Рецензия
на представленную для публикации в
журнал «Сибирские электронные математические известия»
статью И. В. Кузнецова и С. А. Саженкова
“The one-dimensional impulsive Barenblatt – Zheltov – Kochina equation”

В работе исследуется начально-краевая задача для одномерного уравнения, название которого указано в заголовке. При этом перед второй пространственной производной стоит зависящий только от времени коэффициент, который стремится к дельта-функции (сконцентрированной в некоторый момент времени) при стремлении к нулю параметра ε. Само уравнение включает производные по времени как от искомой функции, так и от её второй пространственной производной. Во введении хорошо изложена предыстория задачи, однако цели авторов не очень хорошо обозначены. Доказаны теоремы 1 и 2, но они сформулированы не совсем удовлетворительно. На самом деле доказано немного больше, чем там утверждается. Замечу, что некоторые части доказательств не нужны.

Изложу своё представление об исследуемой задаче. Имеется параболическое уравнение, в котором перед одним из членов стоит коэффициент, представляющий собой сосредоточенную в некоторый момент времени $t = \tau$ дельта-функцию. Вероятно, решение задачи терпит скачок в этот момент времени, но скачок заранее нам не известен. Авторы сглаживают дельта-функцию и получают решение u_ε на всём промежутке времени $(0, T)$. Предельный переход они могут осуществить при $t \neq \tau$, а чтобы склеить значения решения u предельной задачи при $t = \tau - 0$ и $t = \tau + 0$, используют растяжение сглаженной задачи в промежутке времени $(\tau - \varepsilon, \tau + \varepsilon)$. При этом возникает приближённая задача в фиксированном слое $(-1/2, 1/2)$. Предельный переход даёт решение $\bar{u}$ некоторой параболической задачи на промежутке времени $(-1/2, 1/2)$. При этом получается, что $u(\tau \pm 0) = \bar{u}(\pm 1/2)$. Таким образом, исходная задача свелась к решению двух задач. Ситуация аналогична известным задачам о структуре ударной волны или о структуре боры в волнах на воде, склейке внешних и внутренних разложений в задачах с внутренней свободной границей. В представленной работе авторы не сформулировали чётко, что они в итоге получили. Просто осуществили какие-то предельные переходы.

Мне кажется, что авторам следует доработать свою статью, тем более, что для этого не требуется приложения каких-либо дополнительных усилий.

Ниже приведены некоторые замечания к работе, которые упорядочены в порядке появления. В моем экземпляре статьи строки были пронумерованы, поэтому перед каждым замечанием я поставил номер строки, где оно появилось (с. 101 означает строка 101).

с. 101 В Proposition 1 утверждается, что существует единственное решение задачи. Вообще говоря, понятие решения к этому моменту не определено. Можно было бы сказать пару слов об этом. Например, что решение понимается в классическом обобщённом смысле и лежит в таких-то классах функций. Кроме того, необходимо уточнить, что понимается под пространством $W_0^{2,2}(0,1)$. Видимо, авторы подразумевают пространство $W^{2,2}(0,1) \cap W_0^{1,2}(0,1)$.

с. 105 Вообще говоря, это не принцип максимума, а просто оценка производной решения по максимуму.

с. 107 В доказательстве Proposition 1 (Sec. 2) я нигде не нашёл слов о существовании и единственности решения задачи. Это, конечно, следует из полученных оценок, но читатель должен об этом сам догадаться.

с. 125 Вообще говоря, так нехорошо писать: $E_\varepsilon(t)v \in C([0,+\infty); L^2(0,1))$. Либо заменить t на точку, либо написать словами, что функция $t \mapsto E_\varepsilon(t)v$ принадлежит такому-то классу.

с. 129 Эти громоздкие формулы являются прямым следствием равенства Парсеваля. Кроме того, стремление к нулю в последней строчке можно и пояснить, сославшись на равномерную (по n) непрерывность по t. Заметим, что равномерной по ε непрерывности нет.

с. 131 Далее получаются оценки для решения задачи, но решения пока нет. По крайней мере, нигде не отмечено, что $E_\varepsilon(t)g$ есть решение задачи (2).

с. 157 Здесь я снова обращусь к замечанию с. 101. Хорошо бы написать, в каком смысле выполняется уравнение (9b). Более того, непрерывность по t функции u в теореме 1 не утверждается, поэтому необходимо пояснить (9d).

с. 173 Предыдущее замечание касается также формулы (11d). Кроме того, сразу возникает вопрос, а не будет ли справедлива аналогичная формула при $\bar{t} = 1/2 - 0$? Вообще говоря, тогда получится параболическая задача с начальными и конечными условиями.

с. 179 Здесь утверждается равномерная непрерывность семейства функций в интегральной норме, но следующая ниже расшифровка этого понятия не означает равномерную непрерывность. Далее доказана именно равномерная непрерывность, то есть речь идёт о неудачной формулировке.

с. 194 Закончилось доказательство теоремы 1, но вопросы остались. Например, зачем нужна сильная сходимость, ведь предельный переход при $\varepsilon \to 0$ осуществляется в линейном уравнении? Коэффициент в этом уравнении стремится $*$-слабо к дельта-функции, но только по времени. В обобщённой формулировке уравнения (9b) пробная функция, видимо, должна обращаться в нуль при $t = \tau$, поэтому достаточно получить предельное уравнение вне произвольной окрестности этой точки. Но там δ-образный коэффициент равномерно стремится к нулю, поэтому никаких проблем со слабым предельным переходом не возникает. Кроме того, хотелось бы увидеть какое-то обоснование непрерывности предельной функции u по времени, что будет использовано далее в (11d).

с. 217 Вообще говоря, оценку из леммы 2 не называют энергетической. Потом, доказательство этой оценки не аналогично тем, что указаны и выведены в статье ранее. Здесь оценивается супремум нормы в $W^{2,2}$ производной решения по времени.

с. 227 В (15b) вместо $\hat{t}$ следует поставить $\bar{t}$.

с. 228 и с. 240 Здесь то же самое замечание, что и к с. 217.

с. 247 Необходимо указать, что пределы берутся в пространстве $W_0^{1,2}(0,1)$.

с. 251 Подошло к концу доказательство теоремы 2, но я так и не понял, зачем вводились функции $\hat{u}$ и $\tilde{u}$. Мне кажется, можно было бы обойтись полученной ранее функцией u.

с. 253 Насколько мне известно, С. Н. Антонцев работает в Институте гидродинамики СО РАН.