S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 517.955.8

DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 35C20

ВОЛНОВОЕ УРАВНЕНИЕ С НЕИЗВЕСТНЫМ ВЫСОКОЧАСТОТНЫМ ИСТОЧНИКОМ И АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ О ЕГО ВОССТАНОВЛЕНИИ

Э.В. Кораблина, В.Б. Левенштам

Abstract. We consider The Cauchy problem for the one-dimensional hyperbolic equation with an unknown right hand side, that rapidly oscillates in time. This right hand side is the product of two functions, with one being a function of a time variable and a space variable and the other one being a function of a time variable and a so-called fast time variable. We formulate and solve four asymptotic problems of exact reconstruction of the source from certain information about the partial asymptotics of the solution.

Keywords: wave equation with high-frequency source, Cauchy problem, asymptotics of a solution, reconstruction of source.

Введение

В работе поставлены и решены асимптотические задачи о точном восстановлении неизвестного высокочастотного источника одномерного волнового уравнения в случае задачи Коши по частичной асимптотике решения соответствующей длины.

Для различных эволюционных уравнений многочисленные задачи об определении источника без предположения о его высокочастотности исследованы в теории коэффициентных обратных задач. Познакомиться с этой теорией можно, например, по монографиям [1,2]. Ключевую роль в постановке задач там играет дополнительное условие, называемое ещё условием переопределения, в котором фигурирует точное решение прямой задачи. В задачах о восстановлении высокочастотного источника также требуется дополнительное условие,

Основной результат работы (теоремы 4 и 5) получены при поддержке гранта РНФ (проект №20-11-20141).

но в нём фигурирует лишь частичная асимптотика решения соответствующей длины (см.[3-5]).

Уравнения с высокочастотными данными нередко используются при моделировании физических процессов, подверженных воздействию высокочастотных силовых полей (см., например, [6-8]). Отсюда следует актуальность задач теории возмущений о восстановлении входных данных высокочастотных уравнений по определённым сведениям о частичных асимптотиках решения.

В данной работе продолжены исследования, начатые в работе [5], в которой рассмотрена одномерная задача Коши для волнового уравнения с правой частью $f(x,t)r(t,\omega t), \omega >> 1$, где $x-$ пространственная и $t-$временная переменная, а $r(t,\tau)$ $-$ $2\pi-$периодическая по τ функция. В [5] функция f задана, а $r-$ неизвестна. Там сформулирована и решена задача о восстановлении r. В данной работе рассмотрены четыре асимптотические задачи об определении правой части вида $f(x)r(t,\omega t), \omega >> 1$, одномерного волнового уравнения в случаях: 1) f задана и может, как и в [5], дополнительно зависеть от t, а $r-$ неизвестна (условия гладкости правой части здесь слабее, нежели в [5]); 2) $r-$известна, а $f-$неизвестна; 3) в паре f, r известно лишь среднее r_0 функции r по второй переменной на периоде; 4) в паре f, r, как и в задаче 3), известно лишь среднее r_0 функции r, но класс функций f здесь существенно иной. В каждом из этих случаев поставлены и решены задачи о восстановлении неизвестных функций.

Работа разбита на четыре параграфа, посвященные соответственно четырем указанным задачам. В случае начально-краевой задачи для одномерного волнового уравнения аналогичные четыре задачи с помощью метода Фурье исследовались в [3].

Практически все результаты данной статьи анонсированы в заметке [9]. Основные результаты работы (теоремы 4 и 5) получы при поддержке гранта РНФ (проект №20-11-20141).

§1. Задача 1. Неизвестный сомножитель источника зависит от временной переменной

1. Построение асиптотики

Пусть $T>0, \Pi=\{(x,t): x\in R, t\in[0,T]\}$, $Q=\{(t,\tau): t\in[0;T], \tau\in[0,\infty)\}$, $\Omega=\{(x,t,\tau): (x,t)\in\Pi, \tau\in[0;\infty)\}$. В полосе Π рассмотрим задачу Коши с большим параметром ω вида:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t)-u_{xx}(x,t)=f(x,t,\omega t)\\ u(x,t)|_{t=0}=0\\ u_t(x,t)|_{t=0}=0, \end{cases} \tag{1}$$

где функция $f(x,t,\tau)$ определена и непрерывна на множестве Ω. Символом $F(x,t)$ обозначим среднее функции $f(x,t,\tau)$ по τ:

$$F(x,t)=< f(x,t,\tau)>_\tau\equiv\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x,t,\tau)d\tau.$$

Пусть $F(x,t), F_x(x,t)\in C^0(\Pi)$, где $C^0(\Pi)-$линеал, состоящий из непрерывных (вообще говоря, неограниченнных) в полосе Π функций. Введём в рассмотрение функцию $\phi(x,t,\tau)=f(x,t,\tau)-F(x,t)$ и будем предполагать, что выполнены следующие условия: $\phi_{x^it^j}\ (x,t,\tau)\in C^0(\Omega), 0\le i+j\le 3$, $\phi_{x^3t}\ (x,t)\in C^0(\Omega), \phi_{xt^3}\ (x,t)\in C^0(\Omega)$. Здесь $C^0(\Omega)-$линеал, аналогичный $C^0(\Pi)$.

Все рассматриваемые в работе функции считаются вещественными, а решения всех рассматриваемых уравнений$-$классическими.

Пусть $u_\omega(x,t)-$ решение задачи (1). Его трёхчленную асимптотику можно представить в виде суммы:

$$u_\omega^2(x,t)=u_0(x,t)+\frac{1}{\omega}u_1(x,t)+\frac{1}{\omega^2}(u_2(x,t)+v_2(x,t,\omega t)),$$

где функции $u_k(x,t), k=0,1,2,$ и $v_2(x,t,\tau)$ определены и непрерывны в Π и Ω соответственно, а также дважды непрерывно дифференцируемы по переменной x и по переменным (t,τ), причём, $v_2(x,t,\tau)$ $-$ $2\pi-$периодическая по τ с нулевым средним:

$$<v_2(x,t,\tau)>_\tau=0.$$

Для любого фиксированного положительного числа M определим прямоугольник $\Pi_M=\{(x,t):\mid x\mid\leq M, t\in[0,T]\}$.

Теорема 1. *Для каждого $M>0$ справедлива асимптотическая формула:*

$$\parallel u_\omega(x,t)-\overset{2}{u_\omega}(x,t)\parallel_{C(\Pi_M)}=o(\omega^{-2}),\omega\to\infty.$$

Proof. Решение задачи (1) представим в виде:

$$u_\omega(x,t)=u_\omega^2(x,t)+\frac{1}{\omega^3}v_3(x,t,\omega t)+W_\omega(x,t), \tag{2}$$

где $v_3(x,t,\tau)-2\pi-$периодическая по τ функция с нулевым средним. Подставим формально правую часть (2) в уравнения (1). В каждом из полученных равенств приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ω, а затем применим к полученным уравнениям операцию усреднения по $\tau,\tau=\omega t$. В результате придём к набору задач:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u_0(x,t)}{\partial x^2}=F(x,t)\\ u_0|_{t=0}=\frac{\partial u_0}{\partial t}\Big|_{t=0}=0,(x,t)\in\Pi;\end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2v_2(x,t,\tau)}{\partial\tau^2}=\phi(x,t,\tau)\\ v_2(x,t,\tau+2\pi)=v_2(x,t,\tau)\\ <v_2(x,t,\tau)>_\tau=0,(x,t,\tau)\in\Omega;\end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u_1(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u_1(x,t)}{\partial x^2}=0\\ u_1(x,t)|_{t=0}=0,\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial t}|_{t=0}=-\frac{\partial v_2(x,t,\tau)}{\partial\tau}|_{t,\tau=0},(x,t)\in\Pi;\end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2v_3(x,t,\tau)}{\partial\tau^2}=-2\frac{\partial^2v_2(x,t,\tau)}{\partial t\partial\tau}\\ v_3(x,t,\tau+2\pi)=v_3(x,t,\tau)\\ <v_3(x,t,\tau)>_\tau=0,(x,t,\tau)\in\Omega;\end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases}\frac{\partial^2u_2(x,t)}{\partial t^2}-\frac{\partial^2u_2(x,t)}{\partial x^2}=0\\ u_2(x,t)|_{t=0}=-v_2(x,t,\tau)|_{t,\tau=0}\\ \frac{\partial u_2(x,t)}{\partial t}|_{t=0}=-\frac{\partial v_2(x,t,\tau)}{\partial t}|_{t,\tau=0}-\frac{\partial v_3(x,t,\tau)}{\partial\tau}|_{t,\tau=0},(x,t)\in\Pi.\end{cases} \tag{7}$$

В силу равенств (2)-(7) имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W_\omega(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_\omega(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\omega^3}\Big[\frac{\partial^2 v_3(x,t,\tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_3(x,t,\tau)}{\partial x^2}\Big] - \frac{1}{\omega^2}\Big[\frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3(x,t,\tau)}{\partial t \partial \tau}\Big] \\ W_\omega|_{t=0} = -\frac{1}{\omega^3} v_3(x,0,0) \\ \frac{\partial W_\omega}{\partial t}\Big|_{t=0} = -\frac{1}{\omega^3}\frac{\partial v_3(x,0,0)}{\partial t}, (x,t,\tau) \in \Omega, \tau = \omega t. \end{cases} \tag{8}$$

Согласно формуле Даламбера решение задачи (8) имеет вид

$$W_\omega = -\frac{1}{2\omega^3}\Big[v_3(x-t,0,0) + v_3(x+t,0,0) + \int_{x-t}^{x+t}\frac{\partial v_3(\xi,0,0)}{\partial t}d\xi\Big] +$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \Big\{\Big[-\frac{1}{\omega^3}\Big[\frac{\partial^2 v_3(\xi,s,\omega s)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_3(\xi,s,\omega s)}{\partial x^2}\Big] -$$
$$-\frac{1}{\omega^2}\Big[\frac{\partial^2 v_2(\xi,s,\omega s)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 v_2(\xi,s,\omega s)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_3(\xi,s,\omega s)}{\partial t\partial\tau}\Big]\Big\}d\xi. \tag{9}$$

Для доказательства теоремы 1 достаточно, очевидно, установить асимптотическую формулу:

$$||W_\omega||_{C(\Pi_M)} = o(\omega^{-2}), \omega \to \infty. \tag{10}$$

Введём обозначение:

$$\psi(x,t,z) = \int_0^z \phi(x,t,s)ds - < \int_0^z \phi(x,t,s)ds >_z .$$

Тогда в силу (4)

$$\frac{\partial v_2(x,t,\tau)}{\partial \tau} = \psi(x,t,\tau),$$
$$\frac{\partial^2 v_2(x,t,\tau)}{\partial t\partial \tau} = \psi_t(x,t,\tau),$$

так что согласно (6)

$$v_3(x,t,\tau) = -2\Big(\int_0^\tau \Big[\int_0^z \psi_t(x,t,s)ds - \Big\langle\int_0^z \psi_t(x,t,s)ds\Big\rangle_z\Big]dz -$$
$$-\Big\langle\int_0^\tau \Big[\int_0^z \psi_t(x,t,s)ds - \Big\langle\int_0^z \psi_t(x,t,s)ds\Big\rangle_z\Big]dz\Big\rangle_\tau\Big).$$

Далее воспользуемся следующей простейшей леммой.

Лемма 1. *Пусть функция $p(z,s,\tau)$ определена и непрерывна на множестве $(z,s,\tau) \in [a,b]\times[c,d]\times R_+$, где $a,b,c,d \in R$, и $2\pi-$периодична по τ с нулевым средним: $< p(z,s,\tau) >_\tau = 0$. Тогда равномерно относительно $z \in [a,b]$*

$$\int_a^b p(z,s,\omega s)ds \to 0, \omega \to \infty.$$

В силу леммы 1 и непрерывности $2\pi-$периодической функции $\psi_t(x,t,\tau)$

$$\int_0^t ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \psi_t(\xi,s,\omega s)d\xi \to 0 \text{ при } \omega \to \infty \tag{11}$$

равномерно относительно $|x| \le M, t \in [0,T]$.

Из соотношений (9),(11) вытекает асимптотическая формула (10). Теорема 1 доказана. $\square$

2. Асимптотическая задача 1

Пусть T, Π и Q–те же, что в предыдущем пункте. В полосе Π рассмотрим задачу Коши, которая является частным случаем задачи (1):

$$\begin{cases} u_{tt} - u_{xx} = f(x,t)r(t,\omega t) \\ u|_{t=0} = 0 \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases} \tag{12}$$

Пусть функция $f(x,t)$ определена и непрерывна в полосе Π вместе с производными $f_{x^i t^j}$, $0 \leq i+j \leq 3$, $f_{x^3 t}$ и f_{xt^3}, а функция $r(t,\tau), (t,\tau) \in Q$, непрерывна, $2\pi-$периодична по τ и удовлетворяет указанным ниже условиям гладкости. Символом $r_0(t), t \in [0;T]$, обозначим среднее функции $r(t,\tau)$ по τ:

$$r_0(t) \equiv < r(t,\tau) >_\tau .$$

Будем предполагать, что функция $r_1(t,\tau) = r(t,\tau) - r_0(t)$ непрерывна на Q вместе с производными по t вплоть до 3-го порядка.

Функцию r, удовлетворяющую указанным выше условиям, будем называть функцией класса (A). В данном пункте функция f считается известной, а $r-$неизвестной.

Для определения функции $r(t,\tau), (t,\tau) \in Q$, зададим следующие объекты: точку $x_0 \in R$, для которой $f(x_0,t) \neq 0$; дважды непрерывно дифференцируемую функцию $p_0(t), t \in [0;T]$, для которой $p_0(0) = p_0'(0) = 0$; непрерывную на Q функцию $\chi(t,\tau), 2\pi-$периодическую по τ с нулевым средним, обладающую производной $\chi''_{\tau^2}(t,\tau)$, которая непрерывна на Q вместе с производными по t вплоть до 3-го порядка. Введём ещё две функции

$$p_1(t) = u_1(x_0,t),$$

$$p_2(t) = u_2(x_0,t),$$

где $u_1(x,t), u_2(x,t)-$ решения задач (5), (7), в которых положено $v_2(x,t,\tau) = \frac{f(x,t)\chi(t,\tau)}{f(x_0,t)}$, а $v_3(x,t,\tau)-$решение задачи (6) при указанной $v_2(x,t,\tau)$.

Асимптотической задачей 1 назовём задачу о нахождении функции $r(t,\tau)$ класса (A), при которой решение $u_\omega(x,t)$ задачи (9) удовлетворяет условию:

$$\| u_\omega(x,t) - p_0(t) - \omega^{-1}p_1(t) - \omega^{-2}(p_2(t) + \chi(t,\omega t)) \|_{C([0,T])} = o(\omega^{-2}), \omega \to \infty. \tag{13}$$

Теорема 2. *Асимптотическая задача 1 имеет единственное решение в классе $2\pi-$ периодических по τ функций $r(t,\tau) \in C(Q)$ таких, что функции $r_1(t,\tau) = r(t,\tau) - < r(t,\tau) >$ трижды дифференцируемы по t, причем $r_{1t^i} \in C(Q), 0 \leq i \leq 3$.*

Proof. Из теоремы 1 следует, что при заданной функции $r(t,\tau)$ класса (A) задача (12) имеет единственное классическое решение, представимое в виде:

$$u_\omega(x,t) = u_0(x,t) + \frac{1}{\omega}u_1(x,t) + \frac{1}{\omega^2}(u_2(x,t) + v_2(x,t,\omega t)) + W_\omega(x,t), \tag{14}$$

где для любого фиксированного $M > 0$

$$||W_\omega(x,t)||_{C(\Pi_M)} = o(\omega^{-2}), \omega \to \infty. \tag{15}$$

Пусть функция $r(t,\tau)-$решение асимптотической задачи 1 и $u_\omega-$отвечающее ему решение задачи (12). В силу теоремы 1 (см. формулы (14), (15)) и (13) справедливо равномерное по $t \in [0, T]$ асимптотическое равенство:

$$u_0(x_0, t) + \frac{1}{\omega} u_1(x_0, t) + \frac{1}{\omega^2}(u_2(x_0, t) + v_2(x_0, t, \omega t)) =$$

$$= p_0(t) + \frac{1}{\omega} p_1(t) + \frac{1}{\omega^2}(p_2(t) + \chi(t, \omega t)) + o(\omega^{-2}). \tag{16}$$

Приравняем в нем коэффициенты при степенях $\omega^0, \omega^{-1}\omega^{-2}$. После этого с помощью операции усреднения по $\tau, \tau = \omega t$, получим равенства:

$$u_0(x_0, t) = p_0(t); \tag{17}$$

$$u_1(x_0, t) = p_1(t); \tag{18}$$

$$u_2(x_0, t) = p_2(t); \tag{19}$$

$$v_2(x_0, t, \tau) = \chi(t, \tau). \tag{20}$$

В силу (17) и того факта, что $u_0(x, t)$ выражается формулой Даламбера, находим

$$p_0(t) = \frac{1}{2} \int_0^t r_0(s) \int_{x_0-(t-s)}^{x_0+(t-s)} f(\xi, s) d\xi ds. \tag{21}$$

Продифференцировав (21) дважды по t, получим уравнение Вольтерра 2 рода:

$$p_0''(t) = r_0(t) f(x_0, t) + \frac{1}{2} \int_0^t r_0(s)[f_x'(x_0 + (t - s), s) - f_x'(x_0 - (t - s), s)]ds,$$

из которого следует существование и единственность непрерывного решения r_0. Теперь дважды продифференцировав (20) по τ и используя (4), получим равенство:

$$f(x_0, t) r_1(t, \tau) = \frac{\partial^2 \chi(t, \tau)}{\partial \tau^2}.$$

Таким образом, функция $r_1(t, \tau)$ также определяется единственным образом. С учётом наложенных на функции $p_0(t)$ и $\chi(t, \tau)$ условий, полученная функция $r(t, \tau) = r_0(t) + r_1(t, \tau)$, принадлежит классу (A).

Нетрудно показать, что при найденной функции $r(t, \tau)$ решение задачи Коши (12) удовлетворяет требуемой асимптотической формуле (13). Теорема 2 доказана. □

§2. Задача 2. Неизвестный сомножитель источника зависит от пространственной переменной

1. Построение асиптотики

Пусть T, Π и $\Omega-$те же объекты, что и в §1. В этом пункте продолжим рассматривать задачу Коши (1) с неизвестным источником.

Будем предполагать, что $f(x, t, \tau)-$вещественная функция, определённая и непрерывная вместе с производной $f_x^{'}(x, t, \tau)$ на множестве Ω, $2\pi-$периодическая по x и τ.

В полосе Π рассмотрим усреднённую задачу (3). Заметим, что если в правой части (3) стоит $2\pi-$периодическая по x функция, то её решение $u_0(x, t)$ также будет $2\pi-$периодическим по x. Это следует из единственности решения задачи (3).

Теорема 3. *Справедлива асимптотическая формула:*

$$||u_\omega(x, t) - u_0(x, t)||_{C(\Pi)} = o(1), \omega \to \infty,$$

где $u_\omega(x,t)-$ решение задачи (1), а $u_0(x,t)-$решение усреднённой задачи (3). Здесь $C(\Pi)-$ обычное банахово пространство заданных в полосе Π непрерывных функций с sup-нормой.

Proof. Решение $u_\omega(x,t)$ задачи (1) представим в виде:

$$u_\omega(x,t) = u_0(x,t) + W_\omega(x,t). \tag{22}$$

Тогда функция $W_\omega(x,t)$ является решением задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W_\omega(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 W_\omega(x,t)}{\partial x^2} = \phi(x,t,\tau) \\ W_\omega|_{t=0} = \frac{\partial W_\omega}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0, (x,t) \in \Pi. \end{cases} \tag{23}$$

Из (23) согласно лемме 1 следует, что

$$W_\omega(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t ds \int_{x-(t-s))}^{x+(t-s)} \phi(\xi, s, \omega s) d\xi \to 0 \text{ при } \omega \to \infty$$

равномерно относительно $x \in R, t \in [0,T]$.

Теорема 3 доказана. □

2. Асимптотическая задача 2

Пусть T, Π и $Q-$те же, что и в предыдущем параграфе. В полосе Π рассмотрим задачу Коши:

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x)r(t,\omega t) \\ u(x,t)|_{t=0} = 0 \\ u_t(x,t)|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{24}$$

где функция $r(t,\tau)$ известна, а функция $f(x)-$ неизвестна. В п.2.1 будем считать $f(x)$ периодической функцией, а в п.2.2 – многочленом. В каждом случае сформулируем и исследуем задачу об определении функции $f(x)$.

2.1. Будем предполагать, что функция $r(t,\tau)$, заданная в полосе $(t,\tau) \in Q$, непрерывна и $2\pi-$периодична по τ . Пусть ее среднее $r_0(t)$ по τ ($r_0(t) =< r(t,\tau) >_\tau$) непрерывно дифференцируема при $t \in [0,T]$, а функция $r_1(t,\tau) = r(t,\tau) - r_0(t)$ непрерывна в Q. Будем еще предполагать, что заданная на прямой $x \in R$ функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема и $2\pi-$периодична. Такую функцию будем для краткости называть функцией класса (B).

Для восстановления функции $f(x)$ будем предполагать, что задана точка $t_0 \in [0,T]$, в которой $\mid r_0(t_0) \mid > \mid r_0(0) \mid$, и $2\pi-$периодическая функция $\phi(x) \in C^4(R)$. Разложим $\phi(x)$ в ряд Фурье:

$$\phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n cos(nx). \tag{25}$$

Асимптотической задачей 2_1 назовём задачу о нахождении функции $f(x)$ класса (B), при которой для решения $u_\omega(x,t)$ задачи (24) справедлива асимптотическая формула:

$$\| u_\omega(x,t_0) - \phi(x) \|_{C(R)} = o(1), \omega \to \infty. \tag{26}$$

Здесь $C(R)-$обычное банахово пространство заданных на прямой R непрерывных функций с sup-нормой.

Прежде чем формулировать теорему о решении асимптотической задачи 2_1 определим числовую последовательность

$$\lambda_n \equiv \lambda_n(t_0), n = 0, 1, ...,$$

где

$$\lambda_0(t) = \int_0^t d\tau \int_0^\tau r_0(s)ds, \lambda_n(t_0) = \frac{1}{n}\int_0^t sin(n(t-s))r_0(s)ds, n = 1, 2, ..., \quad (27)$$

и сформулируем простое утверждение (см. [4]).

Лемма 2. *Существуют такие числа* $n_0 \in N$ *и* $\gamma_0 > 0$, *что при* $n > n_0$ $\mid \lambda_n(t_0) \mid > \gamma_0 n^{-2}$.

Теорема 4.

(1) *Асимптотическая задача* 2_1 *имеет единственное решение в классе* B *тогда и только тогда, когда все числа* $\lambda_n \neq 0, n = 0, 1, ...$
(2) *Если при некоторых* n $\lambda_n = 0$, *то задача* 2_1 *разрешима тогда и только тогда, когда при указанных* n $a_n = b_n = 0$. *При этом данная задача имеет бесконечно много решений.*
(3) *Если существует такой номер* k, *при котором* $\lambda_k = 0$, *но хотя бы одно из чисел* a_k, b_k *не равно нулю, то задача* 2_1 *не имеет решений.*

Proof. Наряду с задачей (24) будем рассматривать усреднённую задачу

$$\begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = f(x)r_0(t) \\ u(x,t)|_{t=0} = 0 \\ u_t(x,t)|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (28)$$

решение которой обозначим $u_0(x,t)$.

Согласно теореме 3 решение задачи Коши (24) при известной функции $f(x)$ удовлетворяет условию

$$\Big|\Big|u_\omega(x,t) - u_0(x,t)\Big|\Big|_{C(\Pi)} = o(1), \omega \to \infty.$$

Отсюда, с учётом оценки (26), следует равенство:

$$u_0(x, t_0) = \phi(x). \quad (29)$$

Разложим функцию $f(x)$ в ряд Фурье:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} d_n cos(nx). \quad (30)$$

В силу $2\pi-$периодичности $f(x)$ функция $u_0(x,t)$также $2\pi-$периодична по x. Разложим последнюю в ряд Фурье:

$$u_0(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} g_n(t) cos(nx). \quad (31)$$

Подставив разложения (30) и (31) в уравнения (28), получим равенства:

$$\begin{cases} \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n''(t)sin(nx)+\sum_{n=0}^{\infty} g_n''(t)cos(nx)\right]+\left[n^2\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)sin(nx)+n^2\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)cos(nx)\right]= \\ =\left[\sum_{n=1}^{\infty} c_n sin(nx)+\sum_{n=0}^{\infty} d_n cos(nx)\right]r_0(t) \\ \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)sin(nx)+\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t)cos(nx)\right]|_{t=0}=0 \\ \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(t)cos(nx)+\sum_{n=0}^{\infty} g_n'(t)sin(nx)\right]|_{t=0}=0 \end{cases} \tag{32}$$

Приравнивая в (32) коэффициенты при одинаковых функциях, придём к следующей цепочке задач:

$$\begin{cases} f_n''(t)+n^2 f_n(t)=c_n r_0(t) \\ f_n(t)|_{t=0}=f_n'(t)|_{t=0}=0; \end{cases} \tag{33}$$

$$\begin{cases} g_n''(t)+n^2 g_n(t)=d_n r_0(t) \\ g_n(t)|_{t=0}=g_n'(t)|_{t=0}=0, \end{cases} \tag{34}$$

Из (33) и (34) при $n\neq 0$ находим:

$$f_n(t)=\frac{c_n}{n}\int_0^t sin(n(t-s))r_0(s)ds\equiv c_n\lambda_n(t), \tag{35}$$

$$g_n=\frac{d_n}{n}\int_0^t sin(n(t-s))r_0(s)ds\equiv d_n\lambda_n(t), n=1,2,..., \tag{36}$$

а при $n=0$ имеем:

$$g_0=d_0\int_0^t d\tau\int_0^\tau r_0(s)ds\equiv d_0\lambda_0(t).$$

Предположим вначале, что $\lambda_n\neq 0, n=0,1,2,....$ В силу равенств (25),(29) и (31) имеем

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t_0)sin(nx)+\sum_{n=0}^{\infty} g_n(t_0)cos(nx)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(nx)+\sum_{n=0}^{\infty} b_n cos(nx).$$

Отсюда с учётом (35),(36) находим

$$c_n=\frac{a_n}{\lambda_n(t_0)}, d_n=\frac{b_n}{\lambda_n(t_0)},$$

так что $\mid c_n\mid\leq\mid a_n\mid\gamma_0 n^{-2}$, при $n\geq n_0$, где n_0 и γ_0-те же, что в лемме 2.

Отметим, что коэффициенты Фурье функции $\phi(x)$ имеют вид:

$$a_n(x)=\frac{1}{\pi n^4}\int_0^{2\pi} cos(nx)\phi^{(4)}(x)dx,$$

$$b_n(x)=-\frac{1}{\pi n^4}\int_0^{2\pi} sin(nx)\phi^{(4)}(x)dx,$$

а потому последовательности $\{n^4 a_n\}$ и $\{n^4 b_n\}$ принадлежат l_2.

Отсюда с учётом леммы 2 следует, что последовательности $\{n^2 c_n\},\{n^2 d_n\}\in l_2$. Следовательно функция $f(x)$, заданная равенством (30), определяется единственным образом и при этом $f(x)\in C^1(R)$. Теперь нетрудно показать, что при найденной функции $f(x)$ решение задачи Коши (24) удовлетворяет требуемой асимптотической формуле (26).

Мы доказали утверждение 1 теоремы 4. Утверждения 2 и 3 устанавливаются теперь совсем просто. □

2.2.Вновь рассмотрим задачу (24) с неизвестной функцией $f(x)$, которая, в отличие от п.2.1, является многочленом степени $n \in N$: $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$. Известная функция $r(t,\tau), (t,\tau) \in Q$, предполагается непрерывной и $2\pi-$периодической по τ.

Для восстановления функции $f(x)$ будем предполагать, что существует точка $t_0 \in [0,T]$, такая что: $\int_0^{t_0} r_0(s)(t_0-s)ds \neq 0$, и пусть задан многочлен $\phi(x)$ $n-$ой степени:

$$\phi(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + ... + b_0. \qquad (37)$$

Асимптотической задачей 2_2 назовём задачу об определении многочлена $f(x)$ степени n, при котором решение $u_\omega(x,t)$ задачи (24) удовлетворяет асимптотической формуле

$$\parallel u_\omega(x,t_0) - \phi(x) \parallel_{C(R)} = o(1), \omega \to \infty. \qquad (38)$$

Теорема 5. *Асимптотическая задача 2_2 имеет единственное решение в классе многочленов заданной степени n.*

Proof. Решение $u_0(x,t)$ усреднённой задачи (28) выражается формулой Даламбера:

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}\int_0^t r_0(s)ds \int_{x-(t-s)}^{x+(t-s)} \Big[a_0\xi^n + a_1\xi^{n-1} + ... + a_n\Big]d\xi,$$

так что

$$u_0(x,t) = \frac{a_0}{2(n+1)}\int_0^t r_0(s)\Big[(x+(t-s))^{n+1} - (x-(t-s))^{n+1}\Big]ds+$$

$$+\frac{a_1}{2n}\int_0^t r_0(s)\Big[(x+(t-s))^n-(x-(t-s))^n\Big]ds+...+\frac{1}{2}a_n\int_0^t r_0(s)\Big[(x+(t-s))-(x-(t-s))\Big]ds =$$

$$= a_0x^n\int_0^t r_0(s)(t-s)ds + a_1x^{n-1}\int_0^t r_0(s)(t-s)ds+$$

$$+x^{n-2}\Big(\frac{a_0C_{n+1}^3}{n+1}\int_0^t r_0(s)(t-s)^3ds + a_2\int_0^t r_0(s)(t-s)ds\Big) + ... + a_n\int_0^t r_0(s)(t-s)ds. \qquad (39)$$

Согласно теореме 3 решение $u_\omega(x,t)$ задачи Коши (22) при известной функции f удовлетворяет условию:

$$\parallel u_\omega(x,t) - u_0(x,t) \parallel_{C(\Pi)} = o(1), \omega \to \infty.$$

Отсюда в силу (38)

$$u_0(x,t_0) = \phi(x). \qquad (40)$$

Положив в (39) $t = t_0$ и учитывая равенства (37), (41), получим выражения искомых коэффициентов

$$a_0 = \frac{b_0}{\int_0^{t_0} r_0(s)(t_0-s)ds},\ a_1 = \frac{b_1}{\int_0^{t_0} r_0(s)(t_0-s)ds},$$

$$a_2 = \frac{b_2}{\int_0^{t_0} r_0(s)(t_0-s)ds} - \frac{a_0\frac{C_{n+1}^3}{n+1}\int_0^{t_0} r_0(s)(t_0-s)^3ds}{\int_0^{t_0} r_0(s)(t_0-s)ds},\ ...$$

Таким образом мы построим функцию $f(x)$.

В заключение легко устанавливается, что при найденной функции $f(x)$ решение задачи Коши (24) удовлетворяет требуемой асимптотической формуле (38). Теорема доказана. $\square$

§3. Задача 3. Известно среднее значение $r_0(t)$ зависящего от времени сомножителя источника, а $f(x)-$периодическая функция или многочлен

В этом разделе объекты T, Π и Q те же, что и в §1. Вновь рассмотрим систему (24). Будем теперь предполагать, что $f(x)-$непрерывная, $2\pi-$периодическая и трижды непрерывно дифференцируемая на прямой $x \in R$ функция, а $r(t,\tau)-$непрерывная на множестве $(t,\tau) \in Q$ и $2\pi-$периодическая по τ функция, среднее которой $r_0 =< r(t,\tau) >_\tau \in C^0([0,T])$, а разность $r_1(t,\tau) = r(t,\tau) - r_0(t)$ имеет непрерывные в Q производные по t вплоть до 3-го порядка. Предположим ещё, что в некоторой точке $t_0 \in [0,T]$ выполнено неравенство

$$|r_0(t_0)| > |r_0(0)|. \tag{41}$$

Класс функций $f(x)$ и $r_1(t,\tau)$, удовлетворяющих указанным условиям, обозначим символом (С). Эти функции в данном параграфе считаются неизвестными, а функция r_0- известной.

Введём в рассмотрение последовательность чисел $\lambda_n = \lambda_n(t_0), n = 0,1,2,...,$ вычисленных по формулам (27), и будем для краткости считать, что $\lambda_n \neq 0$.

Для постановки третьей асимптотической задачи зададим следующие объекты. Вначале зафиксируем точку $t_0 \in (0,T]$, для которой выполнено неравенство (41). Затем введём две функции: определённую на прямой $x \in R$ $2\pi-$периодическую функцию $\phi \in C^6(R)$ и определённую и непрерывную в полосе Q функцию $\chi(t,\tau)$, которая $2\pi-$периодична по τ с нулевым средним и обладает непрерывными в Q производными $\frac{\partial^{2+k}\chi}{\partial\tau^2\partial t^k}, 0 \le k \le 3$. Положим

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sin(nx) + \sum_{n=0}^{\infty} b_n cos(nx), \tag{42}$$

где

$$a_n = \frac{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(x)sin(nx)dx}{\lambda_n}, b_n = \frac{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\phi(x)cos(nx)dx}{\lambda_n}. \tag{43}$$

Через $x_0 \in R$ обозначим точку, в которой $f(x_0) \neq 0$. Такая точка, разумеется, существует, если $\phi(x) \not\equiv 0$.

Для формулировки условия переопределения третьей асимптотической задачи нужно ввести ещё три функции: $p_0(t), p_1(t)$ и $p_2(t), t \in [0,T]$, которые однозначно выражаются через уже заданные объекты. Положим

$$p_0^{''} = r_0(t)f(x_0) + \frac{1}{2}\int_0^t r_0(s)[f'(x_0+(t-s)) - f'(x_0-(t-s))]ds, p_0(0) = p_0'(0) = 0,$$

функции $p_i(t) = u_i(x_0,t), i = 1,2,$ где $u_i(x,t), i = 1,2, -$решения задач (5),(7), в которых $v_2(x,t,\tau) = \frac{f(x)\chi(t,\tau)}{f(x_0)}$, а $v_3(x,t,\tau)-$решение задачи (6) при указанной функции v_2.

Асимптотической задачей 3 назовём задачу о нахождении функций $f(x)$ и $r_1(t,\tau)$ класса С, при которых решение $u_\omega(x,t)$ задачи (24) удовлетворяет асимптотическим формулам:

$$\| u_\omega(x_0,t) - p_0(t) - \omega^{-1}p_1(t) - \omega^{-2}(p_2(t) + \chi(t,\omega t)) \|_{C[0,T]} = o(\omega^{-2}),$$

$$\| u_\omega(x,t_0) - \phi(x) \|_{C(R)} = o(1), \omega \to \infty.$$

Определим теперь функцию

$$r_1(t,\tau) = [f(x_0)]^{-1} \chi''_{\tau^2}(t,\tau). \tag{44}$$

Теорема 6. *Асимптотическая задача 3 имеет единственное решение в классе пар функций $(f(x), r_1(t,\tau))$, $2\pi-$периодических по x и τ соответственно, где $f \in C^3(R)$, а $r_1(t,\tau)$ трижды дифференцируема по t и $r_{1t^i} \in C(Q)$, $0 \le i \le 3$. При этом функции $f(x)$ и $r_1(t,\tau)$ определяются по формулам (42), (43) и (44) соответственно.*

Замечание. *Аналогичным образом можно поставить и решить асимптотическую задачу в том случае, когда функция $f(x)-$многочлен заданной степени n (см. асимптотическую задачу 2_2).*

Теорема 6 вытекает по существу из §§1,2.

§4. Задача 4. Известно среднее $r_0(t)$, а $f(x)-$ линейная комбинация заданных функций

Пусть Т, П и $Q-$ те же объекты, что и в §1. Вновь рассмотрим задачу (24). В данном параграфе функция $r_0(t)$ известна, а функции $f(x), x \in R$, и $r_1(t,\tau) = r(t,\tau) - r_0(t), (t,\tau) \in Q$, неизвестны, но принадлежат указанным ниже классам. Пусть $r_0 \in C([0,T])$, $r_{1t^i}(t,\tau) \in C(Q), i = 1,2,3$. Пусть $\phi_i(x), x \in R, i = 1,2,...,n,$ $-$система вещественных линейно независимых функций, которые трижды непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют равенствам:

$$\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2} = -c_i^2\phi_i(x),$$

где $c_i, i = 1,2,...,n,$ $-$положительные числа. Будем предполагать, что $f(x)$ является линейной комбинацией заданной системы функций:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \phi_i(x), \tag{45}$$

где числа α_i- неизвестны.

Если функции $f(x)$ и $r(t,\tau)$ удовлетворяют указанным в предыдущем абзаце условиям, то будем говорить, что они принадлежат классу (D).

По функции r_0 построим функцию $\rho_k(t) = \int_0^t r_0(t) sinc_k(t-s)ds, t \in [0,T], k = 1,2,...,n$. Пусть задана некоторая точка $t_0 \in (0,T]$, в которой известны значения $\rho_k(t_0) = a_k \ne 0$. Легко видеть, что такой точки нет лишь в случае нулевой функции $r_0(t), t \in [0,T]$. Действительно, предполагая противное, возьмём произвольную точку $t_0 \in (0,T]$ и пусть при некотором $k \in \{1,2,...,n\}$ $\rho_k(t_0) = 0$. Не нарушая общности, можно считать, что последнее равенство выполнено в некоторой окрестности точки t_0. Дифференцируя его дважды, придём к соотношению: $r_0(t_0) = c_k\rho_k(t_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Продолжим постановку задачи о восстановлении функций $f(x)$ и $r_1(t,\tau)$ класса (D). Допустим, что нам задан набор действительных чисел $x_j, j = 1,2,...,n$, таких что матрица $(\phi_i(x_j))_{i,j=1}^n-$невырождена. Такой набор существует в силу линейной независимости функций $\phi_i, i = 1,2,...,n$. Элементарное доказательство этого факта можно провести методом математической индукции, на что нам указал С.Н. Мелихов.

Зададим теперь произвольный набор действительный чисел $b_i, i = 1, 2, ..., n$, среди которых хотя бы одно ненулевое, и пусть $\beta_i, i = 1, 2, ..., n, -$решение системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i \phi_i(x_j) = b_j, j = 1, 2, ..., n.$$

Определим функцию

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\beta_i c_i}{a_i} \phi_i(x) \quad (46)$$

и будем, не нарушая общности, предполагать, что $f(x_1) \neq 0$. Такая точка в наборе $x_j, j = 1, 2, ..., n$, в силу невырожденности матрицы $\phi_i(x_j)_{i,j=1}^{n}$, очевидно, имеется; её мы и снабжаем индексом $j = 1$.

Итак, пусть нам заданы функции $\phi_i(x), i = 1, 2, ..., n$, точки $x_j \in R, j = 1, 2, ..., n, t_0 \in (0, T]$ и действительные числа $a_i \neq 0, b_i, i = 1, 2, ..., n$, удовлетворяющие указанным выше условиям. Пусть заданы ещё непрерывная функция $\chi(t, \tau), (t, \tau) \in Q$, которая $2\pi-$периодична по τ с нулевым средним и обладает непрерывными в Q производными $\chi^{(k+2)}_{\tau^2 t^k}, k = 1, 2, 3$. По указанным данным определим ещё три функции: $p_0(t), p_1(t)$ и $p_2(t)$, $t \in [0, T]$, где

$$p_0(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\beta_k}{a_k} \phi_k(x_1) \rho_k(t), \ p_1(t) = u_1(x_1, t), \ p_2(t) = u_2(x_1, t).$$

Здесь $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)-$решения задач (5), (7), в которых положено

$$v_2(x, t, \tau) = \frac{f(x)\chi(t, \tau)}{f(x_0)},$$

а $v_3(x, t, \tau)-$решение задачи (6).

Задачей 4 назовём задачу о нахождении функций $f(x)$ и $r_1(t, \tau)$ класса (D), при которых решение $u_\omega(x, t)$ задачи (24) удовлетворяет условиям

$$| u_\omega(x_i, t_0) - b_i |= o(1), i = 1, 2, ..., n, \quad (47)$$

$$\| u_\omega(x_1, t) - [p_0(t) + \omega^{-1} p_1(t) + \omega^{-2}(p_2(t) + \chi(t, \tau))] \|_{C([0,T])} = o(\omega^{-2}), \omega \to \infty. \quad (48)$$

Для формулировки теоремы нам понадобится ещё функция

$$r_1(t, \tau) = [f(x_0)]^{-1} \chi''_{\tau^2}(t, \tau). \quad (49)$$

Теорема 7. *Задача 4 имеет единственное решение в классе пар функций $(f(x), r_1(t, \tau))$, где $f(x)$ является линейной комбинацией заданной системы функций $\phi_i(x), x \in R, i = 1, 2, ..., n, r(t, \tau) \in C(Q)$ и $2\pi-$периодична по τ, а функция $r_1(t, \tau) = r(t, \tau) - < r(t, \tau) >$ имеет производные $r_{1t^i} \in C(Q), 0 \leq i \leq 3$. При этом функции $f(x)$ и $r_1(t, \tau)$ определяются формулами (46) и (49).*

Proof. Пусть задача 4 разрешима. Докажем, что тогда функции $f(x)$ и $\chi(t, \tau)$ удовлетворяют равенствам (46) и (49).Поскольку искомые функции $f(x)$ и $r_1(t, \tau)$ принадлежат классу D, а функция $r_0(t)$ известна, то согласно теоремам 1 и 3 справедливы асимптотические формулы:

$$| u_\omega(x_i, t_0) - u_0(x_i, t_0) |= o(1), i = 1, 2, ..., n, \quad (50)$$

$$\| u_\omega(x_1, t) - [u_0(x_1, t) + \omega^{-1} u_1(x_1, t) + \omega^{-2}(u_2(x_1, t) + v_2(x_1, t, \tau))] \|_{C([0,T])} = o(\omega^{-2}), \omega \to \infty. \quad (51)$$

В силу условий переопределения (47)-(48) из формул (50), (51) получаем следующие соотношения:

$$u_0(x_i, t_0) = b_i,\ u_1(x_1, t) = p_1(t),\ u_2(x_1, t) = p_2(t) \text{ и } v_2(x_1, t, \tau) = \chi(t, \tau). \quad (52)$$

Отсюда однозначно можно определить $f(x)$ и $r_1(t, \tau)$. Начнём с $f(x)$. Подставляя в равенства (3) рассматриваемую в этом параграфе функцию $f(45)$, находим, что решение $u_0(x, t)$ представимо в виде:

$$u_0(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{c_i} \rho_i(t) \alpha_i \phi_i(x).$$

Из первого равенства (52) имеем:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{c_i} \phi(x_1) \int_0^{t_0} sin[c_i(t_0 - s)] r_0(s) ds = b_i.$$

Отсюда получаем, что коэффициенты α_i в разложении (45) функции $f(x)$ определяются единственным образом:

$$\alpha_i = \frac{\beta_i c_i}{a_i},$$

так что $f(x)$ определяется формулой (46).

Теперь восстановим функцию $r_1(t, \tau)$. Согласно асимптотической задаче 1 при известной функции $f(x)$ функцию $r_1(t, \tau)$ можно однозначно определить следующим образом:

$$r_1(t, \tau) = [f(x_0)]^{-1} \frac{\partial^2 \chi(t, \tau)}{\partial \tau^2},$$

так что формула (49) тоже доказана.

Для завершения доказательства теоремы 7 осталось установить, что при выполнении равенств (46) и (49), решения $u_\omega(x, t)$ задачи (24) удовлетворяет условиям (47) и (49). На доказательстве этого простого факта останавливаться не будем. Теорема 7 доказана. □

References

[1] V.G. Romanov, *Inverse problems of mathematical physics*, Nauka, Moscow, 1984, c.458

[2] A.M. Denisov, *Introduction to the theory of inverse problems*, MSU, Moscow, 1994, c.206

[3] V.B. Levenshtam, *Parabolic equations with a large parameter. Inverse problems*, Math. Notes, 107:3 (2020), c.412-425.

[4] V.B. Levenshtam, P.V. Babich, *Recovery of a rapidly oscillating right-hand side of the wave equation from partial asymptotics*, Math. Notes, Vladikavkaz, 22:4 (2020), c.28-44

[5] E.V. Korablina, V.B.Levenshtam, *Reconstruction of a high-frequency source term of the wave equation from the asymptotics of the solution. Case of the Cauchy problem*, 18:2 (2021), c.827-833

[6] V.N. Chelomey, *On the Possibility of Increasing the Stability of Elastic Systems Using Vibrations*, RAS USSR, 110:3 (1956), c.345-347

[7] I.B. Simonenko, *Justification of the averaging method for the problem of convection in the field of rapidly oscillating forces and for other parabolic equations*, Math. coll., 87:2 (1972), c. 236-253

[8] V.B. Levenshtam, *Asymptotic integration of the vibrational convection problem*, Differential Equations, 34:4 (1998), c.523-532

[9] V.B. Levenshtam, *Asymptotic problems on the reconstruction of the high-frequency source of the wave equation*, Math. Notes (preprint)

Элла Викторовна Кораблина
ИММиКН ЮФУ,
ул. Мильчакова, 8а,
344058, Ростов-на-Дону, Россия,
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
ул. Губкина, 8,
117966, Москва, Россия,
E-mail address: korablina@sfedu.ru

Левенштам Валерий Борисович
ИММиКН ЮФУ,
ул. Мильчакова, 8а,
344058, Ростов-на-Дону, Россия,
Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук
ул. Губкина, 8,
117966, Москва, Россия,
E-mail address: vblevenshtam@sfedu.ru