S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, стр. 144–144 (2022) УДК 519.173+519.175
DOI 10.33048/semi.2022.19.xxx MSC 05C12+05C80

ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА ЧИСЛА ЦЕНТРАЛЬНЫХ ВЕРШИН ПОЧТИ ВСЕХ n-ВЕРШИННЫХ ГРАФОВ ДИАМЕТРА k

Т.И. ФЕДОРЯЕВА

Abstract. The asymptotic behavior of the number of central vertices and F. Buckley's central ratio $\mathbb{R}_c(G) = |\mathbb{C}(G)|/|V(G)|$ for almost all n-vertex graphs G of fixed diameter k is investigated.

The logarithmic asymptotics of the number of central vertices for almost all such n-vertex graphs is established: 0, 1, or $\log_2 n$ (respectively, for arising here subclasses of graphs).

It is proved that for almost all n-vertex graphs of diameter k $\mathbb{R}_c(G) = 1$ for $k = 1, 2$, and $\mathbb{R}_c(G) = 1 - 2/n$ for graphs of diameter $k = 3$, while for $k \geq 4$ the value of the central ratio $\mathbb{R}_c(G)$ is bounded by the interval $(\frac{\Delta}{6} + r_1(n), 1 - \frac{\Delta}{6} - r_1(n))$ except no more than one value (two values) outside the interval for even diameter k (for odd diameter k) depending on k. Here $\Delta \in (0, 1)$ is arbitrary predetermined constant and $r_1(n), r_2(n)$ are positive infinitesimal functions.

Keywords: graph, diameter, radius, central vertices, number of central vertices, central ratio, center, spectrum of center, typical graphs, almost all graphs.

Введение

В работе изучаются конечные помеченные обыкновенные графы. Для связного графа $G = (V, E)$ *расстояние* $\rho_G(u, v)$ между его вершинами $u, v \in V$ определяется как длина кратчайшей цепи, соединяющей эти вершины. При этом $e_G(v) = \max_{u \in V} \rho_G(v, u)$ — есть *эксцентриситет вершины* v графа G,

---

Fedoryaeva, T.I., Logarithmic asymptotic of the number of central vertices of almost all n-vertex graphs of diameter k.

Работа выполнена в рамках государственного задания ИМ СО РАН (проект № FWNF-2022-0018).

Поступила мая 2022 г., опубликована 2022 г.

$d(G) = \max_{v \in V} e_G(v)$ — *диаметр графа* G и $r(G) = \min_{v \in V} e_G(v)$ — *радиус графа* G. Вершина графа называется *центральной*, если её эксцентриситет равен радиусу графа. *Центр графа* $\mathbb{C}(G)$ — это множество всех центральных вершин графа G.

Концепция центра графа связана с его многочисленными практическими задачами, возникающими в различных областях, и обусловлена измерением центральности по близости при анализе различного рода сетей и связей. Часто в графах, соответствующих коммуникационным сетям, диаметр интерпретируется как время передачи данных или длина пути между наиболее удаленными узлами, радиус — как время достижимости наиболее удаленных узлов до центрального узла, осуществляющего роль главного распределительного центра. При этом допускается наличие нескольких таких центров (см., например, [17]). Нахождение центра графа оказывается полезным для задач оптимального размещения общественно важных учреждений и предприятий (больниц, станций пожарной охраны, почтовых отделений и других экстренных пунктов), когда требуется минимизация наиболее дальних расстояний до этих учреждений [3]. Так, размещение госпиталя в центральных вершинах возникающего здесь графа уменьшает максимальное расстояние, которое приходится преодолевать машинам медицинской помощи. Концепция центральности также применяется в социальных науках и активно используется при анализе социальных сетей [18], например, когда устанавливаются наиболее влиятельные лица рассматриваемой сети. В биологии актуальна при построении моделей распространения болезней, в химии — при анализе молекулярных связей и т.п.

Хорошо известен ряд классических результатов о центре графа [1–4, 14, 16]. Так, установлена реализуемость произвольного графа в качестве подграфа, порожденного центром подходящего графа. Именно доказано, что для любого графа H существует связный граф G такой, что его подграф, порожденный центром $\mathbb{C}(G)$, изоморфен H. Этот факт установили Г.Н. Копылов и Е.А. Тимофеев [16], его простое обоснование привёл также С.Т. Хедетниеми (см. [1]). А Ф. Бакли исследовал так называемое *центральное соотношение* $\mathbb{R}_c(G) = |\mathbb{C}(G)|/|V(G)|$ связного графа G, для которого очевидно выполняется неравенство $0 < \mathbb{R}_c(G) \le 1$. Для любого рационального q из интервала $(0, 1]$ он доказал существование графа G такого, что $\mathbb{R}_c(G) = q$ [2].

В [9] определен *спектр центра* $\mathbb{S}p_c(\mathcal{K})$ произвольного класса графов $\mathcal{K}$ как множество мощностей центров графов из этого класса $\mathcal{K}$. Спектр центра n-вершинных графов радиуса r установлен Я. Ху и С. Чжань [15]. Спектр центра всех и почти всех n-вершинных связных графов найден в [9]. Там же автором получен ряд структурных результатов о центре и спектре его мощностей для почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра k. При $k = 1, 2$ любая вершина является центральной, а для $k \ge 3$ выделено два типа центральных вершин, необходимых и достаточных для получения центров почти всех таких графов. При исследовании возможного спектра центра почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра k получен неожиданный результат [9]. Оказалось, что центр почти всех таких графов имеет мощность n при $k = 1, 2$ и $n - 2$ при $k = 3$, а для $k \ge 4$ при распределении значений мощности центра для вероятностного пространства n-вершинных графов диаметра k для почти всех графов не возникает единственного значения мощности центра (хотя радиус определен однозначно [8]). Более того, имеются скачки таких значений мощности в зависимости от значения диаметра. А именно, спектр центра ограничен интервалом из последовательных целых чисел и дополнительно содержит не более одного значения (двух значений) вне этого интервала для чётного диаметра k (для нечётного диаметра k) в зависимости от значения k (более детально см. теорему 2 в предварительных сведениях). Заметим, что границы интервала зависят от наперёд выбранного произвольного целого p и сжимаются при выборе бо́льшего значения p. Это приводит к необходимости рассмотрения случая, когда параметр p зависит от n.

Применяя этот подход, в настоящей работе асимптотически исследуется поведение числа центральных вершин и центрального соотношения для почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра k.

Необходимые предварительные сведения содержатся в разделе 1. Там же приведены общие свойства классов типичных графов (предложение 1). Здесь же дано определение семейства вложенных классов $\mathcal{F}_{n,k,p}$, $p \geq 1$ (p — целочисленная константа, не зависящая от n) типичных n-вершинных графов фиксированного диаметра $k \geq 3$, обладающих рядом метрических свойств и построенных автором в [8].

Раздел 2 носит технический характер, цель которого — получить оценки для некоторых выражений с классическими биномиальными коэффициентами (лемма 3 и следствие 2). При этом используются свойства биномиальных коэффициентов $\binom{r}{\alpha}$ вещественных аргументов r, $\alpha \in \mathbb{R}$, ранее полученные автором в [10]. Именно, аналог свойства унимодальности для стандартных биномиальных коэффициентов (теорема 3) и асимптотика таких обобщенных биномиальных коэффициентов специального вида (предложение 2).

В разделе 3 рассматривается более общий случай класса n-вершинных графов $\mathcal{F}_{n,k,p}$ диаметра $k \geq 3$, когда $p = p(n)$ есть функция, зависящая от n и принимающая целые положительные значения. Для выделенного класса функций $p(n)$ установлено асимптотически точное значение числа $|\mathcal{F}_{n,k,p(n)}|$ и доказано, что $\mathcal{F}_{n,k,p(n)}$ есть класс типичных n-вершинных графов диаметра k (теорема 4 и следствие 3). В частности, отсюда вытекает, что для почти всех n-вершинных графов диаметра k окружения любых двух вершин, не принадлежащих фиксированной диаметральной цепи, содержат не менее $p(n)$ общих вершин (следствие 4).

В разделе 4 для почти всех n-вершинных графов диаметра k найдены нижняя и верхняя оценки числа центральных вершин, зависящие от n и уточняющие ранее полученные границы интервала из спектра центра таких графов (теорема 6).

Как следствие установлена асимптотика числа $\log_2 |\mathbb{C}(G)|$ для почти всех n-вершинных графов G фиксированного диаметра. Доказано, что логарифмическая асимптотика числа центральных вершин есть 0, 1 или $\log_2 n$ (соответственно для возникающих здесь подклассов n-вершинных графов, более детально см. следствие 5).

Также как следствие найдены оценки центрального соотношения $\mathbb{R}_c(G)$ для почти всех n-вершинных графов G диаметра k. Доказано, что для почти всех таких графов $\mathbb{R}_c(G) = 1$ при $k = 1, 2$ и $\mathbb{R}_c(G) = 1 - 2/n$ для графов диаметра $k = 3$, а при $k \geq 4$ значение центрального соотношения $\mathbb{R}_c(G)$ ограничено интервалом $(\frac{\Delta}{6} + r_1(n), 1 - \frac{\Delta}{6} - r_1(n))$, за исключением не более одного значения (двух значений) вне этого интервала для чётного диаметра k (для нечётного диаметра k) в зависимости от значения k. Здесь Δ — любая наперёд выбранная константа такая, что $0 < \Delta < 1$, и $r_i(n) = o(1)$ — положительные функции, $i = 1, 2$ (более детально см. следствие 6).

Все полученные типичные свойства центра n-вершинных графов фиксированного диаметра $k \geq 2$ остаются типичными и для связных графов диаметра не менее k, а также для графов (не обязательно связных), содержащих кратчайшую цепь длины не менее k (см., в частности, следствие 7).

1. Предварительные сведения

В статье используются общепринятые понятия и обозначения теории графов [4, 14], а также комбинаторного анализа [13] и теории функций вещественной переменной [11]. Рассматриваются только конечные обыкновенные (без петель и кратных рёбер) графы $G = (V, E)$ с множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Через $B_i^G(v) = \{u \in V \mid \rho_G(v, u) \leq i\}$ обозначим *шар радиуса i с центром в вершине $v \in V$* в метрическом пространстве графа G с метрикой пути ρ_G, $S_i^G(v) = \{u \in V \mid \rho_G(v, u) = i\ \}$ — *сферу радиуса i с центром в вершине $v \in V$*, $\lfloor x \rfloor$ — наибольшее целое число, меньшее или равное вещественного неотрицательного числа x, $\left[\left[\, x,\, y \,\right]\right]$ — целочисленный интервал $[x,\, y] \cap \mathbb{Z}$ между вещественными числами $x, y \in \mathbb{R}$, $(n)_k = n(n-1)\cdots(n-k+1)$ и при этом считаем $(n)_0 = (0)_0 = 1$, $(n)_k = 0$ при $n < k$. Вершина графа степени 1 называется *висячей*, сфера $S_1^G(v)$ радиуса 1 с центром в v — *окружением вершины v*, кратчайшая цепь длины $d(G)$ — *диаметральной цепью* графа G, а под парой диаметральных вершин понимаем неупорядоченную выборку двух вершин из множества V, расстояние между которыми равно диаметру графа.

Для оценки меры количества графов с определенным свойством часто используется понятие *почти все*, при таком подходе изучаемое свойство рассматривается для графов с бóльшим числом вершин. Пусть $\mathcal{J}_n$ — класс помеченных n-вершинных графов с фиксированным множеством вершин $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Рассмотрим некоторое свойство $\mathcal{P}$, которым каждый граф может обладать или не обладать. Через $\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}$ обозначим множество всех графов из $\mathcal{J}_n$, которые обладают свойством $\mathcal{P}$. Говорят, что *почти все графы обладают свойством $\mathcal{P}$*, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}|}{|\mathcal{J}_n|} = 1$, т.е. $|\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}| \sim |\mathcal{J}_n|$, и *почти нет графов, обладающих свойством $\mathcal{P}$*, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|\mathcal{J}_n^{\mathcal{P}}|}{|\mathcal{J}_n|} = 0$. Аналогичным образом можно говорить о свойстве $\mathcal{P}$, которым обладают почти все графы рассматриваемого класса $\mathcal{K}$, или когда почти нет графов в $\mathcal{K}$, обладающих свойством $\mathcal{P}$.

При исследовании и выделении почти всех графов для рассматриваемого класса графов часто бывает полезным определять не сами характеристические свойства для понятия почти все, а непосредственно выделять сам подкласс типичных графов (в [5, 6] сформулировано более общее понятие класса типичных комбинаторных объектов и абстрактного типичного комбинаторного объекта для заданного класса объектов, допускающих понятие размерности). Далее будем также придерживаться этого формального понятия для графов (когда под размерностью графа понимается число его вершин). Пусть Ω — произвольный класс графов такой, что $\Omega_n \neq \varnothing$ для всех достаточно больших n, где $\Omega_n = \Omega \cap \mathcal{J}_n$. Подкласс $\Omega^* \subseteq \Omega$ есть *класс типичных графов класса Ω*, если $\lim_{n\to\infty} \frac{|\Omega_n^*|}{|\Omega_n|} = 1$. При этом свойство графов рассматриваемого класса является *типичным*, если почти все графы этого класса обладают данным свойством. Сформулируем простые свойства классов типичных графов.

Предложение 1 (свойства классов типичных графов). *Пусть $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — подклассы класса графов $\mathcal{K}$. Тогда*

(i) *если $\mathcal{X}$ — класс типичных графов класса $\mathcal{K}$ и $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, то $\mathcal{Y}$ — также класс типичных графов класса $\mathcal{K}$;*

(ii) *если $\mathcal{X}$ — класс типичных графов класса $\mathcal{K}$ и $\mathcal{Y} \subseteq \mathcal{X}$, причём $|\mathcal{Y}_n| = o(|\mathcal{K}_n|)$ при $n \to \infty$, то $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ — также класс типичных графов класса $\mathcal{K}$;*

(iii) *если $\mathcal{X}$ — класс типичных графов класса $\mathcal{K}$ и $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, то $\mathcal{X}$ — класс типичных графов класса $\mathcal{Y}$;*

(iv) *если $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ — классы типичных графов класса $\mathcal{K}$, то $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y}$ — также класс типичных графов класса $\mathcal{K}$, при этом подклассы $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y} \setminus \mathcal{X}$ имеют асимптотически нулевую долю в $\mathcal{K}$, т.е. $|\mathcal{X}_n \setminus \mathcal{Y}_n| = o(|\mathcal{K}_n|)$ и $|\mathcal{Y}_n \setminus \mathcal{X}_n| = o(|\mathcal{K}_n|)$ при $n \to \infty$;*

(v) *если $\mathcal{X}$, $\mathcal{X}'$ — непересекающихся классы типичных графов классов $\mathcal{K}$ и $\mathcal{K}'$ соответственно, то $\mathcal{X} \cup \mathcal{X}'$ является классом типичных графов класса $\mathcal{K} \cup \mathcal{K}'$;*

(vi) *если $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ — класс типичных графов класса $\mathcal{K}$ и $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \emptyset$, причём в $\mathcal{K}$ подкласс $\mathcal{X}$ имеет асимптотическую долю, не равную* 1, *то $\mathcal{Y}$ — класс типичных графов класса $\mathcal{K} \setminus \mathcal{X}$.*

Доказательство. Утверждения (i)-(iii) вытекают непосредственно из определений, утверждение (iv) — из свойства (ii) и равенства $\mathcal{X} \cap \mathcal{Y} = \mathcal{X} \setminus (\mathcal{X} \setminus \mathcal{Y})$.

Докажем утверждение (v). Поскольку $\frac{|\mathcal{K}_n|}{|\mathcal{K}_n|+|\mathcal{K}'_n|}$ является ограниченной последовательностью, при $n \to \infty$ получаем

$$\frac{|\mathcal{K}_n|}{|\mathcal{K}_n| + |\mathcal{K}'_n|}\Big(\frac{|\mathcal{X}_n|}{|\mathcal{K}_n|} - \frac{|\mathcal{X}'_n|}{|\mathcal{K}'_n|}\Big) = o(1).$$

Остается заметить, что $|\mathcal{X}_n \cup \mathcal{X}'_n| = |\mathcal{X}_n| + |\mathcal{X}'_n|$ и при $n \to \infty$

$$\frac{|\mathcal{X}_n \cup \mathcal{X}'_n|}{|\mathcal{K}_n \cup \mathcal{K}'_n|} \geq \frac{|\mathcal{X}_n| + |\mathcal{X}'_n|}{|\mathcal{K}_n| + |\mathcal{K}'_n|} = \frac{|\mathcal{K}_n|}{|\mathcal{K}_n| + |\mathcal{K}'_n|}\Big(\frac{|\mathcal{X}_n|}{|\mathcal{K}_n|} - \frac{|\mathcal{X}'_n|}{|\mathcal{K}'_n|}\Big) + \frac{|\mathcal{X}'_n|}{|\mathcal{K}'_n|} \longrightarrow 1.$$

Докажем утверждение (vi). Поскольку $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ — класс типичных графов класса $\mathcal{K}$, имеем $|\mathcal{K}_n \setminus (\mathcal{X}_n \cup \mathcal{Y}_n)| = o(|\mathcal{K}_n|)$. В силу условия на долю подкласса $\mathcal{X}$, существует следующий предел

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \frac{|\mathcal{X}_n|}{|\mathcal{K}_n|}) \neq 0.$$

Кроме того, $\mathcal{Y}_n = \mathcal{K}_n \setminus (\mathcal{X}_n \cup \mathcal{K}_n \setminus (\mathcal{X}_n \cup \mathcal{Y}_n))$ и $|\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{X}_n| = |\mathcal{K}_n| - |\mathcal{X}_n|$. Таким образом, при $n \to \infty$ заключаем

$$\frac{|\mathcal{Y}_n|}{|\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{X}_n|} = \Big(1 - \frac{|\mathcal{X}_n|}{|\mathcal{K}_n|} - \frac{|\mathcal{K}_n \setminus (\mathcal{X}_n \cup \mathcal{Y}_n)|}{|\mathcal{K}_n|}\Big)\Big(1 - \frac{|\mathcal{X}_n|}{|\mathcal{K}_n|}\Big)^{-1} \longrightarrow 1.$$

□

Заметим, что в утверждении (vi) предложения 1 условие на долю подкласса $\mathcal{X}$ существенно. Например, пусть $\mathcal{K}_n = \mathcal{X}_n \cup \{H_n, G_n\}$, $\lim_{n\to\infty} |\mathcal{X}_n| = \infty$ и $\mathcal{Y}_n = \{G_n\}$, где $H_n, G_n \in \mathcal{J}_n \setminus \mathcal{X}_n$ — различные графы. Тогда $|\mathcal{K}_n| \sim |\mathcal{X}_n \cup \mathcal{Y}_n|$, т.е. $\mathcal{X} \cup \mathcal{Y}$ есть класс типичных графов класса $\mathcal{K}$. При этом очевидно, что

$\lim_{n\to\infty} |\mathcal{Y}_n| \,/\, |\mathcal{K}_n \setminus \mathcal{X}_n| = \frac{1}{2}$. Поэтому $\mathcal{Y}$ не является классом типичных графов класса $\mathcal{K} \setminus \mathcal{X}$.

Пусть $\mathcal{J}_{n,\,d=k},\ \mathcal{J}_{n,\,d\geq k},\ \mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}$ — следующие классы помеченных n-вершинных графов: графы диаметра k; связные графы диаметра не менее k и графы (не обязательно связные), имеющие кратчайшую цепь длины не менее k, соответственно. Очевидно выполняются включения $\mathcal{J}_{n,\,d=k} \subseteq \mathcal{J}_{n,\,d\geq k} \subseteq \mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}$. В [8] для любого $k \geq 3$ построено семейство вложенных классов $\mathcal{F}_{n,k,p},\ p \geq 1$ типичных n-вершинных графов фиксированного диаметра k, которые также являются типичными и для классов $\mathcal{J}_{n,\,d\geq k},\ \mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}$. Приведем определение класса графов $\mathcal{F}_{n,k,p}$. Для этого сначала рассмотрим специальные графы диаметра 3 и их свойства. Пусть $x, y \in V$ и $\mathcal{F}_{n,3,p}(x,y)$ — класс всех графов $F \in \mathcal{J}_n$, обладающих следующими свойствами:

a) вершины x, y не являются висячими в F;

b) $\rho_F(z,x) = \rho_F(z,y) = 2$ для некоторой вершины $z \in V$;

c) $d(F) = 3$, граф F имеет единственную пару диаметральных вершин x, y и не содержит совпадающих шаров радиуса 1 с центрами в различных вершинах;

d) выполняются следующие свойства сфер:

$$|S_1^F(u) \cap S_1^F(v)| \geq p \ \ \forall u, v \in V \setminus \{x,y\} \text{ и } u \neq v,$$
$$|S_1^F(u) \cap S_1^F(v)| \geq p \ \ \forall v \in V \setminus \{x,y\} \ \ \forall u \in \{x,y\}.$$

Теперь определим графы класса $\mathcal{F}_{n,k,p}$ следующим образом. Пусть $u = (u_0, u_1, \ldots, u_{k-2})$ — произвольная упорядоченная последовательность различных вершин из множества V. Зафиксируем пару соседних элементов u_s и u_{s+1}, $0 \leq s \leq k-3$. На множестве $V \setminus \{u_0, \ldots, u_{s-1}, u_{s+2}, \ldots, u_{k-2}\}$ из $n-k+3$ вершин определим произвольный граф F из класса $\mathcal{F}_{n-k+3,3,p}(u_s, u_{s+1})$. Наконец, соединим ребрами вершины u_i, u_{i+1} при $i \neq s$ и $0 \leq i < k-2$. Полученный граф обозначим через $G(u,s,F)$. Пусть $\mathcal{F}_{n,k,p}$ — класс всех построенных графов $G(u,s,F)$ при условии $0 \leq s \leq \lfloor \frac{k-3}{2} \rfloor$. Далее нам потребуются следующие оценки числа графов этого класса.

Лемма 1 [8]. *Пусть $k \geq 3$, $p \geq 1$ и $x, y \in V$ — различные вершины. Тогда*

$$|\mathcal{F}_{n,k,p}| = \frac{1}{2}(k-2)(n)_{k-1}\, |\mathcal{F}_{n-k+3,3,p}(x,y)|.$$

В следующей теореме приведены оценки, дающие асимптотически точное значение $2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}$ числа графов в каждом из классов $\mathcal{F}_{n,k,p},\ \mathcal{J}_{n,\,d=k},\ \mathcal{J}_{n,\,d\geq k}$ и $\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}$ для любых фиксированных $k \geq 3$ и $p \geq 1$ [8].

Теорема 1 [8]. *Пусть $k \geq 3$, $0 < \varepsilon < 1$ и $p \geq 1$ не зависят от n. Тогда существует такая константа $c > 0$, не зависящая от n, что для любого $n \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства*

$$2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\Big(1 - c\Big(\tfrac{5+\varepsilon}{6}\Big)^{n-k+1}\Big) \leq |\mathcal{F}_{n,k,p}| \leq |\mathcal{J}_{n,\,d=k}|$$
$$\leq |\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}| \leq |\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}| \leq 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\Big(1 + c\Big(\tfrac{5+\varepsilon}{6}\Big)^{n-k+1}\Big),$$

$$\text{где } \xi_{n,k} = q_k\ (n)_{k-1}\left(\frac{3}{2^{k-1}}\right)^{n-k+1}, \quad q_k = \frac{1}{2}\,(k-2)\,2^{-\binom{k-1}{2}}.$$

В [9] асимптотически исследован спектр центра $\mathbb{S}p_c(\mathcal{J}_{n,\,d=k})$, доказано следующее утверждение.

Теорема 2 [9]. *Пусть $k \geq 1$ и $p \geq 1$ — фиксированные целые константы. Тогда*

(i) $|\mathbb{C}(G)| = n$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра $k = 1, 2$;*

(ii) $|\mathbb{C}(G)| = n - 2$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 3;

(iii) $|\mathbb{C}(G)| \in \big[\big[\, 1 + p,\, n - 5 - p \,\big]\big]$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 4;

(iv) $|\mathbb{C}(G)| \in \big[\big[\, 2 + p,\, n - 5 - p \,\big]\big] \cup \{n - 4\}$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 5, *при этом доля таких графов с $(n-4)$-вершинным центром асимптотически равна $\frac{1}{3}$;*

(v) $|\mathbb{C}(G)| \in \{1\} \cup \big[\big[\, 1 + p,\, n - k - 1 - p \,\big]\big]$ *для почти всех n-вершинных графов G четного фиксированного диаметра $k \geq 6$, при этом доля таких графов с тривиальным центром асимптотически равна $\frac{k-4}{k-2}$;*

(vi) $|\mathbb{C}(G)| \in \{2\} \cup \big[\big[\, 2 + p,\, n - k - p \,\big]\big] \cup \{n - k + 1\}$ *для почти всех n-вершинных графов G нечетного фиксированного диаметра $k \geq 7$, при этом доля таких графов с 2-вершинным и $(n - k + 1)$-вершинным центром асимптотически равна $\frac{k-5}{k-2}$ и $\frac{1}{k-2}$ соответственно.*

Введем несколько асимптотических обозначений. Для числовых функций $f(n), g(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ будем писать $f(n) \lesssim g(n)$ (соответственно $f(n) \gtrsim g(n)$), если существует такое $N \in \mathbb{N}$, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $f(n) \leq g(n)$ $(f(n) \geq g(n))$. Для обозначения *асимптотического равенства* числовых функций $f(n)$ и $g(n)$ при $n \to \infty$ используем запись $f(n) \sim g(n)$, которая по определению означает, что f(n) = g(n)(1+r(n)) для всех достаточно больших n, где r(n) = o(1), или, эквивалентно (для функций, положительных в некоторой окрестности ∞) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 1$. Пусть Ω — рассматриваемый класс графов и числовая характеристика $\mathcal{X} : \Omega \to \mathbb{R}$ сопоставляет каждому графу $G \in \Omega$ некоторое вещественное число $\mathcal{X}(G) \in \mathbb{R}$. Для почти всех n-вершинных графов G класса Ω числовая характеристика $\mathcal{X}(G)$ *асимптотически равна* числовой функции $f(n)$ (символически $\mathcal{X}(G) \sim f(n)$), если для некоторых функций f_1, $f_2 : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ почти все n-вершинные графы G класса Ω удовлетворяют соотношению $f_1(n) \leq \mathcal{X}(G) \leq f_2(n)$, и при этом числовые функции $f_1(n)$, $f_2(n)$, $f(n)$ асимптотически совпадают при $n \to \infty$.

2. Оценки некоторых выражений с биномиальными коэффициентами

В этом разделе мы получим оценки для некоторых выражений с обычными биномиальными коэффициентами. При этом нам потребуются свойства биномиальных коэффициентов $\binom{r}{\alpha}$ вещественных аргументов r, $\alpha \in \mathbb{R}$, доказанные автором в [10]. Напомним, что биномиальный коэффициент вещественного аргумента (как обобщение классического биномиального коэффициента $\binom{n}{m}$ для неотрицательных целых n и m) определяется следующим образом (см., например, [12]):

$$\binom{r}{\alpha} = \frac{\Gamma(1+r)}{\Gamma(1+\alpha)\Gamma(1+r-\alpha)}\,, \tag{1}$$

здесь $\Gamma(\alpha)$ — гамма-функция Эйлера, которая может быть определена в *форме Эйлера-Гаусса* (см., например, [11]) как

$$\Gamma(\alpha) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^{\alpha}}{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+n-1)},\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0,-1,-2,\ldots\}.$$

Заметим, что если $r \in (-1, +\infty$ и $\alpha \in (-1, r+1)$, биномиальный коэффициент $\binom{r}{\alpha}$ определен равенством (1) корректно.

В [10] установлен ряд свойств вещественных биномиальных коэффициентов, в частности, доказаны следующие утверждения.

Теорема 3 [10]**.** *Пусть $r \in (-1, +\infty)$ и $\alpha \in (-1, r+1)$. Тогда $\binom{r}{\alpha} > 0$ и биномиальный коэффициент $\phi(\alpha) = \binom{r}{\alpha}$ строго возрастает на интервале $(-1, \frac{r}{2}]$ и строго убывает на интервале $[\frac{r}{2}, r+1)$.*

Предложение 2 [10]**.** *Пусть r принимает вещественные значения, $\alpha \in \mathbb{R}$ не зависит от r и $0 < \alpha < 1$. Тогда при $r \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство*

$$\binom{r}{r\alpha} \sim \sqrt{\frac{1}{2\pi\alpha(1-\alpha)r}}\, \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha r} \left(\frac{1}{1-\alpha}\right)^{(1-\alpha)r}. \qquad (2)$$

Следствие 1 [10]**.** *Пусть r принимает целые неотрицательные значения, $\alpha \in \mathbb{R}$ не зависит от r и $0 < \alpha < 1$. Тогда при $r \to \infty$ справедливо асимптотическое равенство* (2)*.*

Напомним, что последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется *унимодальной*, если существует такое s, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_s \geq a_{s+1} > a_{s+2} > \ldots > a_n$ (см., например, [19]).

Лемма 2. *Пусть $n \geq q \geq 1$. Тогда последовательность $\binom{n}{s} q^{-s}$, $s = 0, 1, \ldots, n$ является унимодальной, причём при $s = \lfloor \frac{n+1}{q+1} \rfloor$ достигается её наибольшее значение и такое s наибольшее.*

Доказательство. Введём последовательности $\alpha_s = \binom{n}{s} q^{-s}$, $0 \leq s \leq n$, и $\beta_s = \frac{\alpha_{s+1}}{\alpha_s}$ при $0 \leq s \leq n-1$. Непосредственно устанавливается, что

$$\beta_s = \frac{n-s}{(s+1)q}\,,$$

$$\frac{\beta_{s+1}}{\beta_s} = \frac{n-(s+1)}{n-s} \cdot \frac{s+1}{s+2} < 1 \text{ при } 0 \leq s \leq n-2,$$

т.е. β_s — строго убывающая последовательность. Кроме того, $\beta_0 \geq 1$ в силу условия $n \geq q$. Поэтому для некоторого s^* последовательность α_s строго возрастает при $0 \leq s \leq s^*$, $\alpha_{s^*} \leq \alpha_{s^*+1}$ и далее строго убывает при $s^*+1 \leq s \leq n$. Заметим, что s^* является наибольшим s, удовлетворяющем неравенству $\beta_s \geq 1$. Следовательно, $s^* = \lfloor \frac{n-q}{q+1} \rfloor$ и $s^*+1 = \lfloor \frac{n+1}{q+1} \rfloor$. □

Лемма 3. *Пусть $p(n) = \lfloor \frac{n}{q+1}\Delta \rfloor + 1$, где $q \geq 1$ и $0 < \Delta < 1$ не зависят от n. Тогда существует ε_Δ такое, что ε_Δ не зависит от n, $0 < \varepsilon_\Delta < 1$ и при $n \to \infty$ выполняется соотношение*

$$\left(\frac{q}{q+1}\right)^n \sum_{s=0}^{p(n)-1} \binom{n}{s} q^{-s} = \varepsilon_\Delta^n\, O(\sqrt{n}).$$

Доказательство. По предложению 2 получаем

$$\binom{n}{\frac{n}{q+1}\Delta} \sim \sqrt{\frac{(q+1)^2}{2\pi\Delta(q+1-\Delta)n}}\,(q+1)^n \Delta^{-\frac{\Delta}{q+1}n}\,(q+1-\Delta)^{-\frac{q+1-\Delta}{q+1}n}. \qquad (3)$$

Поэтому

$$\binom{n}{\frac{n}{q+1}\Delta} = (q+1)^n \Delta^{-\frac{\Delta}{q+1}n}\,(q+1-\Delta)^{-\frac{q+1-\Delta}{q+1}n}\, O\Big(\frac{1}{\sqrt{n}}\Big).$$

Следовательно,

$$n\left(\frac{q}{q+1}\right)^n \binom{n}{\frac{n}{q+1}\Delta} q^{-\frac{n}{q+1}\Delta} = \varepsilon_\Delta^n\, O(\sqrt{n}), \text{ где} \qquad (4)$$

$$\varepsilon_\Delta = q\,\Delta^{-\frac{\Delta}{q+1}}\,(q+1-\Delta)^{-\frac{q+1-\Delta}{q+1}}\;q^{-\frac{\Delta}{q+1}}. \qquad (5)$$

Поскольку $0<\Delta<1$ и $q\geq 1$, имеем $\varepsilon_\Delta>0$. Рассмотрим функции

$$f(x) = x^{\frac{x}{q+1}}\,(q+1-x)^{\frac{q+1-x}{q+1}}\;q^{\frac{x}{q+1}} \text{ и } g(x) = \ln f(x)$$

на интервале $(0,q+1)$. Поскольку

$$g'(x) = \frac{1}{q+1}\ln\frac{qx}{q+1-x} < 0$$

на $(0,1]$ и $g'(1)=0$, функция $f(x)$ строго убывает на $(0,1]$. Следовательно, справедливо соотношение $f(\Delta)>f(1)=q$. Теперь, используя (5), получаем $\varepsilon_\Delta = \frac{q}{f(\Delta)} < 1$.

Далее, в силу неравенства $p(n)-1 \leq \frac{n}{q+1}\Delta \leq \frac{n}{2}$ по теореме 3 имеем

$$\binom{n}{p(n)-1} \leq \binom{n}{\frac{n}{q+1}\Delta}. \qquad (6)$$

Теперь, используя соотношения $p(n)-1 \leq \lfloor\frac{n+1}{q+1}\rfloor$, $\lfloor x\rfloor \geq x-1$, (4), (6) и лемму 2, при $n\to\infty$ заключаем

$$\begin{aligned}\left(\frac{q}{q+1}\right)^n \sum_{s=0}^{p(n)-1}\binom{n}{s}q^{-s} &\leq p(n)\Big(\frac{q}{q+1}\Big)^n \binom{n}{p(n)-1} q^{-(p(n)-1)}\\ &= \Big(\frac{q}{q+1}\Big)^n \binom{n}{\frac{n}{q+1}\Delta} q^{-\frac{n}{q+1}\Delta}\,O(n)\\ &= \varepsilon_\Delta^n\,O(\sqrt{n}).\end{aligned}$$

□

Замечание 1. *Утверждение леммы* 3 *не выполняется при* $\Delta=1$.

Действительно, пусть $\Delta=1$. Сначала рассмотрим случай $q\geq 2$. Используя теорему 3 и неравенство $\frac{n}{q+1}\leq p(n)\lesssim\frac{n}{2}$, получаем

$$\begin{aligned}\binom{n}{p(n)-1} &= \binom{n}{p(n)}\frac{p(n)}{n-p(n)+1}\\ &= \binom{n}{\frac{n}{q+1}}\frac{\lfloor\frac{n}{q+1}\rfloor+1}{n-\lfloor\frac{n}{q+1}}\;\Omega(1) \qquad (7)\\ &= \binom{n}{\frac{n}{q+1}}\frac{\Omega(n)}{nq+q+1}.\end{aligned}$$

Из асимптотического равенства (3) имеем

$$\binom{n}{\frac{n}{q+1}} = \frac{(q+1)^n}{\sqrt{n}}\ q^{-\frac{q}{q+1}n}\,\Omega(1). \tag{8}$$

Теперь из (8) нетрудно заметить, что

$$\begin{aligned} \Big(\frac{q}{q+1}\Big)^n \sum_{s=0}^{p(n)-1}\binom{n}{s}q^{-s} &= \Big(\frac{q}{q+1}\Big)^n \binom{n}{p(n)-1}q^{-(p(n)-1)}\,\Omega(1) \\ &= \Big(\frac{q}{q+1}\Big)^n \frac{(q+1)^n}{\sqrt{n}}\ q^{-\frac{q}{q+1}n}\,q^{-\frac{n}{q+1}}\,\frac{\Omega(n)}{nq+q+1} \\ &= \frac{\Omega(\sqrt{n})}{nq+q+1}. \end{aligned}$$

Следовательно, если утверждение леммы 3 выполняется, то $(nq+q+1)\,\varepsilon_\Delta^n = \Omega(1)$ и приходим к противоречию.

Теперь разберем случай $q=1$. Известно, что

$$\binom{n}{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \sim \frac{2^n}{\sqrt{\pi n/2}}$$

(см., например, [19]). Поэтому

$$2^{-n}\sum_{s=0}^{p(n)-1}\binom{n}{s} = 2^{-n}\binom{n}{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}\,\Omega(1) = \frac{\Omega(1)}{\sqrt{n}}$$

и аналогично, как в случае $q \geq 2$, приходим к противоречию.

Следствие 2. *Пусть $p(n) = \lfloor\frac{n}{q+1}\Delta\rfloor + 1$, где целое число $q \geq 1$ и $0<\Delta<1$ не зависят от n. Тогда существует ε_Δ такое, что $0<\varepsilon_\Delta<1$, ε_Δ не зависит от n и при $n\to\infty$*

$$\sum_{i=1}^{q}\Big(\frac{i}{i+1}\Big)^n \sum_{s=0}^{p(n)-1}\binom{n}{s}i^{-s} = \Big(\frac{q+\varepsilon_\Delta}{q+1}\Big)^n O(\sqrt{n}).$$

Доказательство. Поскольку $p(n) \leq \lfloor\frac{n}{i+1}\Delta\rfloor+1$ для любого $i \leq q$, в силу леммы 3 существует ε такое, что $0<\varepsilon<1$, ε не зависит от n и при $n\to\infty$

$$\sum_{i=1}^{q}\Big(\frac{i}{i+1}\Big)^n \sum_{s=0}^{p(n)-1}\binom{n}{s}i^{-s} \leq \sum_{i=1}^{q}\Big(\frac{i}{i+1}\Big)^n \sum_{s=0}^{\lfloor\frac{n}{i+1}\Delta\rfloor}\binom{n}{s}i^{-s} = \varepsilon^n\,O(\sqrt{n}).$$

Можно считать, что $\frac{q}{q+1} < \varepsilon < 1$. Остается заметить, что $\varepsilon_\Delta = \varepsilon(q+1)-q$ будет искомым. $\square$

3. Класс графов $\mathcal{F}_{n,k,p(n)}$

В этом разделе рассматривается более общий случай класса графов $\mathcal{F}_{n,k,p}$ (построенного в [8] для любых $k\geq 3$ и $p\geq 1$), когда $p=p(n)$ есть функция, зависящая от n и принимающая целые положительные значения. Оценим число графов класса $\mathcal{F}_{n,k,p(n)}$ для выделенного в этом разделе класса функций $p(n)$. Далее будем использовать полученные в [5,8] оценки числа графов следующих подклассов помеченных n-вершинных графов. Пусть x, y, u, v — различные элементы V, $p \geq 1$, $0 \leq s < p$ и

$$a_n = |\mathcal{A}_n(x, y)|, \text{ где } \mathcal{A}_n(x, y) = \{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \emptyset\},$$

$$\mathcal{B}_n(x, y, u, v; s) = \{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \varnothing \text{ и } |S_1^G(u) \cap S_1^G(v)| = s\},$$

$$\mathcal{C}_n(x, y, u; s) = \{G \in \mathcal{J}_n \mid B_1^G(x) \cap B_1^G(y) = \varnothing \text{ и } |S_1^G(x) \cap S_1^G(u)| = s\},$$

$$\beta_{n,p} = |\mathcal{B}_{n,p}(x, y, u, v)|, \text{ где } \mathcal{B}_{n,p}(x, y, u, v) = \bigcup_{0 \leq s < p} \mathcal{B}_n(x, y, u, v; s),$$

$$\gamma_{n,p} = |\mathcal{C}_{n,p}(x, y, u)|, \text{ где } \mathcal{C}_{n,p}(x, y, u) = \bigcup_{0 \leq s < p} \mathcal{C}_n(x, y, u; s).$$

Лемма 4 [5, 8]**.** *Пусть x, y, u, v — различные элементы V и $p \geq 1$. Тогда для любого $n \geq p$ выполняются следующие соотношения*

(i) $a_n = 2^{\binom{n}{2}} \frac{8}{9} \left(\frac{3}{4}\right)^n$;

(ii) $\beta_{n,p} \leq a_n b_p(n) \left(\frac{3}{4}\right)^n$, *где* $b_p(n) = 128 \sum_{s=0}^{p-1} \binom{n}{s} 3^{-(3+s)}$;

(iii) $\gamma_{n,p} \leq a_n c_p(n) \left(\frac{5}{6}\right)^n$, *где* $c_p(n) = 72 \sum_{s=0}^{p-1} \binom{n}{s} 5^{-(1+s)}$.

Лемма 5 [8]**.** *Пусть x, y — различные вершины из V и $p \geq 1$, $\lambda > 0$, $0 < \varepsilon < 1$ — произвольные константы, не зависящие от n. Тогда*

$$|\mathcal{F}_{n,3,p}(x, y)| \gtrsim a_n \left(1 - \lambda \left(\frac{5 + \varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).$$

Следующая лемма распространяет лемму 5 о нижней оценке числа графов класса $\mathcal{F}_{n,3,p}(x, y)$, где p — фиксированное целое число, на случай $p = p(n)$ для рассматриваемого класса функций.

Лемма 6. *Пусть x, y — различные вершины из V, $p(n) = \lfloor \frac{n}{6} \Delta \rfloor + 1$ и $0 < \Delta < 1$, $\lambda > 0$ — произвольные константы, не зависящие от n. Тогда существует ε_Δ такое, что $0 < \varepsilon_\Delta < 1$, ε_Δ не зависит от n, и для любого ε, удовлетворяющего неравенству $\varepsilon_\Delta < \varepsilon < 1$, выполняется соотношение*

$$|\mathcal{F}_{n,3,p(n)}(x, y)| \gtrsim a_n \left(1 - \lambda \left(\frac{5 + \varepsilon}{6}\right)^{n-2}\right).$$

Доказательство. Используя лемму 4, следствие 2 и неравенство $n \gtrsim p(n)$, получаем существование ε_Δ такого, что $0 < \varepsilon_\Delta < 1$, ε_Δ не зависит от n, и для любого ε, удовлетворяющего неравенству $\varepsilon_\Delta < \varepsilon < 1$, при $n \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned} n^2 \beta_{n,p(n)} + 2n\gamma_{n,p(n)} &= a_n O(n^2) \left(\left(\frac{3}{4}\right)^n b_{p(n)}(n) + \left(\frac{5}{6}\right)^n c_{p(n)}(n) \right) \\ &= a_n O(n^2) \sum_{i=1}^{5} \left(\frac{i}{i+1}\right)^n \sum_{s=0}^{p(n)-1} \binom{n}{s} i^{-s} \\ &= a_n \left(\frac{5 + \varepsilon_\Delta}{6}\right)^n O(n^{\frac{5}{2}}) \\ &\lesssim a_n \frac{\lambda}{2} \left(\frac{5 + \varepsilon}{6}\right)^{n-2}. \end{aligned}$$

Нетрудно понять, что для любого n выполняется следующее включение (см. аналогично доказательство леммы 4 и соотношение (2) в [8]):

$$\mathcal{F}_{n,3,1}(x,y)\setminus(\mathcal{B}_{n,p(n)}(x,y)\cup\mathcal{C}_{n,p(n)}(x,y)\cup\mathcal{C}_{n,p(n)}(y,x))\subseteq\mathcal{F}_{n,3,p(n)}(x,y),\ \text{где}$$

$$\mathcal{B}_{n,p(n)}(x,y)=\bigcup_{\substack{u,v\in V\setminus\{x,y\}\\ u\neq v}}\mathcal{B}_{n,p(n)}(x,y,u,v),$$

$$\mathcal{C}_{n,p(n)}(x,y)=\bigcup_{u\in V\setminus\{x,y\}}\mathcal{C}_{n,p(n)}(x,y,u).$$

Таким образом, учитывая лемму 5, заключаем

$$\begin{aligned}|\mathcal{F}_{n,3,p(n)}| &\gtrsim |\mathcal{F}_{n,3,1}(x,y)|-n^2|\mathcal{B}_{n,p(n)}(x,y,u,v)|-2n|\mathcal{C}_{n,p(n)}(x,y,u)|\\ &\gtrsim |\mathcal{F}_{n,3,1}(x,y)|-a_n\frac{\lambda}{2}\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\\ &\gtrsim a_n\Big(1-\frac{\lambda}{2}\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}\Big)-a_n\frac{\lambda}{2}\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-2}.\end{aligned}$$

□

Замечание 2. *В лемме* 6 *значение* ε_Δ *зависит только от* Δ.

Далее для произвольного Δ, $0<\Delta<1$, обозначение ε_Δ будем использовать для константы, найденной в лемме 6.

Лемма 7 (нижняя оценка $|\mathcal{F}_{n,k,p(n)}|$). *Пусть* $k\geq 3$, $0<\Delta<1$, $\varepsilon_\Delta<\varepsilon<1$, $p(n)=\left\lfloor\frac{n}{6}\Delta\right\rfloor+1$ *и* k, Δ, ε *не зависят от* n. *Тогда существует такая константа* $c>0$, *не зависящая от* n *и* k, *что для любого* $n\in\mathbb{N}$ *выполняется неравенство*

$$|\mathcal{F}_{n,k,p(n)}|\geq 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\Big(1-c\left(\frac{5+\varepsilon}{6}\right)^{n-k+1}\Big).$$

Доказательство. Проводится аналогично, с учетом лемм 1, 4(i) и леммы 6 при $\lambda=1$, доказательству нижней оценки $|\mathcal{F}_{n,k,p}|$ для фиксированного p (см. лемму 8 в [8]). □

Теорема 4 (асимптотика $|\mathcal{F}_{n,k,p(n)}|$). *Пусть* $k\geq 3$, $0<\Delta<1$, $\varepsilon_\Delta<\varepsilon<1$, $p(n)=\left\lfloor\frac{n}{6}\Delta\right\rfloor+1$ *и* k, Δ, ε *не зависят от* n. *Тогда существует такая константа* $c>0$, *не зависящая от* n, *что для любого* $n\in\mathbb{N}$ *справедливы неравенства*

$$2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\Big(1-c\Big(\tfrac{5+\varepsilon}{6}\Big)^{n-k+1}\Big)\leq|\mathcal{F}_{n,k,p(n)}|\leq|\mathcal{J}_{n,\,d=k}|$$
$$\leq|\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}|\leq|\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}|\leq 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}\Big(1+c\Big(\tfrac{5+\varepsilon}{6}\Big)^{n-k+1}\Big).$$

Доказательство. Непосредственно вытекает из леммы 7, теоремы 1 и включения $\mathcal{F}_{n,k,p(n)}\subseteq\mathcal{F}_{n,k,1}$. □

Следствие 3. *Пусть* $k\geq 3$, $0<\Delta<1$ *не зависят от* n *и* $p(n)=\left\lfloor\frac{n}{6}\Delta\right\rfloor+1$. *Тогда при* $n\to\infty$

$$|\mathcal{F}_{n,k,p(n)}|\sim|\mathcal{J}_{n,\,d=k}|\sim|\mathcal{J}_{n,\,d\geq k}|\sim|\mathcal{J}^*_{n,\,d\geq k}|\sim 2^{\binom{n}{2}}\xi_{n,k}.$$

Непосредственно из определения класса $\mathcal{F}_{n,k,p(n)}$ и следствия 3 вытекает следующее утверждение.

Следствие 4. *Пусть $k \geq 3$, $0 < \Delta < 1$ не зависят от n. Тогда почти все n-вершинные графы диаметра k содержат такую диаметральную цепь, что окружения любых двух вершин из множества вне этой цепи имеют не менее $\left\lfloor \frac{n}{6}\Delta \right\rfloor + 1$ общих вершин.*

4. Спектр центра почти всех графов из $\mathcal{J}_{n,\, d=k}$

Установим оценки числа центральных вершин почти всех n-вершинных графов G фиксированного диаметра k, зависящие от n, которые дадут логарифмическую асимптотику этого числа $|\mathbb{C}(G)|$. Сначала обратимся к спектру центра графов класса $\mathcal{F}_{n,k,p(n)}$.

Теорема 5 (спектр $\mathbb{S}p_c(\mathcal{F}_{n,k,p(n)})$). *Пусть $k \geq 3$ и $p = p(n)$ есть функция, зависящая от n и принимающая целые положительные значения. Тогда для любого $n \geq 2p(n) + k + 4$ выполняются равенства*

(i) $\mathbb{S}p_c(\mathcal{F}_{n,k=3,p(n)}) = \{n-2\}$;

(ii) $\mathbb{S}p_c(\mathcal{F}_{n,k=4,p(n)}) = \big[\big[\, 1 + p(n),\, n - 5 - p(n) \,\big]\big]$;

(iii) $\mathbb{S}p_c(\mathcal{F}_{n,k=5,p(n)}) = \big[\big[\, 2 + p(n),\, n - 5 - p(n) \,\big]\big] \cup \{n-4\}$;

(iv) $\mathbb{S}p_c(\mathcal{F}_{n,k,p(n)}) = \{1\} \cup \big[\big[\, 1 + p(n),\, n - k - 1 - p(n) \,\big]\big]$ *при четном* $k \geq 6$;

(v) $\mathbb{S}p_c(\mathcal{F}_{n,k,p(n)}) = \{2\} \cup \big[\big[\, 2 + p(n),\, n - k - p(n) \,\big]\big] \cup \{n-k+1\}$ *при нечетном* $k \geq 7$.

Доказательство. Вытекает из описания спектра центра $\mathbb{S}p_c(\mathcal{F}_{n,k,p})$ для фиксированных целочисленных значений $k \geq 3$ и $p \geq 1$ (теорема 5 [9]). $\square$

Теорема 6 (спектр центра почти всех графов из $\mathcal{J}_{n,\, d=k}$). *Пусть $k \geq 1$ и $0 < \Delta < 1$ не зависят от n. Тогда*

(i) $|\mathbb{C}(G)| = n$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* $k = 1, 2$;

(ii) $|\mathbb{C}(G)| = n - 2$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 3;

(iii) $|\mathbb{C}(G)| \in \big[\big[\, 2 + \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor,\, n - \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor - 6 \,\big]\big]$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 4;

(iv) $|\mathbb{C}(G)| \in \big[\big[\, 3 + \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor,\, n - \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor - 6 \,\big]\big] \cup \{n-4\}$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 5, *при этом доля таких графов с $(n-4)$-вершинным центром асимптотически равна* $\frac{1}{3}$;

(v) $|\mathbb{C}(G)| \in \{1\} \cup \big[\big[\, 2 + \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor,\, n - \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor - k - 2 \,\big]\big]$ *для почти всех n-вершинных графов G четного фиксированного диаметра $k \geq 6$, при этом доля таких графов с тривиальным центром асимптотически равна $\frac{k-4}{k-2}$;*

(vi) $|\mathbb{C}(G)| \in \{2\} \cup \big[\big[\, 3 + \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor,\, n - \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor - k - 1 \,\big]\big] \cup \{n-k+1\}$ *для почти всех n-вершинных графов G нечетного фиксированного диаметра $k \geq 7$, при этом доля таких графов с 2-вершинным и $(n-k+1)$-вершинным центром асимптотически равна $\frac{k-5}{k-2}$ и $\frac{1}{k-2}$ соответственно.*

Доказательство. Случаи $k = 1, 2, 3$ рассмотрены в теореме 2. Пусть теперь $k \geq 4$ и $p(n) = \frac{n}{6}\Delta + 1$. Тогда $n \gtrsim 2p(n) + k + 4$.

Рассмотрим, например, случай $k = 4$. По теореме 5 для всех достаточно больших n имеем $\mathbb{S}p_c(\mathcal{F}_{n,k=4,p(n)}) = \big[\big[\, 1 + p(n),\, n - 5 - p(n) \,\big]\big]$. Поэтому, учитывая следствие 3, при $n \to \infty$ получаем

$$\frac{|\{G \in \mathcal{J}_{n,\, d=4} \mid |\mathbb{C}(G)| \in \big[\big[\, 1 + p(n),\, n - 5 - p(n) \,\big]\big]\}|}{|\mathcal{J}_{n,\, d=4}|} \geq \frac{|\mathcal{F}_{n,k=4,p(n)}|}{|\mathcal{J}_{n,\, d=4}|} \longrightarrow 1.$$

Аналогично из следствия 3 и теоремы 5 получаем возможные значения мощности центра почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра $k \geq 4$ для всех остальных указанных случаев (iv)-(vi). Асимптотическое значение соответствующих долей графов установлено в теореме 2. □

Из теоремы 6 вытекает ряд свойств центров почти всех графов фиксированного диаметра k. Например, почти нет графов диаметра $k = 2, 4$ и нечётного диаметра k с тривиальным центром, причём для любого чётного $k \geq 6$ это не так. Аналогично почти нет графов диаметра $k = 1, 3, 5$ и чётного диаметра k с 2-вершинным центром, однако для любого нечётного $k \geq 7$ это не так. Неожиданным оказывается скачок мощности центра за пределы интервала из последовательных целых значений как сверху от $n - \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor - k - 1$ до $n - k + 1$ для нечётного $k \geq 5$, так и снизу от $2 + \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor$ до 1 для чётного $k \geq 6$ и от $3 + \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor$ до 2 для нечётного $k \geq 7$.

Теорема 6 также позволяет найти логарифмическую асимптотику числа центральных вершин почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра.

Следствие 5 (логарифмическая асимптотика)**.** *Пусть k — целое положительное число. Справедливо асимптотическое равенство* $\log_2 |\mathbb{C}(G)| \sim \log_2(n)$ *для почти всех n-вершинных графов G каждого из следующих классов: графы фиксированного диаметра $k \leq 5$; графы чётного фиксированного диаметра $k \geq 6$ с нетривиальным центром; графы нечётного фиксированного диаметра $k \geq 7$, мощность центра которых не равна* 2.

Доказательство. Пусть $k \geq 6$ и $0 < \Delta < 1$ — фиксированная константа. В силу утверждений (v),(vi) теоремы 6 и утверждения (vi) предложения 1 для почти всех n-вершинных графов G чётного фиксированного диаметра $k \geq 6$ с нетривиальным центром имеем $|\mathbb{C}(G)| \in \big[\big[2 + \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor, n - \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor - k - 2 \big]\big]$ и для почти всех n-вершинных графов G нечётного фиксированного диаметра $k \geq 7$, мощность центра которых не равна 2, получаем $|\mathbb{C}(G)| \in \big[\big[3 + \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor, n - \lfloor \frac{n}{6}\Delta \rfloor - k - 1 \big]\big] \cup \{n - k + 1\}$. Остается заметить, что если $P(n)$ — полином над $\mathbb{R}$ ненулевой степени m с положительным старшим коэффициентом, то $\log_2 P(n) \sim m \log_2 n$ при $n \to$.

Случай $k \leq 5$ рассматривается аналогично с использованием утверждений (i)-(iv) теоремы 6. □

Замечание 3. *Доля n-вершинных графов фиксированного чётного диаметра $k \geq 6$ с тривиальным центром (нечётного диаметра $k \geq 7$ с 2-вершинным центром) асимптотически равна $\frac{k-4}{k-2}$ $(\frac{k-5}{k-2})$. При этом типичные графы этих классов построены в* [9].

Таким образом, для почти всех n-вершинных графов фиксированного диаметра логарифмическая асимптотика числа центральных вершин есть 0, 1 или $\log_2 n$ (для соответствующих подклассов графов).

Из теоремы 6 также вытекают оценки центрального соотношения $\mathbb{R}_c(G)$ для почти всех n-вершинных графов G фиксированного диаметра k.

Следствие 6 (оценки $\mathbb{R}_c(G)$)**.** *Пусть $k \geq 1$ и $0 < \Delta < 1$ не зависят от n. Тогда*

(i) $\mathbb{R}_c(G) = 1$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* $k = 1, 2$;

(ii) $\mathbb{R}_c(G) = 1 - 2/n$ *для почти всех n-вершинных графов G диаметра* 3;

(iii) $\frac{\Delta}{6} + r_1(n) \leq \mathbb{R}_c(G) \leq 1 - \frac{\Delta}{6} - r_2(n)$ *для почти всех n-вершинных графов G каждого из следующих классов*: *графы диаметра* 4; *графы диаметра* 5, *мощность центра которых не равна* $n-4$; *графы чётного фиксированного диаметра* $k \geq 6$ *с нетривиальным центром*; *графы нечётного фиксированного диаметра* $k \geq 7$, *мощность центра которых не равна* 2 *и* $n-k+1$. *Здесь* $r_1(n)$, $r_1(n)$ — *положительные функции и* $r_1(n) = o(n)$, $r_2(n) = o(n)$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Аналогично доказательству следствия 5 с использованием теоремы 6, предложения 1 и неравенства $\lfloor x \rfloor \geq x - 1$. □

Замечание 4. *Доля n-вершинных графов фиксированного чётного диаметра $k \geq 6$ с тривиальным центром* (*нечётного диаметра $k \geq 5$ с* 2*-вершинным и* $(n-k+1)$*-вершинным центром*) *асимптотически равна* $\frac{k-4}{k-2}$ ($\frac{k-5}{k-2}$ *и* $\frac{1}{k-2}$ *соответственно*). *При этом типичные графы этих классов построены в* [9].

Отметим, что из следствия 6 также находятся возможные значения центрального отношения $\mathbb{R}_c(G)$ и для почти всех графов G всего класса $\mathcal{J}_{n,\, d=k}$.

Полученные свойства центров также справедливы в силу следствия 3 и для графов классов $\mathcal{J}_{n,\, d\geq k}$ и $\mathcal{J}^*_{n,\, d\geq k}$.

Следствие 7. *Для любого фиксированного $k \geq 2$ почти все n-вершинные графы каждого из следующих классов $\mathcal{J}_{n,\, d\geq k}$, $\mathcal{J}^*_{n,\, d\geq k}$ связны, имеют диаметр k и для центра выполняются свойства, сформулированные в теореме* 6 *и её следствиях.*

References

[1] F. Buckley, Z. Miller, P.J. Slater, *On graphs containing a given graph as a center*, J. Graph Theory, **5** (1981), 427–434. DOI.org/10.1002/jgt.3190050413 Zbl 0449.05056

[2] F. Buckley, *The central ratio of a graph*, Discrete Mathematics, Volume **38**, Issue 1, January 1982, Pages 17–21. DOI.org/10.1016/0012-365X(82)90164-9 Zbl 0469.05057

[3] F. Buckley, F. Harary, *Distance In Graphs*, Addison-Wesley Publishing Company, Redwood City, 1990. Zbl 0688.05017

[4] V.A. Emelichev, O.I. Melnikov, V.I. Sarvanov, and R.I. Tyshkevich, *Lectures on Graph Theory*, B.I.Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994. Zbl 0865.05001

[5] T.I. Fedoryaeva, *The diversity vector of balls of a typical graph of small diameter*, Diskretn. Anal. Issled. Oper., **22**:6 (2015), 43–54. DOI 10.17377/daio.2015.22.512 Zbl 1349.05085

[6] T.I. Fedoryaeva, *Structure of the diversity vector of balls of a typical graph with given diameter*, Siber. Electr. Math. Reports, **13** (2016), 375–387. DOI 10.17377/semi.2016.13.033 Zbl 1341.05051

[7] T.I. Fedoryaeva *Asymptotic approximation for the number of n-vertex graphs of given diameter*, J.Appl.Ind.Math., **11**:2 (2017), 204–214 translated from Diskretn. Anal. Issled. Oper., **24**:2 (2017), 68–86. DOI 10.1134/S1990478917020065 Zbl 1399.05108

[8] T.I. Fedoryaeva, *On radius and typical properties of n-vertex graphs of given diameter*, Siber. Electr. Math. Reports, **18** (2021), 345—357. DOI 10.33048/semi.2021.18.024 Zbl 07333491

[9] T.I. Fedoryaeva, *Center and its spectrum of almost all n-vertex graphs of given diameter*, Siber. Electr. Math. Reports, **18** (2021), 511—529. DOI 10.33048/semi.2021.18.037 Zbl 07360164

[10] T.I. Fedoryaeva, *On binomial coefficients of real arguments*, Siber. Electr. Math. Reports, to appear.

[11] G.M. Fikhtengol'ts, *Course of Differential and Integral Calculus Volume 2*, Fizmatlit, Moscow, 2003. ISBN 5-9221-0157-9

[12] D. Fowler, *The Binomial Coefficient Function*, The American Mathematical Monthly, Vol. **103**, No. 1 (Jan., 1996), pp. 1–17, DOI.org/10.2307/2975209 Zbl 0857.05003

[13] R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik, *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 1994. Zbl 0836.00001

[14] F. Harary, *Graph Theory*, Addison–Wesley, Mass. etc., 1969. Zbl 0182.57702 0182.57702

[15] Yanan Hu, Xingzhi Zhan, *Possible cardinalities of the center of a graph*, arXiv:2009.05925 [math.CO], (2020).

[16] G.N. Kopylov, E.A. Timofeev, *Centers and radii of graphs*, Uspekhi Mat. Nauk, **32**:6(198) (1977), 226. Zbl 0399.05042

[17] A.M. Rappoport, *Metric characteristics in the communication networks*, Proceedings of ISA RAN, **14** (2005), 141–147. http://www.isa.ru/proceedings/images/documents/2005-14/141-147.pdf

[18] Wasserman, Stanley; Faust, Katherine *Social network analysis: methods and applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Zbl 0926.91066

[19] S.V. Yablonskij, *Introduction to discrete mathematics*, Nauka, Moscow, 1986. Zbl 0663.94002

Tatiana Ivanovna Fedoryaeva

Sobolev Institute of Mathematics,
pr. Koptyuga, 4,
630090, Novosibirsk, Russia
E-mail address: `fti@math.nsc.ru`