S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, № 1 стр. 144–144 (2022) УДК 519.114+517.581
DOI 10.33048/semi.2022.19.xxx MSC 05A10+11B65

О БИНОМИАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТАХ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АРГУМЕНТОВ

Т.И. ФЕДОРЯЕВА

Abstract. As is well-known, a generalization of the classical concept of the factorial $n!$ for a real number $x \in \mathbb{R}$ is the value of Euler's gamma function $\Gamma(1+x)$. In this connection, the notion of a binomial coefficient naturally arose for admissible values of the real arguments.

By elementary means, it is proved a number of properties of binomial coefficients $\binom{r}{\alpha}$ of real arguments r, $\alpha \in \mathbb{R}$ such as analogs of unimodality, symmetry, Pascal's triangle, etc. for classical binomial coefficients. The asymptotic behavior of such generalized binomial coefficients of a special form is established.

Keywords: factorial, binomial coefficient, gamma function, real binomial coefficient.

Введение

В работе изучаются биномиальные коэффициенты вещественного аргумента. Целью исследования является получение элементарными методами аналогов базовых свойств, хорошо известных для классических биномиальных коэффициентов. Такие свойства представляют самостоятельный интерес и, кроме того, могут упростить работу с биномиальными коэффициентами вида $\binom{n}{m}$ с целыми неотрицательными аргументами n и m, заданными по сути вещественными значениями с рассматриваемым округлением до целого числа (когда, например, используются функции нижняя и верхняя целая часть числа и т.п.). Так, например, свойства унимодальности и симметрии позволяют переходить от таких биномиальных коэффициентов $\binom{n}{m}$, $0 \leq m \leq n$ к "близким"

Fedoryaeva, T.I., On binomial coefficients of real arguments.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0018).

Поступила мая 2022 г., опубликована 2022 г.

вещественным биномиальным коэффициентам вида $\binom{r}{\alpha}$, $\alpha \in (-1, r+1)$ и наоборот. Такой подход упрощает работу с оценками выражений с дискретными биномиальными коэффициентами с целыми аргументами указанного вида.

Заметим, что биномиальные коэффициенты вида $\binom{r}{n}$, где $r \in \mathbb{R}$ и $n \in \mathbb{N}$, могут быть определены стандартным способом как

$$\binom{r}{n} = \frac{r(r-1)(r-2)\cdots(r-n+1)}{n!}.$$

Такой подход рассматривался в [4], где приведен многочисленный ряд тождеств для таких биномиальных коэффициентов. В [3] изучался график функции $\binom{r}{\alpha}$ двух вещественных переменных r и α, с помощью компьютера построены различные срезы этого графика и проведен их анализ. Там же указано явное выражение биномиального коэффициента $\binom{n}{\alpha}$, где n — неотрицательное целое число, через элементарные функции (см. предложение 2 в разделе 2). На основе этого представления, в [6] исследовались биномиальные коэффициенты вида $\binom{n}{z}$ для комплексной переменной $z \in \mathbb{C}$ и фиксированного натурального числа n, установлен ряд свойств такой функции комплексного аргумента z. В частности, вычислены производные первого и второго порядка, а для вещественного аргумента z также найдены интервалы возрастания и убывания, нули функции и т.п. Там же отмечена нетривиальность исследования функции $\binom{n}{\alpha}$ вещественной переменной α именно на интервале $\alpha \in (-1, n+1)$ в отличие от области вне этого интервала. В частности, достаточно сложно устанавливается возрастание и убывание этой функции.

В настоящей работе элементарными средствами доказывается ряд свойств биномиальных коэффициентов $\binom{r}{\alpha}$ вещественных аргументов $r, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \in (-1, r+1)$ (аналоги свойств унимодальности, симметрии, треугольника Паскаля и т.п. дискретных биномиальных коэффициентов), которые могут быть полезны в дальнейших исследованиях (см., например, [2]).

1. Предварительные сведения

В статье используются общепринятые понятия и обозначения теории функций вещественной переменной [1], а также стандартные понятия комбинаторного анализа [4]. Через (a, b) обозначим *открытый вещественный интервал* между числами $a, b \in \mathbb{R}$, $o(1)$ — *бесконечно малую функцию* в окрестности ∞, $n!$ — *факториал* неотрицательного целого числа n, т.е $n! = n(n-1)\cdots 2\cdot 1$, и при этом считаем $0! = 1$, $\binom{n}{m}$, где $0 \le m \le n$, — (стандартный) биномиальный коэффициент (с целыми неотрицательными аргументами n, m), т.е.

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Для обозначения *асимптотического равенства* числовых функций $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to \infty$ используем запись $f(x) \sim g(x)$, которая по определению означает, что f(x)=g(x)(1+r(x)) в некоторой окрестности ∞, где r(x)=o(1), или, эквивалентно (для функций, положительных в некоторой окрестности ∞)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

Рассматривается стандартный подход, когда понятие факториала для целых неотрицательных чисел распространяется на вещественные (и даже комплексные) числа с помощью *гамма-функции* $\Gamma(\alpha)$. Мы будем использовать её определение в следующей *форме Эйлера-Гаусса* [1, стр. 393–394, 812]

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)},\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}, \tag{1}$$

такой предел существует для любого указанного значения α (см., например, [5] или [1, стр. 393]). Ввиду постановки задачи мы не рассматриваем доопределений гамма-функции вне её стандартной области определения. Заметим, что при определении гамма-функции в *форме Эйлерового интеграла второго рода*

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx,$$

сходящегося при $\alpha > 0$, мы получим эквивалентное определение на интервале $(0,\infty)$ [1, стр. 811]. Гамма-функция $\Gamma(\alpha)$ непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков на $(0,\infty$, не имеет вещественных корней и положительна на $(0,\infty)$. Для любого неотрицательного целого n выполняется равенство

$$\Gamma(1+n) = n!\,, \tag{2}$$

более того, справедлива *формула понижения* [1, стр. 394]

$$\Gamma(1+\alpha) = \alpha\Gamma(\alpha),\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}. \tag{3}$$

Также из разложения $\sin\pi\alpha$ и (1) вытекает следующая *формула дополнения* (см., например, [1, 5])

$$\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\,,\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0,\pm1,\pm2,\ldots\}. \tag{4}$$

Как обобщение дискретного биномиального коэффициента $\binom{n}{m}$, биномиальный коэффициент вещественного аргумента определяется следующим образом (см., например, [3])

$$\binom{r}{\alpha} = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+r-\alpha)}\,. \tag{5}$$

Заметим, что если $r \in (-1,+\infty)$ и $\alpha \in (-1, r+1)$, биномиальный коэффициент $\binom{r}{\alpha}$ определен равенством (5) корректно.

2. Биномиальные коэффициенты $\binom{r}{\alpha}$ при r, $\alpha \in \mathbb{R}$

Теорема 1 (свойства биномиального коэффициента вещественного аргумента)**.** *Пусть* $r \in (-1,+\infty)$ *и* $\alpha \in (-1, r+1)$. *Тогда*

(i) $\binom{r}{\alpha} > 0$, $\binom{r}{0} = 1$ *и* $\binom{r}{r} = 1$;

(ii) $\binom{0}{\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = 0, \\ \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}, & \text{если } \alpha \neq 0 \text{ и } \alpha \in (-1,1); \end{cases}$

(iii) $\binom{r}{r-\alpha} = \binom{r}{\alpha}$;

(iv) $\binom{r}{\alpha} = \binom{r-1}{\alpha-1} + \binom{r-1}{\alpha}$, *если* $r \in (0,+\infty)$ *и* $\alpha \in (0, r)$;

(v) *биномиальный коэффициент* $\phi(\alpha) = \binom{r}{\alpha}$ *строго возрастает на интервале* $(-1, \frac{r}{2}]$ *и строго убывает на интервале* $[\frac{r}{2}, r+1)$;

(vi) *биномиальный коэффициент* $\psi(r) = \binom{r}{\alpha}$ *строго возрастает при* $\alpha > 0$, *строго убывает при* $-1 < \alpha < 0$ *и* $\psi(r) \equiv 1$, *если* $\alpha = 0$.

Доказательство. Утверждение (i) вытекает из соотношений (2), (5).

Докажем (ii). Если $\alpha = 0$, требуемое равенство следует из (i). Далее считаем, что $\alpha \neq 0$. Используя соотношения (3)–(5), получаем

$$\binom{0}{\alpha} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} = \frac{\sin \pi\alpha}{\pi\alpha}\,.$$

Заметим, что если $\alpha \in (-1, r+1)$, то $r - \alpha \in (-1, r+1)$. Поэтому биномиальный коэффициент $\binom{r}{r-\alpha}$ определен и выполняется требуемое равенство из (iii) в силу (5). Также из (3) и (5) нетрудно доказать (iv).

Докажем утверждение (v). Пусть α, $\beta \in (-1, r+1)$. Из (1) получаем

$$\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+r-\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\,(n-1)!\,n^{2+r}}{\prod_{i=1}^{n}(\alpha+i)(r-\alpha+i)}\,.$$

Следовательно,

$$\frac{\phi(\alpha)}{\phi(\beta)} = \frac{\Gamma(1+\beta)\,\Gamma(1+r-\beta)}{\Gamma(1+\alpha)\,\Gamma(1+r-\alpha)} = \lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} \delta_i(\alpha,\beta), \text{ где} \tag{6}$$

$$\delta_i(\alpha,\beta) = \frac{(\alpha+i)(r-\alpha+i)}{(\beta+i)(r-\beta+i)}\,.$$

Заметим, что $\delta_i(\alpha,\beta) > 0$ для любых α, $\beta \in (-1, r+1)$ и $i = 1, \ldots, n$. Нетрудно также показать, что

$$\delta_i(\alpha,\beta) \geq 1 \Leftrightarrow f(\alpha) \geq f(\beta), \tag{7}$$

где $f(x) = -x^2 + xr$, причём парабола $f(x)$ строго возрастает на $(-\infty, \frac{r}{2}]$ и строго убывает на $[\frac{r}{2}, +\infty$. Кроме того, непосредственно устанавливается, что

$$\delta_1(\alpha,\beta) = 1 + \varepsilon(\alpha,\beta), \text{ где } \varepsilon(\alpha,\beta) = \frac{(r-\alpha-\beta)(\alpha-\beta)}{(\beta+1)(r-\beta+1)}. \tag{8}$$

Пусть $-1 < \beta < \alpha \leq \frac{r}{2}$. Тогда $f(\alpha) > f(\beta)$ и $\varepsilon(\alpha,\beta) > 0$. В силу (7) имеем $\delta_i(\alpha,\beta) \geq 1$ для любого $i = 1, \ldots, n$. Следовательно, из (6) и (8) получаем

$$\frac{\phi(\alpha)}{\phi(\beta)} \geq \delta_1(\alpha,\beta) = 1 + \varepsilon(\alpha,\beta) > 1.$$

Аналогично если $\frac{r}{2} \leq \beta < \alpha < r+1$, то $f(\alpha) < f(\beta)$ и $\varepsilon(\alpha,\beta) < 0$. Поэтому $0 < \delta_i(\alpha,\beta) < 1$, $i = 1, \ldots, n$ и

$$\frac{\phi(\alpha)}{\phi(\beta)} \leq \delta_1(\alpha,\beta) = 1 + \varepsilon(\alpha,\beta) < 1.$$

Докажем утверждение (vi). Ввиду утверждения (i) можно считать, что $\alpha \neq 0$. Пусть $r < r'$. Заметим, что $1 + r + i > 0$, $1 + r' + i > 0$ и $\alpha/(1+r+i) < 1$, $\alpha/(1+r'+i) < 1$ для любого $i \geq 0$. Из (1) получаем

$$\frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r-\alpha)} = \Big(1 - \frac{\alpha}{1+r}\Big) \lim_{n\to\infty} n^{\alpha} \prod_{i=1}^{n-1} \Big(1 - \frac{\alpha}{1+r+i}\Big)\,.$$

Следовательно, $\Gamma(1+r)/\Gamma(1+r-\alpha) < \Gamma(1+r')/\Gamma(1+r'-\alpha)$ при $\alpha > 0$ (и справедливо обратное строгое неравенство при $\alpha < 0$). В силу (5) заключаем $\psi(r) < \psi(r')$ (соответственно $\psi(r) > \psi(r')$ при $\alpha < 0$). $\square$

Предложение 1. *Пусть r принимает вещественные значения, $\alpha \in \mathbb{R}$ не зависит от r и $0 < \alpha < 1$. Тогда при $r \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\binom{r}{r\alpha} \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha(1-\alpha)r}} \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha r} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{(1-\alpha)r}. \tag{9}$$

Доказательство. При $r > 0$ функции $\Gamma(1+r)$, $\Gamma(1+r\alpha)$, $\Gamma(1+r-r\alpha)$ определены корректно и положительны. В силу (5) имеем

$$\binom{r}{r\alpha} = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+r\alpha)\,\Gamma(1+r-r\alpha)}\,. \tag{10}$$

Для гамма-функции справедлива обобщенная формула Стирлинга (см., например, [1]):

$$\Gamma(1+x) \sim \sqrt{2\pi x}\left(\frac{x}{e}\right)^x \text{ при } x \to \infty.$$

Ввиду условия $0 < \alpha < 1$, при $r \to \infty$ имеем $r\alpha \to \infty$ и $r - r\alpha \to \infty$. Теперь, используя обобщенную формулу Стирлинга, из (10) эквивалентными преобразованиями получаем асимптотическое равенство (9). $\square$

Следствие 1. *Пусть r принимает целые неотрицательные значения, $\alpha \in \mathbb{R}$ не зависит от r и $0 < \alpha < 1$. Тогда при $r \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство* (9).

Доказательство. Пусть $g(r)$ есть функция в правой части асимптотического равенства (9) и $f(r) = \binom{r}{r\alpha}/g(r)$. Тогда $\lim_{n\to\infty} f(r) = 1$ по предложению 1. Целые неотрицательные числа n образуют бесконечно большую подпоследовательность значений вещественной переменной r. Поэтому существующее предельное значение функции $f(r)$ вещественного аргумента при $r \to \infty$ сохраняется для функции $f(n)$ целого неотрицательного аргумента при $n \to \infty$. $\square$

Как отмечено в [3], в случае биномиальных коэффициентов вида $\binom{n}{\alpha}$ когда n есть целое положительное число, биномиальный коэффициент явно выражается через элементарные функции. В следующем предложении приведена формализация этого утверждения и дано его обоснование на основе свойств биномиальных коэффициентов вещественного аргумента.

Предложение 2 [3]**.** *Пусть n — целое неотрицательное число и вещественное число $\alpha \in (-1, n+1)$. Тогда справедливо равенство*

$$\binom{n}{\alpha} = \begin{cases} \frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\,, & \text{если } n = 0 \text{ и } \alpha \neq 0, \\ \frac{n!}{(n-\alpha)(n-1-\alpha)\cdots(1-\alpha)}\,\frac{\sin\pi\alpha}{\pi\alpha}\,, & \text{если } n \geq 1 \text{ и } \alpha \notin \{0,1,\ldots,n\}, \\ \frac{n!}{\alpha!(n-\alpha)!}\,, & \text{если } \alpha \in \{0,1,\ldots,n\}. \end{cases}$$

Доказательство. Требуемое равенство при $n = 0$ доказано в теореме 1, а при $\alpha \in \{0,1,\ldots,n\}$ вытекает из свойства гамма-функции (2). Пусть теперь $n \geq 1$ и $\alpha \notin \{0,1,\ldots,n\}$. Предположим, что $n-i-\alpha \in \{0,-1,-2,\ldots\}$ для некоторого i, $0 \leq i \leq n-1$. Тогда $\alpha - (n-i) \in \{0,1,2,\ldots\}$. Следовательно, $\alpha \in \mathbb{N}$ и поэтому $\alpha \in \{0,1,\ldots,n\}$, пришли к противоречию. Таким образом, $n - i - \alpha \notin$

$\{0, -1, -2, \ldots\}$ для любого $i = 0, 1, \ldots, n-1$. В силу формулы понижения (3) имеем

$$\Gamma(1+n-\alpha) = (n-\alpha)\Gamma(n-\alpha) = \ldots = \prod_{i=0}^{n-1}(n-i-\alpha)\Gamma(1-\alpha).$$

Поскольку $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$, из (3)–(5) получаем требуемое выражение для $\binom{n}{\alpha}$. $\square$

References

[1] G.M. Fikhtengol'ts, *Course of Differential and Integral Calculus Volume 2*, Fizmatlit, Moscow, 2003 ISBN 5-9221-0157-9

[2] T.I. Fedoryaeva, *Logarithmic asymptotic of the number of central vertices of almost all n-vertex graphs of diameter k*, Siber. Electr. Math. Reports, to appear.

[3] D. Fowler, *The Binomial Coefficient Function*, The American Mathematical Monthly, Vol. **103**, No. 1 (Jan., 1996), pp. 1–17, DOI.org/10.2307/2975209 Zbl 0857.05003

[4] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994. Zbl 0836.00001

[5] J.L.W.V. Jensen and T.H. Gronwall, *An Elementary Exposition of the Theory of the Gamma Function*, Annals of Mathematics , Mar., 1916, Second Series, Vol. **17**, No. 3 (Mar., 1916), pp. 124–166. DOI.org/10.2307/2007272 Zbl 46.0563.02

[6] St.T. Smith, *The binomial coefficient* $\binom{n}{x}$ *for arbitrary* x, Online Journal of Analytic Combinatorics, December 2020. https://hosted.math.rochester.edu/ojac/vol15/176.pdf Zbl 1468.11069

Tatiana Ivanovna Fedoryaeva

Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: fti@math.nsc.ru