ge 0)$. Для $\varphi \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ имеет место оценка $\|\varphi\|_\sigma \le \|\varphi_0\|_\sigma + \|\varphi_0\| \le 2\|\varphi_0\|$.

Пусть $\varphi(z,t,\nu,\lambda) \in Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Далее показывается, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор A переводит шар Q_σ в шар Q_σ. Приведем для примера технику оценки для второго нелинейного уравнения системы (2.26) (для остальных уравнений оценки получаются аналогично [17, 34]). Для $(z,t) \in D_T$ имеем

$$||A_2\varphi - \varphi_{02}||_\sigma = \sup_{(z,t)\in D_T} \left|(A_2\varphi - \varphi_{02})e^{-\sigma t}\right|$$

$$= \sup_{(z,t)\in D_T} \left| \frac{1}{2}\int_0^{t-z} \varphi_7(t-z-\tau)\widehat{g}_0(\tau,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t-z-\tau)}e^{-\sigma(z+\tau)}\,d\tau \right.$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^z \Big[H(\xi,\nu,\lambda)\varphi_1(\xi,t-z+\xi,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t-z+\xi)}e^{-\sigma(z-\xi)}$$

$$-\int_0^{t-z}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))e^{-\sigma\tau}\varphi_1(\xi,t-z+\xi-\tau,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t-z+\xi-\tau)}e^{-\sigma(z-\xi)}d\tau\Big]\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int_z^{\frac{t+z}{2}} \Big[H(\xi,\nu,\lambda)\varphi_1(\xi,t+z-\xi,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t+z-\xi)}e^{-\sigma(\xi-z)}$$

$$-a(2\varphi_8(t+z-2\xi)-\varphi_4(t+z-2\xi)+2r_{00}\varphi_6(t+z-2\xi))e^{-\sigma(t+z-2\xi)}e^{-\sigma(2\xi-z)}$$

$$\left.-\int_0^{t+z-2\xi}(2\varphi_8(\tau)-\varphi_4(\tau)+2r_{00}\varphi_6(\tau))e^{-\sigma\tau}\varphi_1(\xi,t+z-\xi-\tau,\nu,\lambda)e^{-\sigma(t+z-\xi-\tau)}e^{-\sigma(\xi-z)}\,d\tau\Big]\,d\xi\right|$$

$$\le \frac{1}{2}G\|\varphi_7\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma z}-e^{-\sigma t})$$

$$+\frac{1}{2}H_0\|\varphi_1\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\sigma z})+\frac{1}{2}(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)\|\varphi_1\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\sigma z})T$$

$$+\frac{1}{2}H_0\|\varphi_1\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\sigma\frac{t-z}{2}})+\frac{\lambda}{2c_0(0)}(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma))\frac{1}{\sigma}(e^{-\sigma z}-e^{-\sigma t})$$

$$+\frac{1}{2}(2\|\varphi_6\|_\sigma+\|\varphi_3\|_\sigma+2r_{00}\|\varphi_4\|_\sigma)\|\varphi_1\|_\sigma\frac{1}{\sigma}(1-e^{-\sigma\frac{t-z}{2}})T$$

$$\le 2\|\varphi_0\|\left[\frac{1}{2}G+H_0+(3+2|r_{00}|)(\frac{\lambda}{2c_0(0)}+T\|\varphi_0\|)\right]\frac{1}{\sigma} := 2\|\varphi_0\|\chi_2(m,G,H_0,r_{00},T,\|\varphi_0\|)\frac{1}{\sigma},$$

$H_0 := \max\limits_{z\in[0,T/2]}|H(z,\nu,\lambda)|$, $G := \max\limits_{t\in[0,T]}|\widehat{g}_0(t,\nu,\lambda)|$.

Таким образом, для всех уравнений системы (2.26) получаем

$$||A_j\varphi - \varphi_{0j}||_\sigma \le 2\|\varphi_0\|\chi_j\frac{1}{\sigma}, \quad j = 1,2,\ldots,9$$

(χ_j – соответствующие константы, зависящие от тех же величин, что и χ_2).

Выбирая $\sigma \ge \sigma_0 := 2 \max\limits_{1 \le j \le 9} \{\chi_j\}$, получим, что A переводит шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ в шар $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$.

Пусть теперь φ^1, φ^2 — любые два элемента из $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда, используя вспомогательные неравенства вида

$$\left|\varphi_i^1 \varphi_j^1 - \varphi_i^2 \varphi_j^2\right| e^{-\sigma t} \le \left|\varphi_i^1\right| \left|\varphi_j^1 - \varphi_j^2\right| e^{-\sigma t} + \left|\varphi_j^2\right| \left|\varphi_i^1 - \varphi_i^2\right| e^{-\sigma t}$$
$$\le 4\|\varphi_0\| \left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|_\sigma,$$

получим

$$\left\|A\varphi^1 - A\varphi^2\right\|_\sigma \le \frac{\sigma_{00}}{\sigma} \left\|\varphi^1 - \varphi^2\right\|_\sigma,$$

где σ_{00} определяется так же, как и σ_0 (единственное отличие σ_{00} от σ_0 состоит в том, что входящая в коэффициенты χ_j постоянная $\|\varphi_0\|$ удваивается [17,34]).

Если число σ выбрано из условия $\sigma > \sigma^* := \max\{\sigma_0, \sigma_{00}\}$, то оператор A является сжимающим на $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$. Тогда согласно принципу Банаха уравнение (2.26) имеет и притом единственное решение в $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ при любом фиксированном $T > 0$.

Так как $\widehat{k}_0(t) := \exp(r_0(0)t/2) k_0(t)$, то по найденной функции $\widehat{k}_0(t)$ функция $k_0(t)$ находится по формуле:

$$k_0(t) = \exp[-r_0(0)t/2] \widehat{k}_0(t). \tag{2.29}$$

Теорема 2.1 доказана.

Доказательство теоремы 2.2. Так как условия теоремы 2.1 выполнены, то решение (2.25) принадлежит множеству $Q_\sigma(\varphi_0, \|\varphi_0\|)$ и $\|\varphi_i\|_\sigma \le 2\|\varphi_0\|$, $i = 1, 2, \ldots, 9$. Таким образом,

$$\max_{t \in [0,T]} |k_0(t)| \le 2\|\varphi_0\| \exp\left(|r_0(0)| T\right) := K_0.$$

Пусть $\varphi^{(j)}$, $j = 1, 2$ – вектор-функции, которые являются решениями (2.26) с набором данных $\left\{c_0^{(j)}(z), g_{00}^j(t, \nu, \lambda)\right\}$ соответственно. Известные функции $c_0^{(j)}(z)$, $(j = 1, 2)$ входят в свободные члены интегральных уравнений (2.25) соответствующим образом через функции $H^{(j)}(z, \nu, \lambda)$, $q^{(j)}(z)$ $(j = 1, 2)$. Переходя в этих выражениях к разностям $c_0^{(1)} - c_0^{(2)}$, имеем [35]

$$\|q^{(1)} - q^{(2)}\|_{C[0,T/2]} \le C_0(m, h_0) \|c_0^{(1)} - c_0^{(2)}\|_{C^2[0,T/2]}.$$

Из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 2.1, для $\sigma \ge \sigma^*$ получим оценку

$$\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|_\sigma \le C_1 \gamma + \frac{\sigma^*}{\sigma} \left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|_\sigma, \tag{2.30}$$
$$\gamma := \|c_0^{(1)} - c_0^{(2)}\|_{C^4[0,T/2]} + \|g_{00}^{(1)} - g_{00}^{(2)}\|_{C^3[0,T]},$$

постоянная C_1 зависит от тех параметров, что и C в теореме 2.2. Из неравенств (2.28) и (2.30) следует оценка

$$\left\|\widehat{k}_0^{(1)} - \widehat{k}_0^{(2)}\right\| \le C_2 \gamma,$$

с постоянной $C_2 = \sigma C_1/(\sigma - \sigma^*)$. Тогда, рассматривая уравнение (2.29) для $\left\{k_0^{(1)}, \widehat{k}_0^{(2)}\right\}$, $\left\{k_0^{(1)}, \widehat{k}_0^{(2)}\right\}$ и используя (2.30), получим оценку (2.25).

3. Задача определения функций $a_1(x_3), k_1(t)$ и $u_1(x,t)$

Далее для краткой записи определим билинейный интегральный оператор L по формуле

$$L\left[k_0(t), u(x,t)\right] = u(x,t) + \int_0^t k_0(t-\tau)u(x,\tau)d\tau.$$

В дальнейшем иногда не будем в операторе L указывать зависимость функций от переменных, подразумевая зависимость первой функции от переменной t, а второй – от x, t или x_3, t, ν, λ.

В равенствах (1.11)–(1.14) перейдем от функций $u_1(x,t)$ и $u_0(x,t)$ к их образам Фурье $\tilde{u}_j(x_3,t,\nu,\lambda) := F_{x_1,x_2}[u_j](x_3,t,\nu,\lambda)$, $j = 0,1$.

Тогда обратная задача (1.11)–(1.14) в терминах функции $\tilde{u}_1$ перепишется в виде

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_1}{\partial t^2} = L\left[k_0, \frac{\partial}{\partial x_3}\left(a_0(x_3)\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3}\right) - (\nu^2+\lambda^2)a_0(x_3)\tilde{u}_1\right]$$

$$+L\left[k_0, i\frac{\partial}{\partial x_3}\left(a_1(x_3)\frac{\partial \tilde{u}_{0\lambda}}{\partial x_3}\right) - i\lambda a_1(x_3)\tilde{u}_0 - i(\lambda^2+\nu^2)a_1(x_3)\tilde{u}_{0\lambda}\right]$$

$$+i\int_0^t k_1(t-\tau)\left[\frac{\partial}{\partial x_3}\left(a_0(x_3)\frac{\partial \tilde{u}_{0\nu}}{\partial x_3}\right) - a_0(x_3)\Big[2\nu\tilde{u}_0 + (\lambda^2+\nu^2)\tilde{u}_{0\nu}\Big]\right](x_3,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau, \quad (3.1)$$

$$u_1\,|_{t<0} \equiv 0, \quad (3.2)$$

$$\left(L\left[k_0, ia_1(+0)\frac{\partial \tilde{u}_{0\lambda}}{\partial x_3} + a_0(+0)\frac{\partial \tilde{u}_1}{\partial x_3}\right] - ia_0(+0)\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial \tilde{u}_{0\nu}}{\partial x_3}(x_3,\tau,\nu,\lambda)d\tau\right)\Big|_{x_3=+0} = 0, \quad (3.3)$$

$$\tilde{u}_1(0,t,\nu,\lambda) = F_{x_1,x_2}[U_1](t,\nu,\lambda) := g_1(t,\nu,\lambda),\ t>0 \quad (3.4)$$

(в равенствах (3.1), (3.3) нижний индекс ν (λ) обозначает операцию дифференцирования по соответствующему параметру.

Пусть

$$V(z,t,\nu,\lambda) = L\left[k_0, \tilde{u}_1(\phi^{-1}(z),t,\nu,\lambda)\sqrt{\frac{c_0(z)}{c_0(0)}}\right]\exp\left(r_0(0)t/2\right).$$

Тогда (3.1)–(3.4) для $z>0,\ t\in R$ примут вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + H(z,\nu,\lambda)V - \int_0^t h(t-\tau)V(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau - i\lambda c_1(z)w - i\left(\lambda^2+\nu^2\right)c_1(z)w_\lambda$$

$$+ic_1'(z)\left[q_1(z)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z} - \frac{1}{2}q_2(z)w_\lambda\right] + ic_1(z)\left[q_1(z)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial z^2} - 2q_2(z)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z} + q_3(z)w_\lambda\right]$$

$$+i\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)\left[\frac{\partial^2 v_\nu}{\partial z^2}+[q(z)-(\lambda^2+\nu^2)c_0^2(z)]v_\nu-2\nu c_0^2(z)v(z,\tau,\nu)\right]d\tau, \quad (3.5)$$

$$V\ |_{t<0}\equiv 0, \quad (3.6)$$

$$\left(ia_1(+0)\left[\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}-\frac{c_0'(+0)}{2c_0(+0)}w_\lambda\right]+\left[\frac{\partial V}{\partial z}-\frac{c_0'(+0)}{2c_0(+0)}V\right]\right.$$

$$\left.+i\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)\left[\frac{\partial v_\nu}{\partial z}-\frac{c_0'(+0)}{2c_0(+0)}v_\nu\right]d\tau\right)\Bigg|_{z=+0}=0, \quad (3.7)$$

$$V\ |_{z=+0}=L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(t,\nu,\lambda)\right], \quad (3.8)$$

где

$$c_1(z):=a_1(\phi^{-1}(z)),$$

$$q_1(z):=\frac{1}{c_0^2(z)},\ q_2(z):=\frac{c_0'(z)}{c_0^3(z)},\ q_3(z):=\frac{5[c_0'(z)]^2-2c_0''(0)c_0(z)}{4c_0^4(z)}, \quad (3.8')$$

$$\widehat{g}_1(t,\nu,\lambda)=g_1(t,\nu,\lambda)\exp(r_0(0)t/2).$$

В силу (2.1) и (2.7)

$$v=\exp(k_0(0)t/2)\left[\frac{1}{c_0(0)}\delta(t-z)+\tilde{w}(z,t,\nu,\lambda)\theta(t-z)\right]$$

$$+\int_0^t r_0(t-\tau)\exp(k_0(0)\tau/2)\left[\frac{1}{c_0(0)}\delta(\tau-z)+\tilde{w}(z,\tau,\nu,\lambda)\theta(\tau-z)\right]d\tau,$$

(далее знак $\tilde{}$ над w будет опущен)

$$v_\nu=\exp(k_0(0)t/2)\left[w_\nu(z,t,\nu,\lambda)\theta(t-z)\right]+\int_z^t r_0(t-\tau)w_\nu(z,\tau,\nu,\lambda)\exp(k_0(0)\tau/2)\,d\tau.$$

Заметим, что для функции w_ν справедлива начально-краевая задача, получаемая дифференцированием равенств (2.8)–(2.11) по параметру ν:

$$\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2}+H(z,\nu,\lambda)w_\nu+H_\nu(z,\nu)w-\int_z^t h(t-\tau)w_\nu(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau, \quad (3.9)$$

$$w_\nu|_{t=z+0}=\beta_\nu(z,\nu), \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial w_\nu}{\partial z}-\frac{c_0'(z)}{2c_0(z)}w_\nu\right)\Bigg|_{z=+0}=0, \quad (3.11)$$

$$w_\nu|_{z=+0}=L[\widehat{k}_0,\widehat{g}_{0\nu}(t,\nu,\lambda)]. \quad (3.12)$$

Тогда с учетом вышеизложенного, имеем

$$\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial v_\nu}{\partial z}\,d\tau$$

$$= \int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)\left[\frac{\partial w_\nu}{\partial z}(z,\tau,\nu,\lambda) + \int_z^\eta \widehat{r}_0(\tau-\eta)\frac{\partial w_\nu}{\partial z}(z,\eta,\nu,\lambda)d\eta\right]d\tau, \tag{3.13}$$

где $\widehat{k}_1(t) := k_1(t)\exp(r_0(0)t/2)$, $\widehat{r}_0(t) := r_0(t)\exp(r_0(0)t/2)$,

$$\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)\frac{\partial^2 v_\nu}{\partial z^2}\,d\tau$$

$$= \int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)\left[\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2} + \int_z^\tau \widehat{r}_0(\tau-\eta)\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2}(z,\eta,\nu,\lambda)\,d\eta\right]d\tau, \tag{3.14}$$

$$\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)[q(z)-(\lambda^2+\nu^2)c_0^2(z)]v_\nu d\tau$$

$$= \int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)[q(z)-(\lambda^2+\nu^2)c_0^2(z)]\left[w_\nu(z,\tau,\nu,\lambda)+\int_z^\tau \widehat{r}_0(\tau-\eta)w_\nu(z,\eta,\nu,\lambda)d\eta\right]d\tau, \tag{3.15}$$

$$\exp(r_0(0)t/2)\int_0^t k_1(t-\tau)2\nu c_0^2(z)v(z,\tau,\nu,\lambda)\,d\tau$$

$$= \frac{2\nu}{c_0(0)}c_0^2(z)\widehat{k}_1(t-z) + \frac{2\nu}{c_0(0)}c_0^2(z)\int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)\widehat{r}_0(\tau-z)d\tau$$

$$+ \int_z^t \widehat{k}_1(t-\tau)2\nu c_0^2(z)\left[w(z,\tau,\nu,\lambda) + \int_z^\tau \widehat{r}_0(\tau-\eta)w(z,\eta,\nu,\lambda)d\eta\right]d\tau, \tag{3.16}$$

Принимая во внимание (3.11), (3.13)–(3.16), можно переписать задачу (3.5)–(3.8) в следующем виде для $z>0,\ t\in R$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + H(z,\nu,\lambda)V - \int_z^t h(t-\tau)V(z,\tau,\nu,\lambda)d\tau + \nu\tilde{c}(z)\widehat{k}_1(t-z)$$

$$-i\lambda c_1(z)\left(\frac{1}{c_0(0)}\delta(t-z) + w(z,t,\nu,\lambda)\theta(t-z)\right) - i(\lambda^2+\nu^2)c_1(z)w_\lambda(z,t,\nu,\lambda)$$

$$+ic_1'(z)\left[q_1(z)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z} - \frac{1}{2}q_2(z)w_\lambda\right] + ic_1(z)\left[q_1(z)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial z^2} - 2q_2(z)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z} + q_3(z)w_\lambda\right]$$

$$+\int_z^t p(z,\tau,\nu,\lambda)\widehat{k}_1(t-\tau)\,d\tau, \tag{3.17}$$

$$V\mid_{t<0} \equiv 0, \tag{3.18}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{c_0'(+0)}{2c_0(+0)}V\right)\Big|_{z=+0} = 0, \tag{3.19}$$

$$V\mid_{t=z} = 0, \tag{3.20}$$

$$V\mid_{z=0}=L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(t,\nu,\lambda)\right], \tag{3.21}$$

где

$$\tilde{c}(z)=i\frac{2}{c_0(0)}c_0^2(z),\quad p(z,t,\nu,\lambda)=\tilde{c}(z)\widehat{r}_0(t-z)$$

$$-iL_0\left[\widehat{r}_0,\frac{\partial^2 w_\nu}{\partial z^2}(z,t,\nu,\lambda)+[q(z)-(\lambda^2+\nu^2)c_0^2(z)]w_\nu(z,t,\nu,\lambda)-2\nu c_0^2(z)w(z,t,\nu,\lambda)\right].$$

(в определении $p(z,\tau,\nu,\lambda)$ оператор L_0 отличается от оператора L тем, что нижний индекс в интеграле оператора заменен на z).

Таким образом, мы свели обратную задача определения $a_1(x_3),k_1(t)$ из равенств (1.11)–(1.14) к задаче определения $c_1(z),\widehat{k}_1(t)$ из равенств (3.17)–(3.21).

С помощью формулы Даламбера, получаем для $t>z$

$$V(z,t,\nu,\lambda)=\frac{1}{2}\Big(L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(t-z,\nu,\lambda)\right]+L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(t+z,\nu,\lambda)\right]\Big)$$

$$-\frac{c_0'(0)}{4c_0(0)}\int\limits_{t-z}^{t+z}L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau-\frac{i\lambda}{2c_0(0)}\int\limits_{\frac{t-z}{2}}^{\frac{t+z}{2}}c_1(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^z\int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi}\Bigg\{\nu\tilde{c}(\xi)\widehat{k}_1(\tau-\xi)+H(\xi,\nu,\lambda)V(\xi,\tau,\nu,\lambda)$$

$$-c_1(\xi)N(\xi,\tau,\nu,\lambda)+ic_1'(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda)-\frac{1}{2}q_2(\xi)w_\lambda(\xi,\tau,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_\xi^\tau\left[h(\tau-\eta)V(\xi,\eta,\nu,\lambda)+\widehat{k}_1(\tau-\eta)p(\xi,\eta,\nu,\lambda)\right]d\eta\Bigg\}d\tau d\xi:=F[V,c_1,c_1',\widehat{k}_1], \tag{3.22}$$

где

$$N(\xi,\tau,\nu,\lambda):=i\Big[\lambda w(\xi,\tau,\nu,\lambda)+(\lambda^2+\nu^2)w_\lambda$$

$$-q_1(\xi)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial z^2}(\xi,\tau,\nu)+2q_2(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda)-q_3(\xi)w_\lambda(\xi,\tau,\nu,\lambda)\Big].$$

Переходя в равенстве (3.22) к пределу $t\to z+0$ с учетом $V|_{t=z}=0$, имеем

$$-L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(2z,\nu,\lambda)\right]+\frac{c_0'(0)}{2c_0(0)}\int\limits_0^{2z}L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau=-\frac{i\lambda}{c_0(0)}\int\limits_0^z c_1(\xi)d\xi$$

$$+\int\limits_0^z\int_\xi^{2z-\xi}\Bigg\{\nu\tilde{c}(\xi)\widehat{k}_1(\tau-\xi)+H(\xi,\nu,\lambda)V(\xi,\tau,\nu,\lambda)$$

$$-c_1(\xi)N(\xi,\tau,\nu,\lambda)+ic_1'(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda)-\frac{1}{2}q_2(\xi)w_\lambda(\xi,\tau,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_\xi^\tau\left[h(\tau-\eta)V(\xi,\eta,\nu,\lambda)+\widehat{k}_1(\tau-\eta)p(\xi,\eta,\nu,\lambda)\right]d\eta\Bigg\}d\tau d\xi. \tag{3.23}$$

Из (3.23) следует, что $\widehat{g}_1(0,\nu,\lambda)=0$. Заменяя $2z$ на t и дифференцируя (3.23) по t, получаем

$$-L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1'(t,\nu,\lambda)\right]+\frac{c_0'(0)}{2c_0(0)}L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_1(t,\nu,\lambda)\right]=-\frac{i\lambda}{2c_0(0)}c_1(t/2)$$

$$+\int\limits_0^{t/2}\Bigg\{\nu\tilde{c}(\xi)\widehat{k}_1(t-2\xi)+H(\xi,\nu,\lambda)V(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)$$

$$-c_1(\xi)N(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)+ic_1'(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial z}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)-\frac{1}{2}q_2(\xi)w_\lambda(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_0^{t-2\xi}\left[h(\tau)V(\xi,t-\xi-\eta,\nu,\lambda)+\widehat{k}_1(\tau)p(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda)\right]d\eta\Bigg\}d\tau d\xi. \tag{3.24}$$

Очевидно, что $c_1(0)=\frac{2c_0(0)}{i\lambda}\widehat{g}_1'(0,\nu,\lambda)$. Дифференцируя (3.24) по t, затем подставляя последовательно значения λ_1, λ_2 и составляя разность полученных равенств при фиксированном заданном ν, можно получить уравнение для $c'(z)(z=t/2)$:

$$c_1'(z)=\frac{1}{M(z)}\Delta_\lambda\left\{L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_{1\lambda}'(2z,\nu,\lambda)\right]'-\frac{c_0'(0)}{2c_0(0)}L\left[\widehat{k}_0,\widehat{g}_{1\lambda}'(2z,\nu,\lambda)\right]\right\}$$

$$-\underbrace{\frac{2\Delta_\lambda\{N(z,z,\nu,\lambda)\}}{M(z)}}_{\widetilde{N}_\lambda(z,\nu,\lambda)}c_1(z)+\frac{1}{M(z)}\int\limits_0^z\Delta_\lambda\Bigg\{H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial V}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)-c_1(\xi)\frac{\partial N}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)$$

$$+ic_1'(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda)-\frac{1}{2}q_2(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_0^{2z-2\xi}\left[h(\tau)\frac{\partial V}{\partial t}(\xi,2z-\xi-\tau,\nu,\lambda)+\widehat{k}_1(\tau)\frac{\partial p}{\partial t}(\xi,2z-\xi-\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau\Bigg\}d\xi, \tag{3.25}$$

где $\Delta_\lambda\{\cdot\}$ – это разность значений выражения в скобках при $\lambda=\lambda_1$ и $\lambda=\lambda_2$. В частности, $\Delta_\lambda\{N(z,z,\nu,\lambda)\}:=N(z,z,\nu,\lambda_1)-N(z,z,\nu,\lambda_2)$. Далее по аналогии под $\Delta_\nu\{\cdot\}$ будем подразумевать разность значений для ν_1,ν_2.

Заметим, что с учетом (3.8$'$)

$$M(z):=i(\lambda_1-\lambda_2)\left[1+\frac{1}{4c_0(0)}-\frac{c_0'(z)}{2c_0^3(z)}\int_0^z c_0^2(\xi)d\xi\right]\neq 0$$

при выполнении условия $c_0'(z)\le 0,\lambda_1\neq\lambda_2$.

Далее, дифференцируя уравнение (3.24) по t (предварительно сделав замену переменной в первом интеграле $t-2\xi=\tau$), затем подставляя значения параметра ν_1, ν_2 ($\nu_1 \neq \nu_2$) и составляя разность при фиксированном заданном значении λ, получаем уравнение для $\widehat{k}_1(t)$ $(t/2 = z)$:

$$\widehat{k}_1(t) = -\frac{2}{\tilde{c}(0)(\nu_1-\nu_2)}\Delta_\nu \left\{ L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}'_{1\nu}(t,\nu,\lambda)\right] + \frac{ic'_0(0)}{c_0(0)} L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}'_{1\nu}(t,\nu,\lambda)\right]\right\}$$

$$+\underbrace{\frac{\Delta_\nu\{2N(z,z,\nu,\lambda)\}}{\tilde{c}(0)(\nu_1-\nu_2)}}_{\widetilde{N}(z,\nu,\lambda)} c_1(z) - \frac{2}{\tilde{c}(0)(\nu_1-\nu_2)}\int\limits_0^z \Delta_\nu \Bigg\{ H(\xi,\nu,\lambda)\frac{\partial V}{\partial t}(\xi, t-\xi,\nu,\lambda)$$

$$-c_1(\xi)\frac{\partial N}{\partial t}(\xi, t-\xi,\nu,\lambda) + ic'_1(\xi)\left[q_1(\xi)\frac{\partial^2 w_\lambda}{\partial t\partial z}(\xi,\tau,\nu,\lambda) - \frac{1}{2}q_2(\xi)\frac{\partial w_\lambda}{\partial t}(\xi,t-\xi,\nu,\lambda)\right]$$

$$-\int_0^{t-2\xi}\left[h(\tau)\frac{\partial V}{\partial t}(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda) + \widehat{k}_1(\tau)\frac{\partial p}{\partial t}(\xi,t-\xi-\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau\Bigg\}d\xi. \tag{3.26}$$

Для замыкания системы интегральных уравнений (3.22), (3.25), (3.26) используются очевидные равенства для $c_1(z)$:

$$c_1(z) = c_1(0) + \int_0^z c'_1(\xi)d\xi \tag{3.27}$$

и для $\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)$, которое получается непосредственным дифференцированием по t уравнения (3.22):

$$\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda) = \frac{\partial}{\partial t}F[V, c_1, c'_1, \widehat{k}_1]. \tag{3.28}$$

Уравнения (3.22), (3.25)–(3.28) эквиваленты равенствам (3.17)–(3.20) и образуют замкнутую линейную систему интегральных уравнений Вольтерра второго рода в области D_T относительно $V(z,t,\nu,\lambda)$, $\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)$, $c_1(z)$, $c'_1(z)$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится тот факт, что функции $N(z,t,\nu,\lambda), p(z,t,\nu,\lambda) \in C^1[D_T]$. Следовательно, необходимо показать, что $w_\lambda,\ w_\nu \in C^3[D_T]$.

Действительно, с помощью формулы Даламбера для задачи (3.13), (3.15), (3.16) получим линейное интегральное уравнение Вольтерровского типа с непрерывным свободным членом и непрерывным ядром в области D_T:

$$w_\nu = \frac{1}{2}\left(L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_{0\nu}(t-z,\nu)\right] + L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_{0\nu}(t+z,\nu)\right]\right) + \frac{c'_0(0)}{4c_0(0)}\int\limits_{t-z}^{t+z} L\left[\widehat{k}_0, \widehat{g}_1(\tau,\nu,\lambda)\right]d\tau$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^z \int_{t-z+\xi}^{t+z-\xi} \Bigg\{ H(\xi,\nu)w_\nu(\xi,\tau,\nu) + H_\nu(\xi,\nu)w(\xi,\tau,\nu)$$

$$-\int_{\xi}^{\tau} h(\tau-\eta) w_{\nu}(\xi,\eta,\nu))d\eta\Bigg\}d\tau d\xi. \tag{3.29}$$

Из теории интегральных уравнений следует, что уравнение (3.29) имеет единственное решение, непрерывное в D_T. Степень гладкости решения устанавливается при помощи дифференцирования уравнения (3.29) достаточное количество раз. Легко проверяется, что правая часть продифференцированного уравнения будет непрерывной, а следовательно, будет непрерывна и левая часть [28, гл.2]. Таким образом, $w_\nu \in C^3[D_T]$.

Аналогично доказывается тот факт, что $w_\lambda \in C^3[D_T]$.

Основными результатами этого параграфа являются следующие теоремы однозначной разрешимости и устойчивости обратной задачи определения $a_1(y)$, $k_1(t)$.

Теорема 3.1 *Пусть выполнены условия теоремы 2.1 и* $g_1(t,\nu,\lambda) \in C^2[0,T]$ *при фиксированных ненулевых* (ν,λ), *и* $g_1(0,\nu,\lambda) \equiv 0$, $g_1'(0,\nu,\lambda) \equiv \frac{i\lambda c_1(0)}{2c_0(0)}$, $c_0'(z) \leq 0$. *Тогда существует единственное решение обратной задачи (1.11)–(1.14)* $c_1(z) \in C^1[0,T/2], k_1(t) \in C[0,T]$ *для любого фиксированного* $T > 0$.

Теорема 3.2. *Пусть* $c_1^{(1)}(z), c_1^{(2)}(z) \in C^1[0,T/2]$, $k_1^{(1)}(t), k_1^{(2)}(t) \in C[0,T]$ *– решения обратной задачи (1.11)–(1.14) с набором данных*

$$\Big\{c_0^{(j)}(z),\ g_1^{(j)}(t,\nu,\lambda),\ k_0^{(j)}(t),\ \tilde{u}_0^{(j)}(\phi^{-1}(x_3),t,\nu,\lambda)\Big\}$$

для $j = 1,2$ *соответственно. Тогда при выполнении условий теоремы 2.2 найдется такое положительное число* $\widetilde{C} = \widetilde{C}(C, h_1(\nu,\lambda))$, $h_1(\nu,\lambda) = \max\Big\{\|g_1^{(j)}(t,\nu,\lambda)\|_{C^2[0,T]}, \|N^{(j)}(z,t,\nu,\lambda)\|_{C^1(D_T)}, \|p^{(j)}(z,t,\nu,\lambda)\|_{C^1(D_T)},\ j = 1,2\Big\}$, *что справедлива оценка устойчивости*

$$\|c_1^{(1)} - c_1^{(2)}\|_{C^1[0,T/2]} + \|k_1^{(1)} - k_1^{(2)}\|_{C[0,T]} \leq \widetilde{C}\Big[\|c_0^{(1)} - c_0^{(2)}\|_{C[0,T/2]}$$

$$+\|\tilde{g}_1^{(1)} - \tilde{g}_1^{(2)}\|_{C^2[0,T]} + \|k_0^{(1)} - k_0^{(2)}\|_{C[0,T]}\Big]. \tag{3.31}$$

Доказательство теоремы 3.1 Система интегральных уравнений (3.22), (3.25)–(3.28) является замкнутой линейной системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода с непрерывными свободными членами и ядрами относительно неизвестных функций в области D_T. Идея доказательства существования единственного решения данной системы состоит в применении обобщенного принципа сжатых отображений. Запишем систему (3.22), (3.25)–(3.28) в виде операторного уравнения

$$\psi = B\psi, \tag{3.32}$$

$$\psi := \Big[\underbrace{V(z,t,\nu,\lambda) + \frac{1}{2c_0(0)}\int_{\frac{t-z}{2}}^{\frac{t+z}{2}} c_1(\xi)d\xi}_{\psi_1},\ \underbrace{c_1'(z) + \widetilde{N}_\lambda(z,\nu,\lambda)c_1(z)}_{\psi_2},$$

$$\underbrace{\widehat{k}_1(2z)-\widetilde{N}_\nu(z,\nu,\lambda)c_1(z)}_{\psi_3},\ \underbrace{c_1(z)}_{\psi_4},$$

$$\underbrace{\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)+\frac{1}{2c_0(0)}\Big[c_1\left(\frac{t+z}{2}\right)-c_1\left(\frac{t-z}{2}\right)\Big]+\frac{\nu}{2}\widehat{k}_1(z)\int_0^z\tilde{c}(\xi)d\xi}_{\psi_5}\Big].$$

Тогда неизвестные функции $V(z,t,\nu,\lambda)$, $c_1'(z)$, $\widehat{k}_1(2z)$, $\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)$ могут быть определены через компоненты вектор-функции ψ:

$$V(z,t,\nu,\lambda)=\psi_1(\xi,\tau,\nu)+\frac{1}{2c_0(0)}\int_{\frac{\tau-\xi}{2}}^{\frac{\tau+\xi}{2}}\psi_4(s)ds,$$

$$c_1'(z)=\psi_2(z,\nu,\lambda)-\widetilde{N}_\lambda(z,\nu,\lambda)\psi_4(z),$$
$$\widehat{k}_1(2z)=\psi_3(z,\nu,\lambda)+\widetilde{N}_\nu(z,\nu,\lambda)\psi_4(z),$$
$$\frac{\partial V}{\partial t}(z,t,\nu,\lambda)=\psi_5(z,t,\nu,\lambda)-\frac{1}{2c_0(0)}\Big[\psi_4\left(\frac{t+z}{2}\right)-\psi_4\left(\frac{t-z}{2}\right)\Big]$$
$$-\frac{\nu}{2}\Big[\psi_3(z/2,\nu,\lambda)+\widetilde{N}_\nu(z/2,\nu,\lambda)\psi_4(z/2)\Big]\int_0^z\tilde{c}(\xi)d\xi.$$

Оператор $B=(B_1,B_2,B_3,B_4,B_5)$ определен на множестве функций $\psi\in C(D_T)$ при фиксированных ν,λ.

Покажем теперь, что некоторая степень n (n – натуральное число) линейного отображения $B\psi$ является сжатием. Положим

$$\|\psi\|=\max\{\max_{(z,t)\in D_T}|\psi_j(z,t,\nu,\lambda))|,\ j=1,...,5\}.$$

Пусть $\psi^{(1)},\psi^{(2)}$ – две непрерывные вектор-функции в D_T, удовлетворяющие линейной системе интегральных уравнений (3.32). Обозначим

$$\Delta(z,t)=\{(\xi,\tau):\ 0\le\xi\le z,\ t-z+\xi\le\tau\le t+z-\xi\},$$

$$\Sigma(z,t,\xi)=\{\tau:\ (\xi,\tau)\in\Delta(z,t)\}.$$

Тогда в силу линейности из (3.32) для $(z,t)\in D_T$ в соответствии с уравнениями (3.22), (3.25)–(3.28) имеем (в последующих оценках для краткости будут опущены в списке аргументов параметры преобразования ν,λ)

$$|B_1\psi^{(1)}-B_1\psi^{(2)}|(z,t)$$

$$\le\mu_1\int_0^z\max\Big\{\max_{\tau\in\Sigma(z,t,\xi)}|\psi_1^{(1)}(\xi,\tau)-\psi_1^{(2)}(\xi,\tau)|,|\psi_j^{(1)}(\xi)-\psi_j^{(2)}(\xi)|\Big\}d\xi$$
$$\le\mu_1z\|\psi^{(1)}-\psi^{(2)}\|,\ j=2,3,4,$$

далее

$$|B_l\psi^{(1)}-B_l\psi^{(2)}|(z)$$

$$\le \mu_2 \int_0^z \max\Big\{|\psi_5^{(1)}(\xi, T-\xi) - \psi_5^{(2)}(\xi, T-\xi)|, |\psi_j^{(1)}(\xi) - \psi_j^{(2)}(\xi)|\Big\}\, d\xi$$
$$\le \mu_l z \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,\ j = 2,3,4;\ l = 2,3;$$

$$|B_4\psi^{(1)} - B_4\psi^{(2)}|(z) \le \mu_4 \int_0^z \max\Big\{|\psi_2^{(1)}(\xi) - \psi_2^{(2)}(\xi)|, |\psi_4^{(1)}(\xi) - \psi_4^{(2)}(\xi)|\Big\} d\xi$$
$$\le \mu_4 z \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,$$

$$|B_5\psi^{(1)} - B_5\psi^{(2)}|(z,t)$$
$$\le \mu_5 \int_0^z \max\Big\{\max_{\tau\in\Sigma(z,t,\xi)} |\psi_1^{(1)}(\xi,\tau) - \psi_1^{(2)}(\xi,\tau)|, |\psi_j^{(1)}(\xi) - \psi_j^{(2)}(\xi)|\Big\}\, d\xi$$
$$\le \mu_5 z \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,\ j = 2,3,4,$$

где μ_j – константы, зависящие от величин, входящих в $\widetilde{C}$ (теорема 3.2).

Полагая $\widetilde{M} = \max\{\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4, \mu_5\}$, получаем, что

$$\max_{1\le j\le 5} |B_j\psi^{(1)} - B_j\psi^{(2)}|(z,t) \le \widetilde{M} z \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (z,t)\in D_T.$$

Далее

$$|B_1^2\psi^{(1)} - B_1^2\psi^{(2)}|(z,t)$$
$$\le \mu_1 \int_0^z \max\Big\{\max_{\tau\in\Sigma(z,t,\xi)} |B_1\psi^{(1)}(\xi,\tau) - B_1\psi^{(2)}(\xi,\tau)|, |B_j\psi^{(1)}(\xi) - B_j\psi^{(2)}(\xi)|\Big\}\, d\xi$$
$$\le \mu_1 \widetilde{M} \int_0^z \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|\, d\xi \le \mu_1 \widetilde{M} \frac{z^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,\ j = 2,3,4,$$

аналогично

$$|B_j^2\psi^{(1)} - B_j^2\psi^{(2)}|(z) \le \mu_j \widetilde{M} \int_0^z \xi \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|\, d\xi \le \mu_j \widetilde{M} \frac{z^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|,\ j = 2,3,4,5.$$

Отсюда

$$\max_{1\le j\le 5} |B_j^2\psi^{(1)} - B_j^2\psi^{(2)}|(z,t,\nu) \le \widetilde{M}^2 \frac{z^2}{2!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (z,t)\in D_T.$$

и, вообще,

$$\max_{1\le j\le 5} |B_j^n\psi^{(1)} - B_j^n\psi^{(2)}|(z,t,\nu) \le \widetilde{M}^n \frac{z^n}{n!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|, \quad (z,t)\in D_T,$$

$$\|B^n\psi^{(1)} - B^n\psi^{(2)}\| \le \widetilde{M}^n \frac{(\frac{T}{2})^n}{n!} \|\psi^{(1)} - \psi^{(2)}\|.$$

При любом фиксированном T число n можно выбрать настолько большим, что

$$\widetilde{M}^n \frac{(\frac{T}{2})^n}{n!} := \alpha < 1.$$

Тогда отображение B^n является сжатием. Согласно обобщению принципа сжимающих отображений уравнение $B\psi = \psi$ имеет одно и только одно решение, принадлежащее $C(D_T)$. Данное решение может быть найдено методом последовательных приближений.

Доказательство теоремы 3.2.

Пусть $\psi^{(j)}$ – вектор функций, которые являются решениями (3.32) с набором данных $\left\{c_0^{(j)}(z),\, g_1^{(j)}(t),\, k_0^{(j)}(t),\, w^{(j)}(z,t)\right\}$, $j = 1, 2$, соответственно, т.е. справедливы уравнения $\psi^{(j)} = B\psi^{(j)}$.

Далее, известная функция $c_0^{(j)}(z)$, $j = 1, 2$ входит в свободные члены этих интегральных уравнений соответствующим образом через функцию $1/M(z)$, которая может быть оценена как $|1/M(z)| < 1/|\lambda_1 - \lambda_2|$, и функцию $N(z, z, \nu, \lambda)$. Переходя к разностям $c_0^{(1)} - c_0^{(2)}$, подобно тому, как это сделано в теореме 2.2, из рассуждений, проведенных при доказательстве теоремы 3.1, получим оценку

$$\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\| \le \mu_0\gamma + \alpha\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\|, \tag{3.33}$$

где

$$\gamma := \|c_0^{(1)} - c_0^{(2)}\|_{C^1[0,T/2]} + \|g_1^{(1)} - g_1^{(2)}\|_{C^2[0,T]} + \|k_0^{(1)} - k_0^{(2)}\|_{C[0,T]}$$

и постоянная μ_0 зависит от величин, входящих в $\widetilde{C}$. Из равенства (3.33) следует, что

$$\left\|\varphi^{(1)} - \varphi^{(2)}\right\| \le \widetilde{\mu}\gamma$$

с постоянной $\widetilde{\mu} = \mu_0/(1-\alpha)$.

Рассматривая уравнение $k_1(t) = \exp[k_0(0)t/2]\widehat{k}_1(t)$ для $\left\{k_1^{(1)}, \widehat{k}_1^{(1)}\right\}$, $\left\{k_1^{(2)}, \widehat{k}_1^{(2)}\right\}$ и используя (3.33), получаем оценку (3.31). Теорема 3.2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lorenzi A. and Sinestrari E.* An inverse problem in the theory of materials with memory I, Nonlinear Anal. TMA. 1988. V. 12. P. 1217–1335.

2. *Lorenzi A.* An inverse problem in the theory of materials with memory II // "Semigroup Theory and Applications", Series on Pure and Applied Mathematics. 1989. V. 116. P. 261–290.

3. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача для трехмерного волнового уравнения в среде с памятью // Матем. анализ и дискретная математика. Новосибирск, изд-во Новосибирского университета: 1989. С. 19–27.

4. *Lorenzi A. and Paparoni E.* Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // Ren. Sem. Math. Univ. 1992. V. 87. P. 105–138.

5. *Bukhgeym A. L.* Inverse problems of memory reconstruction // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. 1993. V. 1, N 3. P. 193–206.

6. *Дурдиев Д. К.* Многомерная обратная задача для уравнения с памятью // Сиб. мат. журнал. 1994. Т. 35, N 3. С. 574–582.

7. *Bukhgeim A. L., Dyatlov G. V.* Inverse problems for equations with memory // SIAM J. Math. Fool. 1998. V. 1, N 2. P. 1–17.

8. *Дурдиев Д. К.* Обратные задачи для сред с последействием. Ташкент: ТУРОН - ИКБОЛ, 2014.

9. *Lorenzi A., Ulekova J. Sh., Yakhno V. G.* An inverse problem in viscoelasticity // J. Inv. Ill - posed Prob. 1994. V. 2. P. 131–165.

10. *Janno J. and von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // Math. methods in Appl. Sciences. 1997. V. 20, N 4. P. 291–314.

11. *Janno J. and Von Wolfersdorf L.* An inverse problem for identification of a time- and space-dependent memory kernel in viscoelasticity // Inverse Problems. 2001. V. 17. P. 13–24.

12. *Lorenzi A., Messina F., Romanov V. G.* Recovering a Lame kernel in a viscoelastic system // Applicable Analysis. 2007. V. 86, N 11. P. 1375–1395.

13. *Romanov V. G., Yamamoto M.* Recovering a Lame kernel in a viscoelastic equation by a single boundary measurement // Applicable Analysis. 2010. V. 89, N 3. P. 377–390.

14. *Lorenzi A. and Romanov V. G.* Recovering two Lame Kernels in a Viscoelastic System // Inverse Probl. Imaging. 2011. V. 5, N 2. P. 431–464.

15. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача для уравнения вязкоупругости // Сиб. матем. журн. 2012. Т. 53, N 6. С. 1401–1412.

16. *Romanov V. G.* Inverse problems for differential equations with memory // Eurasian J. of Mathematical and Computer Applications. 2014. V. 2, N 4. P. 51–80

17. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения электровязкоупругости // Сибирский математический журнал. 2017. т.58, N 3. С. 553-572. https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.307.

18. *Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А.* Обратная задача для системы интегро-дифференциальных уравнений SH-волн в вязкоупругой пористой среде: глобальная разрешимость // ТМФ. 2018. Т. 195, N 3. С. 491–506. https://doi.org/10.4213/tmf9480.

19. *Karchevsky A. L., Fatianov A. G.* Numerical solution of the inverse problem for a system of elasticity with the aftereffect for a vertically inhomogeneous medium // Sib. Zh. Vychisl. Mat. 2001. T.4, N 3. P. 259–268. http://mi.mathnet.ru/sjvm399.

20. *Durdiev U. D.* Numerical method for determining the dependence of the dielectric permittivity on the frequency in the equation of electrodynamics with memory// Sib. Elektron. Mat. Izv. 2020. T. 17, P. 179–189. https://doi.org/10.33048/semi.2020.17.013.

21. *Bozorov Z. R.* Numerical determining a memory function of a horizontally-stratified elastic medium with aftereffect // Eurasian journal of mathematical and computer applications. 2020. T. 8, N 2. P. 4–16.

22. *Davies A. R. and Douglas R. J.* A kernel approach to deconvolution of the complex modulus in linear viscoelasticity // Inverse Problems. 2020. V. 36, 015001.

23. *Ахматов З. А., Тотиева Ж. Д.* Квазидвумерная коэффициентная обратная задача для волнового уравнения в слабо горизонтально-неоднородной среде с памятью //Владикавказский математический журнал. 2021. Т. 23, N 4. С. 15–27. DOI 10.46698/l4464-6098-4749-m

24. *Kaltenbacher B., Khristenko U., Nikolic V., Rajendran L.M. and Wohlmuth B.* Determining Kernels In Linear Viscoelasticity, 2001. arXiv:2112.14071. https://doi.org/10.48550/arXiv.2112.14071.

25. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении многомерного ядра уравнения вязкоупругости // Владикавказский математический журнал. 2015. Т. 17, N 4. С. 18–43. http://mi.mathnet.ru/vmj560.

26. *Дурдиев Д. К., Бозоров З. Р.* Задача определения ядра интегро-дифференциального волнового уравнения со слабо горизонтальной однородностью // Дальневосточный математический журнал. 2013. Т. 13, N 2. С. 209–221. http://mi.mathnet.ru/dvmg264.

27. *Благовещенский А. С., Федоренко Д. А.* Уравнения акустики в слабо горизонтально-неоднородной среде // Записки научных семинаров ПОМИ. 2008. Т. 354. С. 81–99.

28. *Романов В. Г.* Обратные задачи математической физики. Москва: Наука, 1984.

29. *Дурдиев Д. К.* Обратная задача определения двух коэффициентов в одном интегродифференциальном волновом уравнении // Сиб. журн. индустр. матем 2009. Т. 12, N 3. С. 28–40.

30. *Романов В. Г.* Двумерная обратная задача для интегро-дифференциального уравнения электродинамики // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, N 1. С. 273–280. http://mi.mathnet.ru/timm796.

31. *Романов В. Г.* Об определении коэффициентов в уравнениях вязкоупругости // Сиб. матем. журн. 2014. Т. 55, N 3. С. 617–626. http://mi.mathnet.ru/smj2558.

32. *Рахмонов А. А., Дурдиев У. Д., Бозоров З. Р.* Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды // ТМФ. 2021. Т. 207, N 1. С. 112–132. https://doi.org/10.4213/tmf10035.

33. *Тотиева Ж. Д.* Определение ядра уравнения вязкоупругости в слабо горизонтально-неоднородной среде // Сиб. матем. журн. 2020. Т 61, N 2. С. 453–475. https://doi.org/10.33048/smzh.2020.61.217.

34. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* Задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости // Сиб. журн. индустр. матем. 2013. Т. 16, N 2. С. 72–82. http://mi.mathnet.ru/sjim781

35. *Яхно В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. Новосибирск: Наука, 1988.

Тотиева Жанна Дмитриевна
Южный математический институт ВНЦ РАН,
старший научный сотрудник отдела математического моделирования
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Ватутина, 53;
E-mail:jannatuaeva@inbox.ru