S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, стр. 144–144 (2022) УДК 512.813
DOI 10.33048/semi.2022.19.xxx MSC 22E60

СЕМИМЕРНЫЕ ВЕЩЕСТВЕННЫЕ И КОМПЛЕКСНЫЕ НЕРАЗРЕШИМЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Н.П. МОЖЕЙ

Abstract. This paper is devoted to the classification up to isomorphism of abstract unsolvable Lie algebras of dimension 7. With the help of Maltsev splitting, the problem of describing Lie algebras over a field of characteristic zero is reduced to describing almost algebraic Lie algebras, which, in turn, require knowledge of semisimple and nilpotent algebras. Based on the classifications of semisimple and nilpotent Lie algebras, the paper presents an algorithm for describing abstract Lie algebras and conducts the classification of seven-dimensional unsolvable Lie algebras over fields $\mathbb{R}$ and $\mathbb{C}$.

Keywords: unsolvable Lie algebra, Maltsev splitting, almost algebraic Lie algebra, classification algorithm

1. Введение

Данная работа посвящена классификации с точностью до изоморфизма абстрактных неразрешимых алгебр Ли размерности 7. Предлагаемый классификационный алгоритм основывается на понятиях почти алгебраической алгебры Ли и расщепления Мальцева для абстрактной алгебры Ли.

В теории алгебр Ли наиболее изученным классом являются полупростые алгебры Ли, полная классификация которых существует для каждой фиксированной размерности (из последних работ в этой области см. [1, 2]). Для разрешимых алгебр Ли и для полупрямых сумм полупростых и разрешимых алгебр Ли известны лишь отдельные классификационные результаты. Алгебры Ли размерности 4 над полем комплексных чисел были получены еще Софусом Ли [3]. Четырехмерные алгебры Ли над полем действительных чисел и пятимерные алгебры Ли над полями комплексных и действительных чисел приведены в работах Мубаракзянова [4, 5]. Шестимерные нильпотентные алгебры Ли над полем комплексных чисел классифицированы Умлауфом [6], а над полем

Mozhey, N.P., Seven-dimensional real and complex unsolvable Lie algebras.

Поступила 13 мая 2022 г., опубликована 31 декабря 2022 г.

нулевой характеристики — Морозовым [7]. Описание неразрешимых алгебр Ли в малых размерностях содержится в работах Турковского [8, 9]. В работе Мубаракзянова [4] предложена методика классификации разрешимых алгебр Ли. При этом в качестве основного объекта, характеризующего алгебру, рассматривается ее наибольший нильпотентный идеал. В последующих работах того же автора [10, 11] была произведена классификация разрешимых шестимерных алгебр Ли над полем действительных чисел. Классификация разрешимых алгебр Ли до размерности шесть также приведена в [12], можно упомянуть еще работу [13].

В данной статье предлагается общий подход к классификации произвольных алгебр Ли. С помощью расщепления Мальцева задача описания алгебр Ли над полем нулевой характеристики сводится к описанию почти алгебраических алгебр Ли, для которых, в свою очередь, необходимо знание полупростых и нильпотентных алгебр. Полупростые алгебры Ли описываются в терминах систем корней и задаются с помощью образующих и соотношений. Нильпотентные алгебры Ли не обладают такими хорошими свойствами. Например, уже в размерности 7 существуют нильпотентные алгебры, не имеющие полупростых дифференцирований. Существующие методы классификации индуктивны по размерности и для малых размерностей позволяют быстро получить результат. Однако с каждым следующим шагом возникают большие вычислительные сложности. Например, в методе Морозова [7] нильпотентная алгебра Ли рассматривается как нецентральное расширение с помощью максимального абелевого идеала, и (чтобы воспользоваться этим методом) нужно знать неразложимые конечномерные представления нильпотентных алгебр меньшей размерности и уметь определять изоморфизм новых алгебр. Классификация 7-мерных нильпотентных алгебр Ли с помощью этого метода была получена в [14], с другими методами описания 7-мерных нильпотентных алгебр Ли можно ознакомится, например, по работам [15, 16, 17, 18], содержащим, однако, ошибки и неточности, исправленные в работе Гонга [19].

В бóльших размерностях известны лишь частичные классификационные результаты, получены отдельные классы алгебр Ли, например, подкласс десятимерных неразложимых алгебр Ли с нетривиальным разложением Леви [20, 21], инварианты девятимерных вещественных алгебр Ли указанного типа [22], представления алгебр Ли, допускающих нетривиальное разложение Леви, до размерности восемь [23] и в размерности девять [24], предложен способ нахождения нильпотентных алгебр Ли [25], см. также работы [26, 27] и др.

Основываясь на классификациях полупростых и нильпотентных алгебр Ли, в работе приводится алгоритм описания абстрактных алгебр Ли и проводится сама классификация семимерных неразрешимых алгебр Ли над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Вместе с работами Парри [28], Хинделе и Томпсона [29], а также совместной работой Ву, Туан, Ту, Туйен и Тьеу [30] это завершает классификацию семимерных алгебр Ли. Рассматриваемая в работе задача также тесно связана, например, с проблемой описания голоморфно однородных вещественных гиперповерхностей четырехмерного комплексного пространства, в частности, абстрактные алгебры Ли размерности 7 соответствуют однородным гиперповерхностям, стабилизатор которых тривиален (поверхности с нетривиальным стабилизатором описывались, например, в [31]).

2. Основные определения

В дальнейшем нам понадобятся следующие определения. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли над полем k характеристики 0. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ естественным образом действует на себе: $x.y = [x, y]$ для любых $x, y \in \mathfrak{g}$. Такой модуль называется *присоединенным*, $x_{\mathfrak{g}} = \mathrm{ad}x$ для всех $x \in \mathfrak{g}$. Подмодули присоединенного модуля — идеалы алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Присоединенный модуль точен тогда и только тогда, когда центр алгебры Ли $\mathfrak{g}$ тривиален, а полупрост — когда алгебра Ли $\mathfrak{g}$ представима в виде прямой суммы полупростого идеала $\mathfrak{a} = \mathcal{D}\mathfrak{g}$ и центра $Z(\mathfrak{g})$. Такие алгебры Ли называются *редуктивными.* Эндоморфизм $d\colon \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ называется *дифференцированием*, если $d(xy) = d(x)y + xd(y)$ для всех $x, y \in \mathfrak{g}$. Множество всех дифференцирований алгебры $\mathfrak{g}$ обозначается через $\mathrm{Der}(\mathfrak{g})$.

Подалгебры алгебры Ли $\mathfrak{gl}(V)$ называются *линейными алгебрами Ли.* Линейная алгебра Ли называется *разделяющей*, если она содержит полупростую и нильпотентную компоненты каждого своего элемента. *Разделяющей оболочкой* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется минимальная разделяющая линейная алгебра Ли, содержащая $\mathfrak{g}$, обозначается $e(\mathfrak{g})$. Если $\mathfrak{g}$ — разделяющая линейная алгебра Ли, а $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_V(\mathfrak{g})$ — наибольший идеал нильпотентности тождественного представления алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в V, который мы будем называть *линейным нильрадикалом* линейной алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то существует такая подалгебра $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{g}$, редуктивная в $\mathfrak{gl}(V)$, что $\mathfrak{g}$ является прямой суммой подпространств $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ [32]. Любая подалгебра $\mathfrak{m}$ с указанными свойствами называется *подалгеброй Мальцева* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ называется *разложением Мальцева* разделяющей алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Заметим, что подалгебра Мальцева $\mathfrak{m}$ является прямой суммой подалгебры Леви $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и центра $\mathfrak{t}$ алгебры Ли $\mathfrak{m}$, а $\mathfrak{t}$ — максимальным элементом множества коммутативных подалгебр радикала $\mathfrak{r}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, состоящих из полупростых эндоморфизмов. Кроме того, идеал $\mathfrak{n}$ совпадает с множеством нильпотентных эндоморфизмов, лежащих в радикале $\mathfrak{r}$, и $\mathfrak{r} = \mathfrak{t} \oplus \mathfrak{n}$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли и $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}(\mathfrak{g})$ — ее наибольший нильпотентный идеал. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *почти алгебраической*, если существует подалгебра $\mathfrak{m}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, редуктивная в $\mathfrak{g}$, такая, что $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$. При этом подалгебра $\mathfrak{m}$ называется *подалгеброй Мальцева* почти алгебраической алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ — ее *разложением Мальцева. Расщеплением Мальцева* алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется вложение $\alpha\colon \mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$ в почти алгебраическую алгебру Ли $\bar{\mathfrak{g}}$, такое, что в $\bar{\mathfrak{g}}$ не существует собственных почти алгебраических подалгебр, содержащих $\alpha(\mathfrak{g})$. Впервые расщепление Мальцева было введено А.И. Мальцевым в [33]. В дальнейшем идеи Мальцева были развиты в ряде работ [34, 35, 36], в которых, в частности, были предложены другие варианты для построения расщепления.

Назовем алгебру Ли $\mathfrak{g}$ *точной*, если ее наибольший полупростой идеал равен $\{0\}$. Пусть $\mathfrak{g}$ — точная почти алгебраическая алгебра Ли, $\mathfrak{n}$ — наибольший нильпотентный идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{m}$ — некоторая подалгебра Мальцева алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Алгебра Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ дифференцирований алгебры Ли $\mathfrak{n}$ является разделяющей [32]. Пространство $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$ канонически наделяется структурой алгебры Ли: $[d_1 + n_1, d_2 + n_2] = [d_1, d_2] + d_1(n_2) - d_2(n_1) + [n_1, n_2]$, где $d_1, d_2 \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ и $n_1, n_2 \in \mathfrak{n}$. Для каждого $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{n})$ мы будем обозначать через $\bar{\varphi}$ автоморфизм алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$ вида $d + n \mapsto \varphi \cdot d \cdot \varphi^{-1} + \varphi(n)$, где $d \in \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ и $n \in \mathfrak{n}$. Гомоморфизм алгебр Ли $\rho_{\mathfrak{m}}\colon \mathfrak{m} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$, при котором $\rho_{\mathfrak{m}}(m)(n) = [m, n]$ для всех $m \in \mathfrak{m}$, $n \in \mathfrak{n}$, инъективен. Кроме того, $\rho_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ и подалгебра $\rho_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$ редуктивна в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$. Ясно, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ изоморфна подалгебре $\rho_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m}) \oplus \mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$.

Пусть $\bar{\mathfrak{m}}$ — подалгебра Мальцева разделяющей алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n})$, содержащая $\rho_{\mathfrak{m}}(\mathfrak{m})$. Тогда подалгебра $\bar{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$ алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$ является точной почти алгебраической алгеброй Ли с наибольшим нильпотентным идеалом $\mathfrak{n}$ и подалгеброй Мальцева $\bar{\mathfrak{m}}$. Допуская некоторую вольность, алгебру Ли $\bar{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$ будем называть *максимальной* точной почти алгебраической алгеброй Ли с наибольшим нильпотентным идеалом $\mathfrak{n}$. Заметим, что этот объект определяется однозначно с точностью до изоморфизма (т. к. подалгебры Мальцева разделяющей алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n})$ переводятся друг в друга автоморфизмами алгебры Ли $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$ вида $\overline{\exp x}$, где $x \in \mathfrak{n}_{\mathfrak{n}}(\mathrm{Der}(\mathfrak{n}))$).

3. Описание алгоритма классификации абстрактных алгебр Ли

Напомним, что алгебра Ли $\mathfrak{g}$ называется *точной*, если ее наибольший полупростой идеал равен нулю. Если $\mathfrak{s}$ — наибольший полупростой идеал алгебры Ли $\mathfrak{g}$, то $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ и алгебра $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$ является точной. Классификация полупростых алгебр Ли известна, и поэтому достаточно ограничиться классификацией точных алгебр Ли.

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ — почти алгебраическая алгебра Ли, а U и W — такие подпространства пространства $\mathfrak{g}$, что $U \subset W$. Положим $\mathfrak{g}(U, W) = \{x \in \mathfrak{g} \mid [x, W] \subset U\}$. Тогда $\mathfrak{g}(U, W)$ является почти алгебраической алгеброй Ли.*

Доказательство. Пусть $x \in \mathfrak{g}(U, W)$ и $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x)_n$ — нильпотентная компонента эндоморфизма $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$. Из того, что алгебра Ли $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g})$ является разделяющей, следует, что найдется такой $y \in \mathfrak{g}$, что $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} y = (\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x)_n$. Известно, что $(\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x)_n$ является многочленом от $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}} x$ без свободного члена. Поэтому $y \in \mathfrak{g}(U, W)$ и подалгебра $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{g}(U, W))$ является разделяющей. Осталось заметить, что если $\mathfrak{q}$ — такая подалгебра алгебры Ли $\mathfrak{g}$, что подалгебра $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{q})$ является разделяющей, то подалгебра $\mathrm{ad}_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{q})$ также является разделяющей, а алгебра Ли $\mathfrak{q}$ — почти алгебраической. □

Точность алгебры Ли $\mathfrak{g}$ эквивалентна точности ее расщепления Мальцева. Действительно, если $\bar{\mathfrak{g}}$ расщепление Мальцева для $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{s}$ — идеал в $\mathfrak{g}$, то (в силу Леммы 1) $\mathfrak{s}$ — идеал и в $\bar{\mathfrak{g}}$. Классификация точных алгебр Ли разбивается на следующие подзадачи:

[A] классификация нильпотентных алгебр Ли;

[B] классификация точных почти алгебраических алгебр Ли с данным наибольшим нильпотентным идеалом из пункта [A];

[C] классификация точных алгебр Ли, не являющихся почти алгебраическими, с данным расщеплением Мальцева (с использованием результатов пункта [B]).

Пусть размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}$ фиксирована. Внесем соответствующие уточнения в алгоритм:

[A] Классификация нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{n}$, таких, что $\dim \mathfrak{n} = \dim \mathfrak{g}$.

[B] Если $\mathfrak{g}$ — почти алгебраическая алгебра Ли и $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ — ее разложение Мальцева, то $\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{m} + \dim \mathfrak{n}$. Проводится:

a) классификация нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{n}$, таких, что $\dim\mathfrak{n} < \dim\mathfrak{g}$;
b) построение максимальной точной почти алгебраической алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$;
c) классификация с точностью до группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}})$, действующей в $\overline{\mathfrak{m}}$, подалгебр $\mathfrak{m}$, редуктивных в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$, таких, что $\dim\mathfrak{m} = \dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{n}$.

[C] Пусть $\overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n}$ — максимальная точная почти алгебраическая алгебра Ли. Определим для каких подалгебр $\mathfrak{m} \subset \overline{\mathfrak{m}}$ существуют алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с данным расщеплением Мальцева $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ и с данным значением $\dim\mathfrak{g}$. Указанные условия сформулируем в терминах $\mathfrak{m}$-модуля $\mathfrak{n}$.

Обозначим через $\mathfrak{a}$ факторалгебру $\bar{\mathfrak{g}}/(\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}} + Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}}))$. Пусть $p\colon \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{a}$ — канонический гомоморфизм. Посредством факторизации определим гомоморфизм групп: $\varepsilon\colon \mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}) \to \mathrm{Aut}(\mathfrak{a})$.

Алгоритм классификации алгебр Ли, не являющихся почти алгебраическими, можно сформулировать в следующем виде:

a) Для данной почти алгебраической алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ определяем группу $G = \varepsilon(\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{m}))$;
b) в пространстве $\mathfrak{a}$ описываем с точностью до группы G все такие подпространства U, что $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ и $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$.

Тогда всякая алгебра Ли с заданным расщеплением Мальцева $\bar{\mathfrak{g}}$ будет сопряжена одной и только одной из следующих алгебр вида $p^{-1}(U)$.

Таким образом, получаем, что $\dim\mathfrak{g} = \dim U + \dim(\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}} + Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}}))$ и $\max(\dim p(\mathfrak{m}), \dim p(\mathfrak{n})) \leq \dim U < \dim p(\mathfrak{m}) + \dim p(\mathfrak{n})$ ($\dim p(\mathfrak{m}) \cdot \dim p(\mathfrak{n}) \neq 0$, иначе требуемых $\mathfrak{g}$ не существует). При этом реализуются все значения для $\dim U$ из указанного интервала. Заметим, что если $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$ — разложение $\mathfrak{m}$, где $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ и $\mathfrak{t}$ — центр $\mathfrak{m}$, то $\dim p(\mathfrak{m}) = \dim\mathfrak{t}$, так как $\mathfrak{s} \subset \mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}}$ и $\mathfrak{t} \cap (\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}} + Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}})) \subset \mathfrak{t} \cap (\mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}) = \{0\}$.

Пусть теперь V — произвольный $\mathfrak{m}$-модуль. Символом $\mathfrak{m}.V$ обозначим подмодуль в V, порожденный элементами вида $x.v$ ($x \in \mathfrak{m}$, $v \in V$). Если $\mathfrak{m}$-модуль V — полупрост и V_1 есть $\mathfrak{m}$-подмодуль, то $\dim(\mathfrak{m}.V) = \dim(\mathfrak{m}.V_1) + \dim(\mathfrak{m}.V/V_1)$. Действительно, поскольку $\mathfrak{m}$-модуль V — полупрост, то существует $\mathfrak{m}$-подмодуль V_2, такой, что $V = V_1 \oplus V_2$. Так как $\mathfrak{m}$-модули V/V_1 и V_2 изоморфны, то $\dim(\mathfrak{m}.V/V_1) = \dim(\mathfrak{m}.V_2)$.

Лемма 2. *Пусть V — полупростой $\mathfrak{m}$-модуль и $V^{\mathfrak{m}}$ — подмодуль инвариантных элементов, то есть $V^{\mathfrak{m}} = \{v \in V \mid x.v = 0$ для всех $x \in \mathfrak{m}\}$. Пусть V_1 и V_2 — подмодули $\mathfrak{m}$-модуля V. Тогда $V^{\mathfrak{m}} \cap (V_1 + V_2) = V^{\mathfrak{m}} \cap V_1 + V^{\mathfrak{m}} \cap V_2$.*

Доказательство. Покажем, что имеет место включение: $V^{\mathfrak{m}} \cap (V_1 + V_2) \subset V^{\mathfrak{m}} \cap V_1 + V^{\mathfrak{m}} \cap V_2$. Для полупростых $\mathfrak{m}$-модулей получаем разложение: $V_1 = \mathfrak{m}.V_1 \oplus V_1^{\mathfrak{m}}$, $V_2 = \mathfrak{m}.V_2 \oplus V_2^{\mathfrak{m}}$, $V_1 + V_2 = \mathfrak{m}.(V_1 + V_2) \oplus (V_1 + V_2)^{\mathfrak{m}}$ [32]. Пусть $v \in V^{\mathfrak{m}} \cap (V_1 + V_2)$ и $v = u + w$, где $u \in V_1$, $w \in V_2$. Рассмотрим разложение $u = u_1 + u_2$, где $u_1 \in \mathfrak{m}.V_1$, $u_2 \in V_1^{\mathfrak{m}}$ и $w = w_1 + w_2$, где $w_1 \in \mathfrak{m}.V_2$, $w_2 \in V_2^{\mathfrak{m}}$. Так как $\mathfrak{m}.v = \mathfrak{m}.v_2 = \mathfrak{m}.w_2 = 0$, то $\mathfrak{m}.(u_1 + w_1) = 0$ и $u_1 + w_1 \in (V_1 + V_2)^{\mathfrak{m}}$. С другой стороны, $u_1 + w_1 \in \mathfrak{m}.V_1 + \mathfrak{m}.V_2 \subset \mathfrak{m}.(V_1 + V_2)$. Следовательно, $u_1 + w_1 = 0$ и $v = u_2 + w_2 \in V^{\mathfrak{m}} \cap V_1 + V^{\mathfrak{m}} \cap V_2$. $\square$

Обозначим через $\mathfrak{b}$ факторалгебру $\mathfrak{n}/(\mathcal{D}\mathfrak{n} + Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}))$.

Предложение 1. *Пусть $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ — почти алгебраическая алгебра Ли и $\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$, где $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m}, \mathfrak{m}]$ и $\mathfrak{t}$ — центр $\mathfrak{m}$. Для того, чтобы существовала* *нетривиальная подалгебра* $\mathfrak{g} \subset \bar{\mathfrak{g}}$, *имеющая* $\bar{\mathfrak{g}}$ *в качестве расщепления Мальцева, необходимо и достаточно, чтобы* $\dim \mathfrak{t} \cdot \dim p(\mathfrak{n}) \neq 0$. *При этом*

$$\dim p(\mathfrak{n}) = \dim \mathfrak{b} - \dim(\mathfrak{m}.\mathfrak{b}), \tag{1}$$

$$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{s} + \dim(\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})) + \dim(\mathfrak{m}.\mathfrak{b}) + \dim U, \tag{2}$$

где $U = p(\mathfrak{g})$ *и* $\max(\dim \mathfrak{t}, \dim p(\mathfrak{n})) \leq \dim U < \dim \mathfrak{t} + \dim p(\mathfrak{n})$.

Доказательство. Докажем приведенные формулы для $\dim p(\mathfrak{n})$ и $\dim \mathfrak{g}$, поскольку остальные части предложения очевидны. Поскольку $Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}}) \subset \mathfrak{n}$, то $Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}}) = Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})$. Так как $\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{s} \oplus ([\mathfrak{m},\mathfrak{n}] + \mathcal{D}\mathfrak{n})$, то имеем $\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}}+Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{s} \oplus ([\mathfrak{m},\mathfrak{n}] + \mathcal{D}\mathfrak{n} + Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}))$. В силу полупростоты $\mathfrak{m}$-модуля $\mathfrak{n}$ имеют место разложения: $\mathfrak{n} = [\mathfrak{m},\mathfrak{n}] \oplus Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m})$, $\mathcal{D}\mathfrak{n} = [\mathfrak{m},\mathcal{D}\mathfrak{n}] \oplus (Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap \mathcal{D}\mathfrak{n})$, $\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}) = [\mathfrak{m},\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})] \oplus \big(Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap (\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}))\big)$.Поэтому $[\mathfrak{m},\mathfrak{n}] + \mathcal{D}\mathfrak{n} + Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}) = [\mathfrak{m},\mathfrak{n}] \oplus (Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap \mathcal{D}\mathfrak{n} + Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}))$. В силу Леммы 2, примененной к $\mathfrak{m}$-модулю $\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})$ и подмодулям $\mathcal{D}\mathfrak{n}$ и $Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})$, получаем $Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap \mathcal{D}\mathfrak{n} + Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}) = Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap (\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}))$. Таким образом, $\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}}+Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}}) = \mathfrak{s} \oplus [\mathfrak{m},\mathfrak{n}] \oplus \big(Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap (\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}))\big)$. Следовательно, $\dim(\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}}+Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}})) = \dim \mathfrak{s} + \dim[\mathfrak{m},\mathfrak{n}] + \dim\big(Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{m}) \cap (\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n}))\big) = \dim \mathfrak{s} + \dim[\mathfrak{m},\mathfrak{n}] + \big(\dim(\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})) - \dim[\mathfrak{m},\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})]\big) = \dim \mathfrak{s} + \dim(\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})) + \big(\dim[\mathfrak{m},\mathfrak{n}] - \dim[\mathfrak{m},\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})]\big) = \dim \mathfrak{s} + \dim(\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})) + \dim(\mathfrak{m}.\mathfrak{b})$.Так как $p(\mathfrak{n}) = (\mathfrak{n}+(\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}}+Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}})))/(\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}}+Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}}))$ и $\mathfrak{n}+(\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}}+Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}})) = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{n}$, то $\dim p(\mathfrak{n}) = \dim \mathfrak{s} + \dim \mathfrak{n} - \dim(\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}}+Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}})) = \dim \mathfrak{n} - \dim(\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})) - \dim(\mathfrak{m}.\mathfrak{b}) = \dim \mathfrak{b} - \dim(\mathfrak{m}.\mathfrak{b})$. Окончательно, $\dim \mathfrak{g} = \dim U + \dim(\mathcal{D}\bar{\mathfrak{g}}+Z_{\bar{\mathfrak{g}}}(\bar{\mathfrak{g}})) = \dim U + \dim \mathfrak{s} + \dim(\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})) + \dim(\mathfrak{m}.\mathfrak{b})$. $\square$

Следствие 1. *1) Если* $\mathfrak{n}$ *— абелева алгебра Ли, то* $\dim p(\mathfrak{n}) = 0$, *и поэтому* $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ *не является расщеплением Мальцева для некоторой алгебры Ли.*

2) $\dim \mathfrak{g} \geq \dim \mathfrak{s} + \dim \mathfrak{n}$.

3) Если $\dim \mathfrak{n} > \dim \mathfrak{g} - 3$, *то* $\mathfrak{g}$ *— разрешимая, а* $\mathfrak{m}$ *— коммутативная алгебра Ли.*

Доказательство. Поскольку $\dim U \geq \max(\dim \mathfrak{t}, \dim p(\mathfrak{n}))$, то $\dim U \geq \dim p(\mathfrak{n})$. Значит, $\dim \mathfrak{g} \geq \dim \mathfrak{s} + \dim p(\mathfrak{n}) + \dim(\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})) + \dim(\mathfrak{m}.\mathfrak{b}) = \dim \mathfrak{s} + \dim \mathfrak{b} + \dim(\mathcal{D}\mathfrak{n}+Z_{\mathfrak{n}}(\mathfrak{n})) = \dim \mathfrak{s} + \dim \mathfrak{n}$. Если $\mathfrak{g}$ — неразрешимая алгебра Ли, то $\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{n} \geq \dim \mathfrak{s} \geq 3$, что и доказывает последнюю часть следствия. $\square$

Таким образом, для третьего пункта алгоритм может быть сформулирован в следующем виде:

a) классификация нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{n}$, таких, что $\dim \mathfrak{n} \leq \dim \mathfrak{g}$;
b) построение максимальной точной почти алгебраической алгебры Ли $\overline{\mathfrak{m}} \oplus \mathfrak{n} \subset \mathrm{Der}(\mathfrak{n}) \oplus \mathfrak{n}$;
c) классификация с точностью до группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}})$, действующей в $\overline{\mathfrak{m}}$, подалгебр $\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{m} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{t}$, $\mathfrak{s} = [\mathfrak{m},\mathfrak{m}]$, $\mathfrak{t}$ — центр $\mathfrak{m}$), редуктивных в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$, таких, что $\dim \mathfrak{t} \cdot \dim p(\mathfrak{n}) \neq 0$. Построение почти алгебраической алгебры Ли $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$;
d) классификация в пространстве $\mathfrak{a}$ с точностью до группы $\varepsilon(\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{m}))$ таких подпространств U, что $U + p(\mathfrak{m}) = \mathfrak{a}$ и $U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$. Построение $\mathfrak{g} = p^{-1}(U)$, где $p\colon \bar{\mathfrak{g}} \to \mathfrak{a}$ — канонический гомоморфизм.

При этом размерность получаемых алгебр может быть оценена при помощи формулы (2).

При фиксации базиса в алгебре Ли будем отождествлять ее с таблицей коммутирования в данном базисе. При ссылке на нильпотентную алгебру Ли будем использовать обозначения $\mathfrak{n}d\_n$, где d — размерность алгебры Ли и n — ее относительный порядковый номер среди алгебр Ли данной размерности. Приведем классификацию нильпотентных алгебр Ли до размерности 4 [19]:

Лемма 3. *Пусть $\mathfrak{n}$ — нильпотентная алгебра Ли над полем k ($k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$) и $\dim \mathfrak{n} \leqslant 4$. Тогда $\mathfrak{n}$ изоморфна одной и только одной из следующих алгебр Ли:*

$$\mathfrak{n}1\_1 \cong k; \quad \mathfrak{n}2\_1 \cong k^2; \quad \mathfrak{n}3\_1 \cong k^3;$$

$$\mathfrak{n}3\_2 \quad \begin{array}{c|ccc} [\,,] & e_1 & e_2 & e_3 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & e_1 \\ e_3 & 0 & -e_1 & 0 \end{array};$$

$$\mathfrak{n}4\_1 \cong k^4;$$

$$\mathfrak{n}4\_2 \quad \begin{array}{c|cccc} [\,,] & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ e_4 & 0 & 0 & -e_1 & 0 \end{array}; \quad \mathfrak{n}4\_3 \quad \begin{array}{c|cccc} [\,,] & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & e_1 \\ e_3 & 0 & 0 & 0 & e_2 \\ e_4 & 0 & -e_1 & -e_2 & 0 \end{array}.$$

Проиллюстрируем применение алгоритма на примере классификации четырехмерных алгебр Ли над полями комплексных и действительных чисел, которая нам понадобиться в дальнейшем. При ссылке на четырехмерную алгебру Ли будем использовать обозначения вида $\mathfrak{g}4\_n$, где n — ее порядковый номер. В случае, когда классификация зависит от свойств поля, будем указывать это заменой символа основного поля k на $\mathbb{R}$ и добавлением к номеру алгебры символа r. Таким образом, алгебры Ли $\mathfrak{g}\_n$ и $\mathfrak{g}\_nr$ являются изоморфными над полем $\mathbb{C}$ и не будут изоморфны над полем $\mathbb{R}$.

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{g}$ — четырехмерная алгебра Ли над полем k ($k = \mathbb{C}$ или $\mathbb{R}$). Тогда $\mathfrak{g}$ изоморфна одной и только одной из следующих алгебр Ли:*

$$\mathfrak{g}4\_1 \quad \begin{array}{c|cccc} [\,,] & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & -e_3 & 0 \\ e_2 & -e_2 & 0 & e_1 & 0 \\ e_3 & e_3 & -e_1 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \mathfrak{g}4\_1r \quad \begin{array}{c|cccc} [\,,] & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & 0 & e_3 & -e_2 & 0 \\ e_2 & -e_3 & 0 & e_1 & 0 \\ e_3 & e_2 & -e_1 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}4\_2 \quad \begin{array}{c|cccc} [\,,] & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & e_3 & 0 \\ e_2 & 0 & 0 & 0 & e_4 \\ e_3 & -e_3 & 0 & 0 & 0 \\ e_4 & 0 & -e_4 & 0 & 0 \end{array} \quad \mathfrak{g}4\_2r \quad \begin{array}{c|cccc} [\,,] & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & 0 & 0 & e_3 & e_4 \\ e_2 & 0 & 0 & -e_4 & e_3 \\ e_3 & -e_3 & e_4 & 0 & 0 \\ e_4 & -e_4 & -e_3 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\mathfrak{g}4\_3 \quad \begin{array}{c|cccc} [\,,] & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline e_1 & 0 & e_2 & \alpha\, e_3 & \beta\, e_4 \\ e_2 & -e_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & -\alpha\, e_3 & 0 & 0 & 0 \\ e_4 & -\beta\, e_4 & 0 & 0 & 0 \end{array}, \quad (\alpha, \beta) \sim (\frac{1}{\alpha}, \frac{\beta}{\alpha}) \sim (\beta, \alpha)$$

$\mathfrak{g}4\_3r$, $(\alpha,\beta)\sim(-\alpha,-\beta)$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	$\alpha e_2 - e_3$	$e_2 + \alpha e_3$	βe_4
e_2	$-\alpha e_2 + e_3$	0	0	0
e_3	$-e_2 - \alpha e_3$	0	0	0
e_4	$-\beta e_4$	0	0	0

$\mathfrak{g}4\_4$, $\alpha\sim\dfrac{1}{\alpha}$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	$(\alpha+1)\,e_2$	e_3	αe_4
e_2	$(-\alpha-1)\,e_2$	0	0	0
e_3	$-e_3$	0	0	e_2
e_4	$-\alpha e_4$	0	$-e_2$	0

$\mathfrak{g}4\_4r$, $\alpha\sim-\alpha$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	$2\,\alpha e_2$	$\alpha e_3 - e_4$	$e_3 + \alpha e_4$
e_2	$-2\,\alpha e_2$	0	0	0
e_3	$-\alpha e_3 + e_4$	0	0	e_2
e_4	$-e_3 - \alpha e_4$	0	$-e_2$	0

$$\mathfrak{g}4\_5 = k^4$$

$\mathfrak{g}4\_6$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	0	0	0
e_2	0	0	0	0
e_3	0	0	0	e_1
e_4	0	0	$-e_1$	0

$\mathfrak{g}4\_7$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	0	e_2	e_4
e_2	0	0	0	0
e_3	$-e_2$	0	0	0
e_4	$-e_4$	0	0	0

$\mathfrak{g}4\_8$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	e_2	$e_2 + e_3$	αe_4
e_2	$-e_2$	0	0	0
e_3	$-e_2 - e_3$	0	0	0
e_4	$-\alpha e_4$	0	0	0

$\mathfrak{g}4\_9$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	0	0	0
e_2	0	0	0	e_1
e_3	0	0	0	e_2
e_4	0	$-e_1$	$-e_2$	0

$\mathfrak{g}4\_10$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	e_2	e_2+e_3	e_3+e_4
e_2	$-e_2$	0	0	0
e_3	$-e_2-e_3$	0	0	0
e_4	$-e_3-e_4$	0	0	0

$\mathfrak{g}4\_11$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	$2\,e_2$	e_3	e_3+e_4
e_2	$-2\,e_2$	0	0	0
e_3	$-e_3$	0	0	e_2
e_4	$-e_3-e_4$	0	$-e_2$	0

Замечание. Отношение изоморфизма алгебр Ли является отношением эквивалентности на множестве параметров (α,β). Данное отношение эквивалентности указывается после таблицы умножения алгебры Ли.

Доказательство. Если четырехмерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет нетривиальный полупростой идеал, то либо $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{sl}(2,k)\times k\cong\mathfrak{g}4\_1$, либо $\mathfrak{g}\cong\mathfrak{su}(2)\times\mathbb{R}\cong\mathfrak{g}4\_1r$ [37].

Осталось произвести классификацию четырехмерных точных алгебр Ли с данным наибольшим нильпотентным идеалом расщепления Мальцева. Согласно предложению 1 всякая такая алгебра Ли является разрешимой.

(1) Пусть $\mathfrak{n}=\mathfrak{n}2\_1=k^2$. Тогда $\mathrm{Der}(\mathfrak{n})=\mathfrak{gl}(2,k)$ и максимальная точная почти алгебраическая алгебра Ли есть $\mathfrak{gl}(2,k)\leftthreetimes k^2$. В силу предложения 1 достаточно ограничиться классификацией почти алгебраических алгебр Ли вида $\mathfrak{g}=\mathfrak{m}\oplus\mathfrak{n}$, где $\mathfrak{m}$ подалгебра в $\overline{\mathfrak{m}}=\mathfrak{gl}(2,k)$, редуктивная в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$. При этом $\dim\mathfrak{m}=\dim\mathfrak{g}-\dim\mathfrak{n}=2$.

Поскольку $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n},\overline{\mathfrak{m}}) = GL(2,k)$, то с точностью до сопряжения всякая двумерная подалгебра, редуктивная в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$, имеет вид:

$$\mathfrak{m}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix} \middle| x, y \in k \right\} \text{ и } \mathfrak{m}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \middle| x, y \in \mathbb{R} \right\}.$$

Соответственно получаем $\mathfrak{g}4\_2 \cong \mathfrak{m}_1 \leftthreetimes \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{g}4\_2r \cong \mathfrak{m}_2 \leftthreetimes \mathfrak{n}$.

(2) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}3\_1 = k^3$. Повторяя рассуждения предыдущего случая, имеем:

Необходимо произвести классификацию с точностью до сопряжения одномерных подалгебр, редуктивных в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$. Подалгебры

$$\mathfrak{m}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha x & 0 \\ 0 & 0 & \beta x \end{pmatrix} \middle| x \in k \right\}, \qquad (\alpha,\beta) \sim (\tfrac{1}{\alpha}, \tfrac{\beta}{\alpha}) \sim (\beta, \alpha);$$
$$\mathfrak{m}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha x & x & 0 \\ -x & \alpha x & 0 \\ 0 & 0 & \beta x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad (\alpha,\beta) \sim (-\alpha, -\beta)$$

являются решением нашей задачи. При этом $\mathfrak{g}4\_3 \cong \mathfrak{m}_1 \leftthreetimes \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{g}4\_3r \cong \mathfrak{m}_2 \leftthreetimes \mathfrak{n}$.

(3) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}3\_2$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{tr}A & v \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}(2,k), v \in k^2 \right\},$$
$$\overline{\mathfrak{m}} = \left\{ \begin{pmatrix} \mathrm{tr}A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \middle| A \in \mathfrak{gl}(2,k) \right\},$$
$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{n},\overline{\mathfrak{m}}) = \left\{ \begin{pmatrix} \det C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \middle| C \in GL(2,k) \right\}.$$

Произведем классификацию одномерных подалгебр в $\overline{\mathfrak{m}}$, редуктивных в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$. Такие подалгебры имеют вид:

$$\mathfrak{m}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} (\alpha+1)x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & \alpha x \end{pmatrix} \middle| x \in k \right\}, \qquad \alpha \sim \tfrac{1}{\alpha};$$
$$\mathfrak{m}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2\alpha x & 0 & 0 \\ 0 & \alpha x & x \\ 0 & -x & \alpha x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \alpha \sim -\alpha.$$

Соответственно получаем, что $\mathfrak{g}4\_4 \cong \mathfrak{m}_1 \leftthreetimes \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{g}4\_4r \cong \mathfrak{m}_2 \leftthreetimes \mathfrak{n}$.

Оставшаяся часть классификации не будет зависеть от алгебраической замкнутости основного поля.

(4) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}4\_1 = k^4$. В силу предложения 1 в данном случае из алгоритма применим только пункт [A]. Поэтому, $\mathfrak{g}4\_5 \cong k^4$.

(5) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}4\_2$. $\mathfrak{g}4\_6 \cong \mathfrak{n}4\_2$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1+x_2 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & x_3 & x_9 & x_{10} \\ 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_5 & x_2 \end{pmatrix} \middle| x_1, \ldots, x_{10} \in k \right\},$$

$$\overline{\mathfrak{m}} = \left\{ \begin{pmatrix} x_1+x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_5 & x_2 \end{pmatrix} \middle| \, x_1, \ldots, x_5 \in k \right\},$$

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}}) = \left\{ \begin{pmatrix} \det C & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \middle| \, C \in GL(2,k), c \in k^* \right\}.$$

По соображениям размерности в данном случае не применим пункт [B] алгоритма.

Теперь необходимо произвести классификацию с точностью до группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}})$, действующей в $\overline{\mathfrak{m}}$, подалгебр $\mathfrak{m}$ в $\overline{\mathfrak{m}}$, редуктивных в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$, для которых в почти алгебраической алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$ существует подалгебра $\mathfrak{g}$, имеющая $\bar{\mathfrak{g}}$ в качестве расщепления Мальцева и при этом $\dim \mathfrak{g} = 4$. Подалгебры

$$\mathfrak{m}_1 = f_1 x = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in k \right\},$$

$$\mathfrak{m}_2 = f_2 x = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, x \in k \right\}$$

являются решением нашей задачи. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{m}_1$ и пусть $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m}_1 \leftthreetimes \mathfrak{n}$. Вектора $\langle p(f_1), p(e_3), p(e_4) \rangle$ образуют базис пространства $\mathfrak{a}$, в котором группа $G = \varepsilon(\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{m}_1))$ принимает вид:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \middle| \, C \in GL(2,k) \right\}.$$

При этом $p(\mathfrak{m}) = \langle p(f_1) \rangle$ и $p(\mathfrak{n}) = \langle p(e_3), p(e_4) \rangle$. Классифицируем с точностью до группы G такие подпространства U, что $U + p(\mathfrak{m}) = U + p(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a}$. Поскольку $\dim U = 2$ и $\dim(U \cap p(\mathfrak{n})) = 1$, то с точностью до группы G можно положить $U \cap p(\mathfrak{n}) = \langle p(e_3) \rangle$ и $U = \langle p(f_1 + e_4), p(e_3) \rangle$. Таким образом, $\mathfrak{g}4\_7 \cong \langle f_1 + e_4, e_3, e_1, e_2 \rangle \subset \bar{\mathfrak{g}}$. Для подалгебры $\mathfrak{m}_2$ соответственно получаем, что $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m}_2 \leftthreetimes \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{a} = \langle p(f_2), p(e_4) \rangle$. В выбранном базисе группа $G = \varepsilon(\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}}, \mathfrak{m}_2))$ принимает вид:

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \, c \in k^* \right\}.$$

Требуемое подпространство U сопряжено подпространству вида $\langle p(f_2 + e_4) \rangle$ и $\mathfrak{g}4\_8 \cong \langle f_2 + e_4, e_1, e_2, e_3 \rangle \subset \bar{\mathfrak{g}}$.

(6) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}4\_3$. $\mathfrak{g}4\_9 \cong \mathfrak{n}4\_3$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x_1+2x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & x_1+x_2 & x_3 & x_6 \\ 0 & 0 & x_1 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \right| x_1,\dots,x_7 \in k \right\},$$

$$\overline{\mathfrak{m}} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x+2y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x+y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \right| x,y \in k \right\}.$$

Группа $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n},\overline{\mathfrak{m}})$, действующая в $\overline{\mathfrak{m}}$, является тривиальной.

Таким образом, необходимо описать такие подпространства $\mathfrak{m}$ в $\overline{\mathfrak{m}}$, чтобы в почти алгебраической алгебре Ли $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m} \leftthreetimes \mathfrak{n}$ существовала подалгебра $\mathfrak{g}$, имеющая $\bar{\mathfrak{g}}$ в качестве расщепления Мальцева. Существуют только два таких подпространства, а именно:

$$\mathfrak{m}_1 = f_1 x = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x \in k \right\},$$

$$\mathfrak{m}_2 = f_2 x = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right| x \in k \right\}.$$

Пусть $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m}_1 \leftthreetimes \mathfrak{n}$. Тогда $\mathfrak{a} = \langle p(f_1), p(e_4)\rangle$ и

$$\varepsilon(\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{m}_1)) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right| c \in k^* \right\}.$$

Требуемое подпространство U сопряжено подпространству вида $\langle p(f_1+e_4)\rangle$ и $\mathfrak{g}4\_10 \cong \langle f_1+e_4, e_1, e_2, e_3\rangle \subset \bar{\mathfrak{g}}$.

Пусть $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{m}_2 \leftthreetimes \mathfrak{n}$. Тогда $\mathfrak{a} = \langle p(f_2), p(e_3)\rangle$ и

$$\varepsilon(\mathrm{Aut}(\bar{\mathfrak{g}},\mathfrak{m}_2)) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c \end{pmatrix} \right| c \in k^* \right\}.$$

Подпространство U с требуемыми свойствами сопряжено подпространству вида $\langle p(f_2+e_3)\rangle$ и $\mathfrak{g}4\_11 \cong \langle f_1+e_3, e_1, e_2, e_4\rangle \subset \bar{\mathfrak{g}}$.

□

4. Классификация семимерных неразрешимых алгебр Ли

Пусть $\mathfrak{g}$ — неразрешимая алгебра Ли и $\dim\mathfrak{g} = 7$. Пусть $\bar{\mathfrak{g}}$ — расщепление Мальцева для $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}})$ — наибольший нильпотентный идеал $\bar{\mathfrak{g}}$. Тогда $\dim\mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}}) \leqslant 4$ (следствие к предложению 1), поэтому для классификации неразрешимых алгебр Ли размерности 7 достаточно иметь классификацию нильпотентных алгебр Ли до размерности 4.

При ссылке на алгебру Ли будем использовать обозначения вида $\mathfrak{s}d_1\_n_1$, $\mathfrak{n}d_2\_n_2$, $\mathfrak{p}d_2\_n_2\_n_3$, где d_1 — размерность наибольшего полупростого идеала алгебры Ли, n_1 — относительный порядковый номер этого идеала среди полупростых алгебр Ли данной размерности, d_2 — размерность наибольшего нильпотентного идеала расщепления Мальцева, n_2 — относительный порядковый номер этого идеала среди нильпотентных алгебр Ли данной размерности и n_3 — относительный порядковый номер алгебры Ли среди алгебр с данным наибольшим нильпотентным идеалом расщепления Мальцева.

По-прежнему, буквой k обозначаются поля $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$, т.е. соответствующие алгебры входят и в классификацию над полем $\mathbb{R}$, и в классификацию над полем $\mathbb{C}$. В случае, когда классификация зависит от свойств поля, будем указывать это заменой символа основного поля k на $\mathbb{R}$, такая алгебра появляется только в классификации над полем $\mathbb{R}$, над полем $\mathbb{C}$ она изоморфна алгебре, приведенной ранее; к номеру такой алгебры добавляется символ r.

Теорема 1. *a) Если 7-мерная неразрешимая алгебра $\mathfrak{g}$ не является точной, то либо $\mathfrak{g}$ имеет 6-мерную подалгебру Леви и, соответственно, изоморфна алгебрам Ли $\mathfrak{sl}(2,k)\times\mathfrak{sl}(2,k)\times k$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R})\times\mathfrak{su}(2)\times\mathbb{R}$, $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{su}(2)\times\mathbb{R}$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}\times\mathbb{R}$, либо $\mathfrak{g}$ изоморфна $\mathfrak{sl}(2,k)\times\mathfrak{h}$ или $\mathfrak{su}(2)\times\mathfrak{h}$, где $\dim\mathfrak{h}=4$, т.е. $\mathfrak{h}$ — одна из алгебр Ли, выписанных в предложении 2;*

b) Пусть $\mathfrak{g}$ — 7-мерная неразрешимая точная алгебра Ли и $\bar{\mathfrak{g}}$ — ее расщепление Мальцева. Если $\dim\mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}})\leqslant 2$, то 7-мерных неразрешимых алгебр Ли нет. Если $\dim\mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}})=3$, то $\mathfrak{g}$ изоморфна одной и только одной из следующих алгебр Ли:

$\mathfrak{p}3\_1\_1$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2\,e_2$	$-2\,e_3$	e_4	$-e_5$	0	0
e_2	$-2\,e_2$	0	e_1	0	e_4	0	0
e_3	$2\,e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	$-e_4$
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	$-e_5$
e_6	0	0	0	0	0	0	$-\alpha\,e_6$
e_7	0	0	0	e_4	e_5	$\alpha\,e_6$	0

, (α)

$\mathfrak{p}3\_1\_2$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2\,e_2$	$-2\,e_3$	e_4	$-e_5$	0	0
e_2	$-2\,e_2$	0	e_1	0	e_4	0	0
e_3	$2\,e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0
e_6	0	0	0	0	0	0	$-e_6$
e_7	0	0	0	0	0	e_6	0

$\mathfrak{p}3\_1\_3$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2\,e_2$	$-2\,e_3$	$2\,e_4$	0	$-2\,e_6$	0
e_2	$-2\,e_2$	0	e_1	0	$2\,e_4$	e_5	0
e_3	$2\,e_3$	$-e_1$	0	e_5	$2\,e_6$	0	0
e_4	$-2\,e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	$-e_4$
e_5	0	$-2\,e_4$	$-2\,e_6$	0	0	0	$-e_5$
e_6	$2\,e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	$-e_6$
e_7	0	0	0	e_4	e_5	e_6	0

$\mathfrak{p}3\_1\_4r$

[,]	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	0	0
e_2	e_3	0	$-e_1$	$-e_6$	0	e_4	0
e_3	$-e_2$	e_1	0	0	$-e_6$	e_5	0
e_4	e_5	e_6	0	0	0	0	$-e_4$
e_5	$-e_4$	0	e_6	0	0	0	$-e_5$
e_6	0	$-e_4$	$-e_5$	0	0	0	$-e_6$
e_7	0	0	0	e_4	e_5	e_6	0

$\mathfrak{p}3\_2\_1$

[,]	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2\,e_2$	$-2\,e_3$	e_4	$-e_5$	0	0
e_2	$-2\,e_2$	0	e_1	0	e_4	0	0
e_3	$2\,e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	e_6	0	$-e_4$
e_5	e_5	$-e_4$	0	$-e_6$	0	0	$-e_5$
e_6	0	0	0	0	0	0	$-2\,e_6$
e_7	0	0	0	e_4	e_5	$2\,e_6$	0

Если $\dim \mathfrak{n}(\bar{\mathfrak{g}}) = 4$, *то* $\mathfrak{g}$ *изоморфна одной и только одной из следующих алгебр Ли:*

$\mathfrak{p}4\_1\_1$

[,]	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2\,e_2$	$-2\,e_3$	e_4	$-e_5$	0	0
e_2	$-2\,e_2$	0	e_1	0	e_4	0	0
e_3	$2\,e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	0	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0
e_6	0	0	0	0	0	0	0
e_7	0	0	0	0	0	0	0

$\mathfrak{p}4\_1\_2$

[,]	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2\,e_2$	$-2\,e_3$	e_4	$-e_5$	e_6	$-e_7$
e_2	$-2\,e_2$	0	e_1	0	e_4	0	e_6
e_3	$2\,e_3$	$-e_1$	0	e_5	0	e_7	0
e_4	$-e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0
e_5	e_5	$-e_4$	0	0	0	0	0
e_6	$-e_6$	0	$-e_7$	0	0	0	0
e_7	e_7	$-e_6$	0	0	0	0	0

$\mathfrak{p}4\_1\_3$

[,]	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2\,e_2$	$-2\,e_3$	$2\,e_4$	0	$-2\,e_6$	0
e_2	$-2\,e_2$	0	e_1	0	$2\,e_4$	e_5	0
e_3	$2\,e_3$	$-e_1$	0	e_5	$2\,e_6$	0	0
e_4	$-2\,e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0
e_5	0	$-2\,e_4$	$-2\,e_6$	0	0	0	0
e_6	$2\,e_6$	$-e_5$	0	0	0	0	0
e_7	0	0	0	0	0	0	0

$\mathfrak{p}4\_1\_4$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2\,e_2$	$-2\,e_3$	$3\,e_4$	e_5	$-e_6$	$-3\,e_7$
e_2	$-2\,e_2$	0	e_1	0	$3\,e_4$	$2\,e_5$	e_6
e_3	$2\,e_3$	$-e_1$	0	e_5	$2\,e_6$	$3\,e_7$	0
e_4	$-3\,e_4$	0	$-e_5$	0	0	0	0
e_5	$-e_5$	$-3\,e_4$	$-2\,e_6$	0	0	0	0
e_6	e_6	$-2\,e_5$	$-3\,e_7$	0	0	0	0
e_7	$3\,e_7$	$-e_6$	0	0	0	0	0

$\mathfrak{p}4\_1\_5r$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$-e_3$	e_2	$-e_5$	e_4	0	0
e_2	e_3	0	$-e_1$	$-e_6$	0	e_4	0
e_3	$-e_2$	e_1	0	0	$-e_6$	e_5	0
e_4	e_5	e_6	0	0	0	0	0
e_5	$-e_4$	0	e_6	0	0	0	0
e_6	0	$-e_4$	$-e_5$	0	0	0	0
e_7	0	0	0	0	0	0	0

$\mathfrak{p}4\_1\_6r$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2e_3$	$-2e_2$	e_6	$-e_7$	e_4	e_5
e_2	$-2e_3$	0	$2e_1$	$-e_5$	e_4	$-e_7$	e_6
e_3	$2e_2$	$-2e_1$	0	e_7	e_6	$-e_5$	$-e_4$
e_4	$-e_6$	e_5	$-e_7$	0	0	0	0
e_5	e_7	$-e_4$	$-e_6$	0	0	0	0
e_6	e_4	e_7	e_5	0	0	0	0
e_7	$-e_5$	$-e_6$	e_4	0	0	0	0

$\mathfrak{p}4\_2\_1$

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	0	$2\,e_2$	$-2\,e_3$	0	0	e_6	$-e_7$
e_2	$-2\,e_2$	0	e_1	0	0	0	e_6
e_3	$2\,e_3$	$-e_1$	0	0	0	e_7	0
e_4	0	0	0	0	0	0	0
e_5	0	0	0	0	0	0	0
e_6	$-e_6$	0	$-e_7$	0	0	0	e_4
e_7	e_7	$-e_6$	0	0	0	$-e_4$	0

Доказательство. Пусть $\mathfrak{s}$ — простая алгебра Ли и $\dim\mathfrak{s} \leqslant 7$. Тогда $\mathfrak{s}$ изоморфна одной из следующих трех алгебр Ли: $\mathfrak{s}3\_1 \cong \mathfrak{sl}(2,k)$, $\mathfrak{s}3\_2 \cong \mathfrak{su}(2) \cong \mathfrak{so}(3)$ и $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}}$ [37]. Если семимерная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет нетривиальный полупростой идеал, то либо $\mathfrak{g}$ имеет 6-мерную подалгебру Леви и, соответственно, изоморфна алгебрам Ли $\mathfrak{sl}(2,k) \times \mathfrak{sl}(2,k) \times k \cong \mathfrak{so}(2,2) \times k$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{R}) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{su}(2) \times \mathfrak{su}(2) \times \mathbb{R} \cong \mathfrak{so}(4) \times \mathbb{R}$, $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})_{\mathbb{R}} \times \mathbb{R} \cong \mathfrak{so}(3,1) \times \mathbb{R}$, либо $\mathfrak{g} \cong \mathfrak{s}3\_i \times \mathfrak{h}$, где $i = 1, 2$ и $\mathfrak{h}$ — четырехмерная алгебра Ли, выписанная в предложении 2.

Осталось произвести классификацию семимерных точных неразрешимых алгебр Ли с данным наибольшим нильпотентным идеалом расщепления Мальцева.

(1) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}2\_1 = k^2$. Тогда $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{gl}(2,k)$ и размерность алгебр Ли вида $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{m}$ подалгебра в $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{gl}(2,k)$, меньше 7 (разумеется, для $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}1\_1 = k$ размерность $\mathfrak{g}$ также меньше 7).

(2) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}3\_1 = k^3$. Тогда $\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{gl}(3,k)$ и максимальная почти алгебраическая алгебра Ли есть $\mathfrak{gl}(3,k) \leftthreetimes k^3$. Согласно следствию к предложению 1 достаточно ограничится классификацией с точностью до сопряжения относительно группы $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}}) = GL(3,k)$ почти алгебраических алгебр Ли вида $\mathfrak{g} = \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{m}$ — четырехмерная неразрешимая подалгебра в $\overline{\mathfrak{m}} = \mathfrak{gl}(3,k)$, редуктивная в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$. Такие подалгебры описаны, например, в [38] и имеют вид:

$$\mathfrak{m}_1 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & z & 0 \\ u & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x,y,z,u \in k \right\};$$
$$\mathfrak{m}_2 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \lambda x + y & z & 0 \\ u & \lambda x - y & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} \right| x,y,z,u \in k \right\};$$
$$\mathfrak{m}_3 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x + y & z & 0 \\ u & x & z \\ 0 & u & x - y \end{pmatrix} \right| x,y,z,u \in k \right\};$$
$$\mathfrak{m}_{4r} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & z & y \\ -z & x & u \\ -y & -u & x \end{pmatrix} \right| x,y,z,u \in \mathbb{R} \right\}.$$

При этом получаем алгебры $\mathfrak{p}3\_1\_i$, $i = 1, ..., 4$.

(3) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}3\_2$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \mathrm{tr} A & v \\ 0 & A \end{pmatrix} \right| A \in \mathfrak{gl}(2,k), v \in k^2 \right\},$$
$$\overline{\mathfrak{m}} = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \mathrm{tr} A & 0 \\ 0 & A \end{pmatrix} \right| A \in \mathfrak{gl}(2,k) \right\},$$
$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}}) = \left\{ \left. \begin{pmatrix} \det C & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} \right| C \in GL(2,k) \right\}.$$

Произведем классификацию четырехмерных подалгебр в $\overline{\mathfrak{m}}$, редуктивных в $\mathfrak{gl}(\mathfrak{n})$. Такие подалгебры совпадают с $\overline{\mathfrak{m}}$. Соответственно, получаем $\mathfrak{p}3\_2\_1$.

(4) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}4\_1 = k^4$. Необходимо произвести классификацию с точностью до сопряжения трехмерных неразрешимых подалгебр, редуктивных в $\mathfrak{gl}(4,k)$. Такие подалгебры имеют вид [39]:

$$\mathfrak{m}_1 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ z & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x,y,z \in k \right\};$$

$$\mathfrak{m}_2 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ z & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & -x \end{pmatrix} \right| x,y,z \in k \right\};$$

$$\mathfrak{m}_3 = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 \\ z & 0 & y & 0 \\ 0 & z & -x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x,y,z \in k \right\};$$

$$\mathfrak{m}_4 = \left\{ \left.\begin{pmatrix} 3x & 3z & 0 & 0 \\ y & x & 2z & 0 \\ 0 & 2y & -x & z \\ 0 & 0 & 3y & -3x \end{pmatrix} \right| x, y, z \in k \right\};$$

$$\mathfrak{m}_{5r} = \left\{ \left.\begin{pmatrix} 0 & x & y & 0 \\ -x & 0 & z & 0 \\ -y & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{R} \right\};$$

$$\mathfrak{m}_{6r} = \left\{ \left.\begin{pmatrix} 0 & y & -x & -z \\ -y & 0 & -z & x \\ x & z & 0 & y \\ z & -x & -y & 0 \end{pmatrix} \right| x, y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

При этом получаем алгебры $\mathfrak{p}4\_1\_i$, $i = 1, 6$.

(5) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}4\_2$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) = \left\{ \left.\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & x_6 & x_7 & x_8 \\ 0 & x_3 & x_9 & x_{10} \\ 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_5 & x_2 \end{pmatrix} \right| x_1, \ldots, x_{10} \in k \right\},$$

$$\overline{\mathfrak{m}} = \left\{ \left.\begin{pmatrix} x_1 + x_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x_1 & x_4 \\ 0 & 0 & x_5 & x_2 \end{pmatrix} \right| x_1, \ldots, x_5 \in k \right\},$$

$$\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}}) = \left\{ \left.\begin{pmatrix} \det C & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix} \right| C \in GL(2, k), c \in k^* \right\}.$$

Необходимо произвести классификацию трехмерных подалгебр в $\overline{\mathfrak{m}}$, редуктивных в $\mathfrak{gl}(4, k)$, с точностью до сопряжения группой $\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}, \overline{\mathfrak{m}})$. Ограничимся случаем, когда $\mathfrak{g}$ — неразрешимая алгебра. Всякая такая подалгебра сопряжена алгебре Ли

$$\mathfrak{m} = \left\{ \left.\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & y \\ 0 & 0 & z & -x \end{pmatrix} \right| x, y, z \in k \right\}.$$

Получаем алгебру $\mathfrak{p}4\_2\_1$.

(6) Пусть $\mathfrak{n} = \mathfrak{n}4\_3$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathrm{Der}(\mathfrak{n}) = \left\{ \left.\begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & x_1 + x_2 & x_3 & x_6 \\ 0 & 0 & x_1 & x_7 \\ 0 & 0 & 0 & x_2 \end{pmatrix} \right| x_1, \ldots, x_7 \in k \right\},$$

$$\overline{\mathfrak{m}} = \left\{ \left.\begin{pmatrix} x + 2y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x + y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y \end{pmatrix} \right| x, y \in k \right\}.$$

Поскольку размерность $\overline{\mathfrak{m}}$ равна 2, 7-мерных неразрешимых алгебр Ли в этом случае не существует.

□

Таким образом, найдены все 7-мерные неразрешимые алгебры Ли над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Вместе с работами [28, 29, 30] это завершает классификацию семимерных алгебр Ли.

References

[1] A. Hasi, *Introduction to Lie Algebras and Their Representations.* Advances in Linear Algebra and Matrix Theory (2021), 11, 67-91.

[2] A.Hasi, *Representations of Lie Groups.* Advances in Linear Algebra and Matrix Theory (2021), 11, 117-134.

[3] S. Lie, *Vorlesungen über continuierlichen Gruppen.* Teubner, Leipzig, 1893 (in German).

[4] G.M. Mubarakzyanov, *On solvable Lie algebras.* Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, № 1 (1963), 114-123 (in Russian).

[5] G.M. Mubarakzyanov, *Classification of real structures of Lie algebras of the fifth order.* Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, № 3 (1963), 99-106 (in Russian).

[6] K. A. Umlauf, *Über die Zusammensetzung der endlichen continuierlichen Transformationsgruppen insbesondere der Gruppen vom Range Null*, Thesis, University of Leipzig, Germany, 1891 (in German).

[7] V.V.Morozov, *Classification of nilpotent Lie algebras of sixth order.* Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, № 4 (1958), 161-171 (in Russian).

[8] P. Turkowski, *Low-dimensional real Lie algebras.* Jornal of Math. Phys., N10 (1988) 29, 2139–2144.

[9] P. Turkowski, *Structure of real Lie algebras.* Linear Algebra Appl., 171 (1992), 197–212.

[10] G.M. Mubarakzyanov, *Classification of solvable Lie algebras of the sixth order with one non-impotent basis element.* Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii. Matematika, № 4 (1963), 104-116 (in Russian).

[11] P. Turkowski, *Solvable Lie algebras of dimension six.* Jornal of Math. Phys., № 6 (1990) 31, 1344–1350.

[12] L. Snobl, P. Winternitz, *Classification and Identification of Lie algebras.* American Mathematical Society CRM Monograph Series. Vol. 33, American Mathematical Society, Providence (2014).

[13] A. Shabanskaya, G. Thompson, *Six-Dimensional Lie Algebras with a Five-Dimensional Nilradical.* Journal of Lie Theory (2013), 23, 313-355.

[14] E. N. Safiullina, *Classification of nilpotent Lie algebras of order 7*, (Thesis), Candidates Works, no. 64, Math. Mech. Phys., Izdat. Kazan Univ., Kazan, 1964, 6 p. (in Russian).

[15] J.M. Ancochea-Bermudez, M. Goze, *Sur la classification des algebres de Lie nilpotentes de dimension 7.* C.r. Acad. Sci., Ser. A. 1986. V. 302. P. 611–613 (in French).

[16] L. Magnin, *Sur les algebres de Lie nilpotentes de dimension* ≤ 7, J. Geom. Phys. **3** (1986), 119-144 (in French).

[17] M. Romdhani, *Classification of real and complex nilpotent Lie algebras of dimension 7*, Linear and Multilinear Algebra **24** (1989), 167-189.

[18] C. Seeley, *7-dimensional nilpotent Lie algebras.* Transact. AMS. 1993. V. 335. P. 479–496.

[19] M. P. Gong, *Classification of Nilpotent Lie Algebras of Dimension 7 (Over Algebraically Closed Fields and R).* PhD thesis, University of Waterloo, 1998.

[20] N.M.P.S.K. Bandara, G. Thompson, *Ten-Dimensional Lie Algebras with so(3). Semi-Simple Factor.* Journal of Lie Theory (2021), 31, 93-118.

[21] N.M.P.S.K. Bandara, G. Thompson, *Ten-Dimensional Lie Algebras with so(3). Semi-Simple Factor Erratum.* Journal of Lie Theory (2021), 31, 1025-1030.

[22] R. Campoamor-Stursberg, *Structural Data and Invariants of Nine Dimensional Real Lie Algebras with Non-Trivial Levi Decomposition.* Nova Science Publishers Inc., New York (2009).

[23] R. Ghanam, M. Lamichhane, G. Thompson, *Minimal Representations of Lie Algebras with Non-Trivial Levi Decomposition.* Arabian Journal of Mathematics (2017), 6, 281-296.

[24] S. Khanal, R. Subedi, G. Thompson, *Representations of Nine-Dimensional Levi Decomposition Lie Algebras.* Journal of Pure and Applied Algebra (2020), 18, 1340-1363.

[25] D. V. Millionshchikov, R. Khimenes, *Geometry of central extensions of nilpotent Lie algebras.* Proc. Steklov Inst. Math. 305 (2019), no. 1, 209–231.

[26] Vu Anh Le, Tuan A. Nguyen, Tu T. C. Nguyen, Tuyen T. M. Nguyen, Thieu N. Vo, *Applying matrix theory to classify real solvable Lie algebras having 2-dimensional derived ideals.* Linear Algebra Appl. 588, 282-303 (2020).

[27] Vu A. Le, Hai T. T. Cao, Hoa Q. Duong, Tuan A. Nguyen, Thieu N. Vo, *On the problem of classifying solvable Lie algebras having small codimensional derived algebras.* Commun. Algebra 50, No. 9, 3775-3793 (2022).

[28] A.R. Parry, *A classification of real indecomposable solvable Lie algebras of small dimension with codimension one nilradicals.* Master's thesis. Logan, Utah: Utah State University; 2007 $>$ arXiv:1311.6069

[29] F. Hindeleh, G. Thompson, *Seven dimensional Lie algebras with a four-dimensional nilradical.* Algebras Groups Geom. 2008; 25(3):243–265.

[30] Vu A. Le, Tuan A. Nguyen, Tu T. C. Nguyen, Tuyen T. M. Nguyen, Thieu N. Vo, *Classification of 7-dimensional solvable Lie algebras having 5-dimensional nilradicals.* math. 2021 $>$ arXiv:2107.03990

[31] N. Mozhei, *Homogeneous submanifolds in the four-dimensional affine and projective geometry* Russian Mathematics. 2000. Vol. 44. No.7. P. 39–49.

[32] N. Bourbaki, *Lie groups and Lie algebras.* Paris : Hermann; Reading, Mass. : Addison-Wesley, 1972–1978 (in French).

[33] A.I. Maltsev, *On solvable Lie algebras.* Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. № 5 (1945), 329–352 (in Russian).

[34] V.V. Gorbatsevich, *Splittings of Lie groups and their application to the study of homogeneous spaces.* Mathematics of the USSR-Izvestiya. 1980. T. 15. № 3. C. 441–469.

[35] L. Auslander, J. Bresin, *Almost algebraic Lie algebras.* J. Algebra. 1968. V. 8. № 3. P. 295–313.

[36] G. Earve, *Enveloppe presque algébrique d'unne algèbre de Lie.* C.r. Acad. Sci., Ser. A. 1973. V. 272. P. 207–209 (in French).

[37] M. Goto, F. Grosshans *Semisimple Lie algebras.* New York : M. Dekker, 1978.

[38] N. P. Mozhey, *Three-dimensional isotropically-faithful homogeneous spaces and connections on them.* Kazan, 2015 (in Russian).

[39] N. P. Mozhey, *Linear Lie algebras on a four-dimensional space* Works of BSTU. Series 3: Physical and Mathematical Sciences and Computer Science. 2020. № 2 (236). C. 42-47 (in Russian).

Natalya Pavlovna Mozhey
Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics,
P. Brovki Street, 6,
220013, Minsk, Belarus
E-mail address: mozheynatalya@mail.ru