Ответ на замечания рецензента

по статье

«The one-dimensional impulsive Barenblatt–Zheltov–Kochina equation»,

авторы: И. В. Кузнецов и С. А. Саженков,

представленной для рассмотрения на предмет опубликования

в «Сибирских электронных математических известиях»

Дорогой рецензент и дорогие члены редакции журнала СЭМИ:

мы благодарим глубокоуважаемого рецензента за внимание и время, уделённое нашей статье, и за ряд очень ценных замечаний, которые мотивировали нас на внесение многочисленных изменений, позволяющих, как мы надеемся, существенно улучшить текст.

Мы постарались максимально эффективно учесть все замечания в рецензии, что в первую очередь привело к изменению (расширению) названия статьи. Мы дополнили название статьи уточнением «with a transition layer» и в настоящем виде название имеет следующий вид:

«The one-dimensional impulsive Barenblatt–Zheltov–Kochina equation with a transition layer».

Расширение названия статьи связано с тем, что существуют три типа импульсных уравнений:

- Мгновенные импульсные дифференциальные уравнения, где импульсное условие, т.е. связь между следами $u(x,\tau \pm 0)$ имеет алгебраический вид типа

$$u(x,\tau+0) = u(x,\tau-0) + \beta(x, u(x,\tau-0)).$$

- Немгновенные импульсные дифференциальные уравнения, где априори задан переходный слой $[\tau,\beta]$ по времени, вне которого система определяется дифференциальным уравнением, и где не возникает понятия следов $u(x, \tau \pm 0)$.

- Импульсные уравнения с переходным слоем, где связь между следами $u(x, \tau \pm 0)$ получается за счет предельного перехода по малому параметру в сингулярном источнике, содержащем дельта-функцию Дирака. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений, такие уравнения относятся к более широкому классу обобщённых дифференциальных уравнений.

В данной статье изучается последний тип уравнений.

Все вышеописанные замечания включены в статью. Более того, были добавлены дополнительные библиографические источники, что привело к увеличению списка литературы до 47-ми позиций.

Теперь ответим на каждое из замечаний в рецензии по отдельности.

(1) с. 101. В Proposition 1 утверждается, что существует единственное решение задачи. Вообще говоря, понятие решения к этому моменту не определено. Можно было бы сказать пару слов об этом. Например, что решение понимается в классическом обобщённом смысле и лежит в таких-то классах функций. Кроме того, необходимо уточнить, что понимается под пространством $W_0^{2,2}(0,1)$. Видимо, авторы подразумевают пространство $W^{2,2}(0,1) \cap W_0^{1,2}(0,1)$.

   Ответ. Замечание учтено: $W_0^{2,2}(0,1)$ заменено на $W^{2,2}(0,1) \cap W_0^{1,2}(0,1)$ или, там где уместно, на $W^{2,2}(0,1)$. Понятие решения уточнено и написано явно в виде определения 1 (Definition 1) после формулировки предложения 1 (Proposition 1).

(2) с. 105. Вообще говоря, это не принцип максимума, а просто оценка производной решения по максимуму.

Ответ. Термин ‘maximum principle’ заменён на термин ‘bound’ (оценка).

(3) с. 107. В доказательстве Proposition 1 (Sec. 2) я нигде не нашёл слов о существовании и единственности решения задачи. Это, конечно, следует из полученных оценок, но читатель должен об этом сам догадаться.

Ответ. В связи с этим замечанием доказательство предложения 1 расширено: в доработанной версии доказательства утверждений существования и единственности решения явно сформулированы и обоснованы в п. 2.1 и п. 2.2, соответственно.

(4) с. 125. Вообще говоря, так нехорошо писать: $E_\varepsilon(t)v \in C([0;+\infty); L^2(0,1))$. Либо заменить t на точку, либо написать словами, что функция $t \mapsto E_\varepsilon(t)v$ принадлежит такому-то классу.

Ответ. Замечание учтено: t заменено на точку ‘$\cdot$’.

(5) с. 129. Эти громоздкие формулы являются прямым следствием равенства Парсеваля. Кроме того, стремление к нулю в последней строчке можно и пояснить, сославшись на равномерную (по n) непрерывность по t. Заметим, что равномерной по ε непрерывности нет.

Ответ. С замечанием полностью согласны. В связи с ним внесены корректировки в раздел (iii) п. 2.1 доказательства предложения 1.

(6) с. 131. Далее получаются оценки для решения задачи, но решения пока нет. По крайней мере, нигде не отмечено, что $E_\varepsilon(t)g$ есть решение задачи (2).

Ответ. Замечание учтено: то, что $E_\varepsilon(t)g$ — это решение задачи (2), явно формулируется в (новом) разделе (iv) доказательства предложения 1. В качестве обоснования приводится точная ссылка на известный классический результат [36, Secs. 4,5].

(7) с. 157. Здесь я снова обращусь к замечанию с. 101. Хорошо бы написать, в каком смысле выполняется уравнение (9b). Более того, непрерывность по t функции u в теореме 1 не утверждается, поэтому необходимо пояснить (9d).

Ответ. Замечание учтено. В доработанной версии статьи уравнение (9b) (по нумерации из исходной версии) получило номер (15b), а начальное условие (9d) — номер (15d). Пояснения, в каком смысле понимаются уравнение (15b) и условие (15d), даны явно сразу после формулировки теоремы 1.

(8) с. 173. Предыдущее замечание касается также формулы (11d). Кроме того, сразу возникает вопрос, а не будет ли справедлива аналогичная формула при $\bar{t} = 1/2 - 0$? Вообще говоря, тогда получится параболическая задача с начальными и конечными условиями.

Ответ. В доработанной версии статьи соотношение (11d) (по нумерации из исходной версии) получило номер (17d). Пояснение, в каком смысле понимается соотношение (17d), дано явно сразу после формулировки теоремы 2. Замечание в рецензии о том, что должно иметь место аналогичное соотношение при $\bar{t} = 1/2 - 0$, является справедливым. Соответственно, формулировка теоремы 2 дополнена утверждением о выполнении такого соотношения (формула (17e)). Пояснение о смысле, в котором принимается (17e), дано сразу после формулировки теоремы 2. Отметим, что считать (17e) конечным условием для уравнения (17b) (в исходной версии — уравнения (11b)) некорректно. Соответствующий комментарий дан в замечании 1 (Remark 1), которое дополнительно нами написано для доработанной версии статьи.

(9) с. 179. Здесь утверждается равномерная непрерывность семейства функций в интегральной норме, но следующая ниже расшифровка этого понятия не означает равномерную непрерывность. Далее доказана именно равномерная непрерывность, то есть речь идёт о неудачной формулировке.

Ответ. Замечание рецензента совершенно справедливо и формулировка второго из утверждений в лемме 1 в исходной версии является неудачной. Действительно, из предельного соотношения

$$\lim_{h\to 0+} \|\tau_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^2(0,T-h;W_0^{1,2}(0,1))} = 0$$

следует только непрерывность u_ε по t (в интегральной норме) при каждом фиксированном ε, но не равностепенная непрерывность (то есть равномерная по отношению к параметру ε непрерывность функций по t) всего семейства решений $\{u_\varepsilon\}_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]}$. Вместе с этим, оценка в тексте доказательства леммы 1 доставляет именно равностепенную непрерывность. Поэтому в доработанном тексте статьи эта оценка вынесена в формулировку леммы 1 вместо указанного выше предельного соотношения. Тем самым, замечание рецензента учтено и формулировка леммы 1 исправлена.

(10) с. 194. Закончилось доказательство теоремы 1, но вопросы остались. Например, зачем нужна сильная сходимость, ведь

предельный переход при $\varepsilon \to 0$ осуществляется в линейном уравнении? Коэффициент в этом уравнении стремится $*$-слабо к дельта-функции, но только по времени. В обобщённой формулировке уравнения (9b) пробная функция, видимо, должна обращаться в нуль при $t = \tau$, поэтому достаточно получить предельное уравнение вне произвольной окрестности этой точки. Но там δ-образный коэффициент равномерно стремится к нулю, поэтому никаких проблем со слабым предельным переходом не возникает. Кроме того, хотелось бы увидеть какое-то обоснование непрерывности предельной функции u по времени, что будет использовано далее в (11d).

Ответ. Действительно, сильная сходимость для вывода предельных соотношений (уравнений, граничных условий) избыточна и хватило бы слабой сходимости. Однако сильная сходимость тоже полезна, вообще говоря. В связи с этим замечанием в рецензии мы дополнили текст статьи замечанием 2 (Remark 2 в конце статьи), где эта полезность обсуждается. Замечание по поводу непрерывности функции u по t также учтено. В доработанной версии статьи выполнение указанного свойства обосновано в п. 4.3 и п. 6.

(11) с. 217, с. 228, с. 240. Вообще говоря, оценку из леммы 2 (леммы 3, леммы 4) не называют энергетической. Потом, доказательство этой оценки не аналогично тем, что указаны и выведены в статье ранее. Здесь оценивается супремум нормы в $W^{2,2}$ производной решения по времени.

Ответ. Замечание учтено. Сами оценки в леммах 2–4 были написаны неточно и в доработанном тексте уточнены. Термин «энергетическая» из названия оценок исключён.

(12) с. 227. В (15b) вместо $\hat{t}$ следует поставить $\bar{t}$.

Ответ. Неточность исправлена.

(13) с. 247. Необходимо указать, что пределы берутся в пространстве $W_0^{1,2}(0,1)$.

Ответ. Замечание учтено: дана ссылка на замечание 1 и обоснование в п. 4.3.

(14) с. 251. Подошло к концу доказательство теоремы 2, но я так и не понял, зачем вводились функции $\hat{u}$ и $\tilde{u}$. Мне кажется, можно было бы обойтись полученной ранее функцией u.

Ответ. Эти функции были введены для удобства: нам виделось, что выкладки, проведённые в доказательстве теоремы 2, в терминах функций $\hat{u}$ и $\tilde{u}$ смотрятся менее громоздкими и более наглядными.

(15) с. 253. Насколько мне известно, С. Н. Антонцев работает в Институте гидродинамики СО РАН.

Ответ. Профессор С. Н. Антонцев действительно работает в Институте гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН. Соответственно, мы сделали поправку в разделе благодарностей (Acknowledgement) в конце статьи.

Надеемся, что в доработанном виде наша статья «The one-dimensional impulsive Barenblatt–Zheltov–Kochina equation with a transition layer» удовлетворяет высоким требованиям журнала и может быть опубликована.

С уважением,

12.07.2022

Иван Кузнецов

Сергей Саженков