ОТВЕТ РЕЦЕНЗЕНТУ
по статье
"О биномиальных коэффициентах вещественных аргументов"

По сути рецензии сообщаю:

1) **По пункту 2). Рецензент пишет (цитирую)**:
"На стр. 147 в середине страницы можно обнаружить утверждение "Нетрудно также показать, что

$$\delta_i(\alpha,\beta) \geq 1." \tag{1}$$

(конец цитаты).

Далее рецензент, производя арифметические выкладки, показывает, что при $r = 100$, $i = 2$, $\alpha = 4$, $\beta = 50$ неравенство (1) неверно, т.е выполняется обратное неравенство $\delta_i(\alpha,\beta) < 1$. Эти рассуждения позиционируются рецензентом как "контрпример". При этом рецензент также пишет: *"Может, рецензент что-то неправильно понял, но если все так, то автору следует внимательно отнестись к своему тексту"....*

В связи с этим поясняю, что **в моей статье нет утверждения в виде неравенства (1), а в указанном рецензентом месте в статье написана следующая эквивалентность (цитирую):**

"Нетрудно также показать, что

$$\delta_i(\alpha,\beta) \geq 1 \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(\beta), \tag{2}$$

где $f(x) = -x^2 + xr$, причём парабола $f(x)$ строго возрастает на $(-\infty, \frac{r}{2}]$ и строго убывает на $[\frac{r}{2}, +\infty)$".
(в статье эквивалентность (2) имеет номер (7))

Для указанных рецензентом значений $r = 100$, $i = 2$, $\alpha = 4$, $\beta = 50$ имеем:

$$f(\alpha) = -4^2 + 4 * 100 = 384,\ f(\beta) = -50^2 + 50 * 100 = 2500.$$

Таким образом,

$$f(\alpha) \ngeq f(\beta) \text{ и } \delta_i(\alpha,\beta) \ngeq 1,$$

что подтверждает эквивалентность (2) для вышеуказанных значений.

Вызывает непонимание, с какой целью рецензент строит свой "контрпример" к утверждению, которого нет в моей статье.

2) **По пункту 3 (ошибочно обозначен в рецензии 2)**.

Рассмотренные в работе биномиальные коэффициенты $\binom{r}{\alpha}$ с вещественными аргументами $\alpha \in (-1, r+1)$, $r \in (-1, +\infty)$ естественным образом обобщают классические биномиальными коэффициенты $\binom{n}{m}$, где $n, m \in \mathbb{N}$. Работа нацелена и относится в первую очередь именно к дискретной математике, поскольку использование таких биномиальных коэффициентов упрощает подход при исследовании выражений с классическими биномиальными коэффициентами для их оценок. Мне они потребовались именно для этих целей при исследовании оценок числа графов и являются техническим инструментом.

Их основные свойства (аналоги для классических биномиальных коэффициентов) для вещественных аргументов не встречались ни в научной, ни в учебной литературе, и их обоснования были неизвестны автору. Они даже не формулировались, не говоря уже об их доказательствах (речь идет об аналогах унимодальности в первую очередь. Отмечу также, что есть ошибочные выводы о свойствах таких коэффициентов на ряде ресурсов). А работа St.T.Smith 2020 года (приведенная в моей статье и уже имеющая ряд цитирований и большой интерес на известном исследовательском ресурсе www.researchgate.net), как раз демонстрирует, что это было неизвестно: он рассматривал биномиальные коэффициенты вида $\binom{n}{\alpha}$, когда $n \in \mathbb{N}$. Причем его исследование проведено именно для случая $n \in \mathbb{N}$ (а не общего случая $n \in \mathbb{R}$ как в моей работе) ввиду использования им представления таких коэффициентов через элементарные функции, ранее замеченного D.Fowler (см предложение 2 моей работы и введение. Такого представления для мной рассмотренных коэффициентов неизвестно). Причем это представление, использованное St.T.Smith, дало ему возможность изучения свойств такой функции $\binom{n}{\alpha}$ вещественного аргумента α и в тоже время в определенной мере усложнило, в частности, доказательство монотонности для таких коэффициентов.

В моей же статье рассмотрен более широкий класс биномиальных коэффициентов (в первую очередь как обобщение классических), когда оба аргумента вещественные, и аналоги классических свойств. И в этом смысле это не было сделано ни в работе St.T.Smith, ни в других известных мне работах. Несмотря на это рецензент искажает этот факт, написав *"Возможно, автор нашел здесь более простой подход, по сравнению с известными"*.

При этом, в работе приведено простейшее обоснование аналогов унимодальности (причем для более широкого класса коэффициентов) на основе свойств гамма-функции, а не использования представления через элементарные функции, вычисление производных и т.д. А простота доказательства у Математиков никогда не считалась чем-то заслуживающим такого отношения.

3) Рецензент пишет: *"Есть мнение Smith о нетривиальности исследования свойств биномиальных коэффициентов вещественного аргумента, но в настоящей работе это выглядит как цитирование оценочного суждения"*.

Приведу цитаты из работы St.T.Smith: *"Figure 1 might lead us to conclude that the investigation of the function* $\binom{n}{x}$ *should not be overly difficult, at least for* x *in the interval* $(-1, n+1)$*, which is after all the interval that we're actually interested in. In fact it turns out to be easier to determine the behavior of the function in the tail regions* $x < -1$ *and* $x > n+1$ *than it is for* $-1 < x < n+1$*. Determination of the sign of the second derivative of* $\binom{n}{x}$ *for* $-1 < x < n+1$ *is decidedly nontrivial; it requires multiplying and rearranging infinite series as well as some complicated computations"*. Также аналогичные рассуждения приведены и в аннотации его работы: *"The analysis is complicated by the existence of removable singularities at all of the integer points in the interval* $[0, n]$*, and requires multiplying, rearranging, and differentiating infinite series"*.
Действительно, любое мнение субъективно. И это естественный процесс, когда исследователь сталкивается с той или иной проблемой в своих исследованиях, а другие авторы находят решения этих вопросов и дают вектор перспективы для дальнейшего продвижения.

В этой связи напомню, известных мне и St.T.Smith (это видно из его работы) результатов по исследуемым свойствам функции $\binom{r}{\alpha}$ вещественных аргументов не было опубликовано. Также отмечу, что список работ по биномиальным коэффициентам $\binom{n}{\alpha}$ с одним вещественным аргументом (в русле статьи) почти исчерпывается приведенной в моей работе литературой.

4) Все приведенные здесь рассуждения в той или иной мере отражены в моей статье. Возможно что-то требует более подробного изложения, но, к сожалению, рецензент этого не отметил, а уделил внимание поиску контпримера к несуществующему в работе утверждению и совсем другим аспектам.

5) В заключение отмечу, что моя статья размещена онлайн (с закреплением авторских прав).

С уважением, Т.И.Федоряева.