S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 519.71
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC 08A99

О БЕСПОВТОРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЯХ В ЭЛЕМЕНТАРНОМ БАЗИСЕ С МЕДИАНОЙ

И.К. Шаранхаев

Abstract. Boolean functions that can be realized by read-once terms (formulas) in elementary base extended by median are studied. An algorithm for finding read-once representations of Boolean functions in this base is obtained.

Keywords: Boolean function, superposition, base, decomposition, read-once term.

1. Введение

Бесповторные булевы функции, т. е. функции, которые можно реализовать термом (формулой) в некотором базисе, содержащим каждую переменную не более одного раза, исследовались еще в 50-х годах прошлого века [1]. Однако алгоритмы нахождения бесповторных представлений булевых функций рассматривались до сих пор только в бинарных базисах [2]. В статье исследуются булевы функции, которые можно представить бесповторными термами в элементарном базисе, расширенном функцией медианой (трехместной функцией голосования). На основе необходимого и достаточного условия бесповторности булевых функций в данном базисе, полученного автором в работе [3], предложен алгоритм нахождения бесповторных представлений булевых функций.

Sharankhaev, I.K., On read-once Boolean functions in elementary base extended by median.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда №22–21–20013, https://rscf.ru/project/22-21-20013/ и Правительства Республики Бурятия.

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

2. Основные понятия и определения

Изложению основных результатов предпошлем необходимые обозначения и определения. Все неопределяемые понятия можно найти, например, в [4]. Будем использовать следующие обозначения: переменные обозначаются символами x, y, z, u, v, возможно с индексами; константы обозначаются символами α, σ, τ, возможно с индексами; символом $\tilde{x}$ обозначается набор $(x_1, \ldots, x_n)$; $|\tilde{x}|$ — длина набора $\tilde{x}$; rank f — ранг функции f; $\chi(f)$ — множество всех переменных функции f; $\rho(f)$ — множество всех существенных переменных функции f; $\delta(f)$ — множество всех фиктивных переменных функции f;

$$x^\sigma = \begin{cases} x, \text{ если } \sigma = 1; \\ \bar{x}, \text{ если } \sigma = 0. \end{cases}$$

Функция, получаемая из $f(x_1, \ldots, x_n)$ подстановкой вместо некоторой переменной x_i константы σ, называется *остаточной по переменной* x_i и обозначается $f^\sigma_{x_i}$. Индуктивно это определение распространяется на подмножество переменных.

Переменная x_i функции f называется *фиктивной*, если $f^0_{x_i} = f^1_{x_i}$, и *существенной* в противном случае.

Рангом функции f называется число ее существенных переменных.

Терм Φ над базисом B называется *бесповторным*, если каждая переменная входит в него не более одного раза. Функция f называется *бесповторной* в базисе B, если существует бесповторный терм Φ над B, представляющий функцию f. В противном случае f называется *повторной* в B.

Функция $d_3 = (00010111)$ называется *медианой*.

Базис
$$B_0 = \{\vee,\ \cdot,\ -,\ 0,\ 1\}$$
называется *элементарным*. Базис $B_0 \cup \{d_3\}$ обозначим через D.

Будем говорить, что функции f и g *связаны отношением* $\preceq$, и писать $f \preceq g$, если для любого набора $\tilde{\sigma}$ выполняется неравенство $f(\tilde{\sigma}) \le g(\tilde{\sigma})$.

Функция f называется *обобщенно монотонной по переменной* x, если выполняется либо $f^0_x \preceq f^1_x$, либо $f^0_x \succeq f^1_x$. Если f является обобщенно монотонной по переменной x, то для краткости будем писать $f \in M_x$.

Функции f и g называются *обобщенно однотипными*, если
$$f(x_1, \ldots, x_n) = g^\sigma(x^{\sigma_1}_{i_1}, \ldots, x^{\sigma_n}_{i_n}),$$
где $(i_1, \ldots, i_n)$ — некоторая перестановка чисел от 1 до n. Очевидно, что на множестве всех булевых функций отношение обобщенной однотипности является отношением эквивалентности.

Множество всех функций, обобщенно однотипных с функцией d_3, обозначим через K. Нетрудно проверить, что множество K содержит всего 8 функций:

$$d_3(x_1, x_2, x_3) = (0001\ 0111), d_3(\bar{x}_1, x_2, x_3) = (0111\ 0001),$$
$$d_3(x_1, \bar{x}_2, x_3) = (0100\ 1101), d_3(x_1, x_2, \bar{x}_3) = (0010\ 1011),$$
$$d_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3) = (1101\ 0100), d_3(\bar{x}_1, x_2, \bar{x}_3) = (1011\ 0010),$$
$$d_3(x_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (1000\ 1110), d_3(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = (1110\ 1000).$$

Производной функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ по переменной x_i называется функция
$$f'_{x_i} = f^0_{x_i} \oplus f^1_{x_i}.$$

Функцию f будем называть *2-нежесткой*, если либо $\operatorname{rank} f < 2$, либо для любого $x \in \rho(f)$ справедливо включение $f \in M_x$ и выполняется одно из условий:
(1) $\delta(f) = \delta(f_x^0)$ и $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^1)$;
(2) $\delta(f) = \delta(f_x^1)$ и $\delta(f) \subsetneq \delta(f_x^0)$;
(3) существуют $y \in \rho(f'_x)$ такая, что справедливо строгое включение

$$\delta(f'_x) \subsetneq \delta((f'_x)'_y).$$

Функцию f будем называть *наследственно 2-нежесткой*, если сама f и все ее остаточные функции являются 2-нежесткими.

3. Вспомогательные результаты

В [3] получено необходимое и достаточное условие бесповторности булевых функций в базисе D (теорема 1), основанное на анализе остаточных функций и производных.

Теорема 1. *Функция f бесповторна в базисе D тогда и только тогда, когда она является наследственно 2-нежесткой.*

Далее с помощью теоремы 1 получен алгоритм нахождения бесповторных представлений булевых функций в базисе D. Отметим, что алгоритм нахождения бесповторных представлений булевых функций в $B_0 = D \setminus \{d_3\}$ построен в [2].

Ниже нам понадобится метод разделительной декомпозиции.

Функция f при разбиении множества переменных на $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ допускает разделительную декомпозицию, если существуют функции h и g такие, что выполняется

$$f(\tilde{u}, \tilde{v}) = h(\tilde{v}, g(\tilde{u})).$$

Теорема 2. *Для любой функции f равносильны следующие условия:*

1) f допускает разделительную декомпозицию при разбиении множества переменных на $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$;

2) среди всех остаточных функций от f по переменным $\tilde{v}$ не более двух различных;

3) существует функция t такая, что любая остаточная функция от f по переменным $\tilde{u}$ является либо константной, либо функцией t, либо функцией $\bar{t}$.

Доказательство теоремы 2 смотрите в [2].

4. Алгоритм нахождения бесповторных представлений булевых функций в базисе D

Алгоритм является рекурсивным, на вход подается существенная булева функция $f(\tilde{x})$ размерности не менее, чем 1, заданная в векторном виде. На выходе алгоритм находит бесповторный терм $\Phi(\tilde{x})$, представляющий $f(\tilde{x})$, или сообщает, что $f(\tilde{x})$ не является бесповторной в базисе D.

А. Проверяем, является ли функция $f(\tilde{x})$ наследственно 2-нежесткой. Если $f(\tilde{x})$ не является 2-нежесткой, то по теореме 1 она является повторной в D и алгоритм завершает работу, иначе переходим к шагу B.

B. Если функция $f(\tilde{x})$ является одноместной, т. е. $\tilde{x} = x_1$, то

$$\Phi(x_1) = x_1 \text{ или } \Phi(x_1) = \bar{x}_1.$$

C. К этому шагу переходим, если функция $f(\tilde{x})$ не является одноместной.

C.0. Произвольным образом выбираем одну переменную y и находим множества $\tilde{x}_0 = \delta(f_y^0)$, $\tilde{x}_1 = \delta(f_y^1)$. Если ровно одно из этих множеств пустое, то переходим к C.1. Если для любой переменной множества $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_1$ являются пустыми, то переходим к C.2.

C.1. К этому шагу переходим, если нашлась переменная y такая, что только одна из остаточных функций от функции $f(\tilde{x})$ по y несущественна.

C.1.a. К этому шагу переходим, если $\tilde{x}_0 \cup \{y\} = \tilde{x}$, т. е. f_y^0 – константная. Применив алгоритм к $f_y^1(\tilde{x}_0)$, найдем бесповторный терм $\Psi(\tilde{x}_0)$, представляющий функцию $f_y^1(\tilde{x}_0)$. Тогда искомый терм $\Phi(\tilde{x})$ будет определяться следующим образом:

$$\Phi(\tilde{x}) = (y \cdot (\Psi(\tilde{x}_0))^{\bar{\sigma}})^{\bar{\sigma}},$$

где $\sigma = f_y^0$.

C.1.b. К этому шагу переходим, если $\tilde{x}_1 \cup \{y\} = \tilde{x}$, т. е. функция f_y^1 – константная. Применив алгоритм к $f_y^0(\tilde{x}_1)$, найдем бесповторный терм $\Psi(\tilde{x}_1)$, представляющий функцию $f_y^0(\tilde{x}_1)$. Тогда искомый терм $\Phi(\tilde{x})$, будет определяться следующим образом:

$$\Phi(\tilde{x}) = (y \vee (\Psi(\tilde{x}_1))^{\sigma})^{\sigma},$$

где $\sigma = f_y^1$.

C.1.c. Обозначим $\tilde{u} = \{y\} \cup \tilde{x}_0 \cup \tilde{x}_1$ и $\tilde{v} = \tilde{x} \setminus \tilde{u}$. Этот шаг выполняется, если $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ оба непусты. Среди остаточных функций $f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}}$ найдем две различных. Обозначим их через $f_1(\tilde{v})$ и $f_2(\tilde{v})$.

Определим функции $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$ следующим образом:

$$h(\tilde{v}, z) = \bar{z} f_1(\tilde{v}) \vee z f_2(\tilde{v}),$$

$$g(\tilde{\tau}) = \begin{cases} 0, \text{ если } f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_1; \\ 1, \text{ если } f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_2. \end{cases}$$

Дважды применяем алгоритм для нахождения бесповторных термов $\Psi_h(\tilde{v}, z)$ и $\Psi_g(\tilde{u})$, представляющих $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$. Тогда искомый терм $\Phi(\tilde{x})$ будет определяться следующим образом:

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Psi_h(\tilde{v}, \Psi_g(\tilde{u})).$$

C.2. К этому шагу переходим, если обе остаточные функции от функции f по каждой переменной существенны. Если функция f является трехместной, то она принадлежит K, т. е. представляющий ее терм известен. Иначе выберем произвольным образом набор из трех переменных $\tilde{u} = (x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3})$. Среди остаточных функций $f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}}$ найдем две различных. Обозначим их через $f_1(\tilde{v})$ и $f_2(\tilde{v})$.

Определим функции $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$, где $\tilde{v} = \tilde{x} \setminus \tilde{u}$, следующим образом:

$$h(\tilde{v}, z) = \bar{z} f_1(\tilde{v}) \vee z f_2(\tilde{v}),$$

$$g(\tilde{\tau}) = \begin{cases} 0, \text{ если } f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_1; \\ 1, \text{ если } f_{\tilde{u}}^{\tilde{\tau}} = f_2. \end{cases}$$

Если функция $g(\tilde{u}) \notin K$, то выберем другой набор $\tilde{u}$ и повторим процедуру построения $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$.

Если выполняется $g(\tilde{u}) \in K$, дважды применяем алгоритм для нахождения бесповторных термов $\Psi_h(\tilde{v}, z)$ и $\Psi_g(\tilde{u})$, представляющих $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$. Тогда искомый терм $\Phi(\tilde{x})$ будет определяться следующим образом:

$$\Phi(\tilde{u}, \tilde{v}) = \Psi_h(\tilde{v}, \Psi_g(\tilde{u})).$$

Теорема 3. *Алгоритм нахождения бесповторных представлений булевых функций в базисе D является корректным.*

Доказательство. Корректность шага A достигается в силу теоремы 1. Далее доказательство теоремы проведем индукцией по числу n переменных функции f.

Базис индукции. Если $n = 1$, то функция f является одноместной и выполняется шаг B, который, очевидно, является корректным.

Шаг индукции. Пусть для всех функций размерности меньше, чем n алгоритм является корректным. Рассмотрим выполнение шага C. Оценив функции из базиса D, нетрудно заметить, что если функция f является существенной бесповторной в базисе D, а она является таковой в силу выполнения шага A, то для любой переменной y либо ровно одна из остаточных функций f_y^0, f_y^1 существенна, либо обе они существенны. Таким образом, выполняется либо условие пункта C.1, либо условие пункта C.2, т. е. пункт C.0 является корректным.

Пусть выполняется пункт C.1.a. Остаточная функция f_y^1 существенна, поэтому рекурсивный вызов алгоритма является корректным. В силу индуктивного предположения бесповторный терм $\Psi(\tilde{x}_0)$ представляет функцию $f_y^1(\tilde{x}_0)$. Теперь тот факт, что $\Phi(\tilde{x}) = (y \cdot (\Psi(\tilde{x}_0))^{\bar{\sigma}})^{\bar{\sigma}}$, где $\sigma = f_y^0$, представляет функцию f, легко проверяется разбором случаев $y = 0$ и $y = 1$. По построению терм $\Phi(\tilde{x})$ является бесповторным над D, т. е. алгоритм для f является корректным.

Корректность пункта C.1.b доказывается аналогично пункту C.1.a.

Пусть выполняется пункт C.1.c. Ровно одно из множеств $\tilde{x}_0$, $\tilde{x}_1$ непусто, будем для определенности считать, что $\tilde{x}_0$, тогда имеем $\tilde{u} = \{y\} \cup \tilde{x}_0$ и $\tilde{v} = \tilde{x} \setminus \tilde{u}$. В силу шага A функция f является бесповторной в D, тогда представляющий ее бесповторный терм $\Phi(\tilde{x})$ будет иметь подтерм $\Psi(\tilde{u})$ вида $y \cdot \Gamma(\tilde{x}_0)$ или $\bar{y} \vee \Gamma(\tilde{x}_0)$. Таким образом, выполняются условия разделительной декомпозиции теоремы 2, следовательно, $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = h(\tilde{v}, g(\tilde{u}))$. Остается применить предположение индукции к $h(\tilde{v}, z)$ и $g(\tilde{u})$).

Пусть выполняется пункт C.2. Функция f является бесповторной в D и обе остаточные функции от функции f по каждой переменной существенны. Это возможно только в случае, если либо $f \in K$, что сразу влечет корректность алгоритма, либо f допускает разделительную декомпозицию при разбиении множества переменных на $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$, т. е. $f(\tilde{u}, \tilde{v}) = h(\tilde{v}, g(\tilde{u}))$, где $g(\tilde{u})$ обобщенно однотипна функции d_3. Очевидно, что $g(\tilde{u})$ представима термом, бесповторным над D. По предположению индукции для $h(\tilde{v}, z)$ алгоритм является корректным. Следовательно, для f алгоритм также является корректным. □

Проверим работу алгоритма на примере функции

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 0100\ 0100\ 0100\ 1101).$$

Вызов алгоритма 1.

А. Проверим является ли функция f наследственно 2-нежесткой. Для этого нужно проверить свойство 2-нежесткости для f и всех ее остаточных функций по любому множеству переменных. Приведем список функций, который достаточно будет проверить с учетом того факта, что если функция является 2-нежесткой, то это свойство выполняется и для любой обобщенно однотипной с ней функции.

1) $f = (1111\ 1111\ 1111\ 1111\ 0100\ 0100\ 0100\ 1101)$,
2) $f_1 = (1111\ 1111\ 0100\ 1101)$,
3) $f_2 = (1111\ 1111\ 0101\ 0111)$,
4) $f_3 = (1111\ 1111\ 0000\ 0001)$,
5) $f_4 = (1111\ 0100)$,
6) $f_5 = (0100\ 1101)$,
7) $f_6 = (0000\ 0001)$,
8) $f_7 = (0100)$.

1) Найдем остаточные функции от функции f по каждой переменной:
$f^0_{x_1} = (1111\ 1111\ 1111\ 1111)$, $\delta(f^0_{x_1}) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$;
$f^1_{x_1} = (0100\ 0100\ 0100\ 1101)$, $\delta(f^1_{x_1}) = \varnothing$;
$f^0_{x_2} = (1111\ 1111\ 0100\ 0100)$, $\delta(f^0_{x_2}) = \{x_3\}$;
$f^1_{x_2} = (1111\ 1111\ 0100\ 1101)$, $\delta(f^1_{x_2}) = \varnothing$;
$f^0_{x_3} = (1111\ 1111\ 0100\ 0100)$, $\delta(f^0_{x_3}) = \{x_2\}$;
$f^1_{x_3} = (1111\ 1111\ 0100\ 1101)$, $\delta(f^1_{x_3}) = \varnothing$;
$f^0_{x_4} = (1111\ 1111\ 0101\ 0111)$, $\delta(f^0_{x_4}) = \varnothing$;
$f^1_{x_4} = (1111\ 1111\ 0000\ 0001)$, $\delta(f^1_{x_4}) = \varnothing$;
$f^0_{x_5} = (1111\ 1111\ 0000\ 0010)$, $\delta(f^0_{x_5}) = \varnothing$;
$f^1_{x_5} = (1111\ 1111\ 1010\ 1011)$, $\delta(f^1_{x_5}) = \varnothing$.

Как видно, f является обобщенно монотонной по каждой переменной. Очевидно, что любая остаточная функция от функции f по любому множеству переменных также является обобщенно монотонной по каждой переменной, поэтому проверку на это свойство в дальнейшем будем пропускать. Для переменных x_1, x_2, x_3 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции, убедимся, что для x_4 и x_5 выполняется третье условие. Действительно, это верно в силу того, что $\delta(f'_{x_4}) = \varnothing$, $\delta(f'_{x_5}) = \varnothing$, $\delta((f'_{x_4})'_{x_2}) = \{x_5\}$, $\delta((f'_{x_5})'_{x_2}) = \{x_4\}$. Итак, функция f является 2-нежесткой.

2) Найдем остаточные функции от функции f_1 по каждой переменной:
$(f_1)^0_{x_1} = (1111\ 1111)$, $\delta((f_1)^0_{x_1}) = \{x_2, x_3, x_4\}$;
$(f_1)^1_{x_1} = (0100\ 1101)$, $\delta((f_1)^1_{x_1}) = \varnothing$;
$(f_1)^0_{x_2} = (1111\ 0100)$, $\delta((f_1)^0_{x_2}) = \varnothing$;
$(f_1)^1_{x_2} = (1111\ 1101)$, $\delta((f_1)^1_{x_2}) = \varnothing$;
$(f_1)^0_{x_3} = (1111\ 0111)$, $\delta((f_1)^0_{x_3}) = \varnothing$;
$(f_1)^1_{x_3} = (1111\ 0001)$, $\delta((f_1)^1_{x_3}) = \varnothing$;
$(f_1)^0_{x_4} = (1111\ 0010)$, $\delta((f_1)^0_{x_4}) = \varnothing$;
$(f_1)^1_{x_4} = (1111\ 1011)$, $\delta((f_1)^1_{x_4}) = \varnothing$.

Очевидно, что для x_1 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции. Для остальных переменных выполняется третье условие 2-нежесткой функции, так как $\delta((f_1)'_{x_2}) = \varnothing$, $\delta(((f_1)'_{x_2})'_{x_4}) = \{x_3\}$, $\delta((f_1)'_{x_3}) = \varnothing$, $\delta(((f_1)'_{x_3})'_{x_4}) = \{x_2\}$, $\delta((f_1)'_{x_4}) = \varnothing$, $\delta(((f_1)'_{x_4})'_{x_3}) = \{x_2\}$. Итак, функция f_1 является 2-нежесткой.

3) Найдем остаточные функции от функции f_2 по каждой переменной:

$(f_2)^0_{x_1} = (1111\ 1111)$, $\delta((f_2)^0_{x_1}) = \{x_2, x_3, x_4\}$;
$(f_2)^1_{x_1} = (0101\ 0111)$, $\delta((f_2)^1_{x_1}) = \varnothing$;
$(f_2)^0_{x_2} = (1111\ 0101)$, $\delta((f_2)^0_{x_2}) = \{x_3\}$;
$(f_2)^1_{x_2} = (1111\ 0111)$, $\delta((f_2)^1_{x_2}) = \varnothing$;
$(f_2)^0_{x_3} = (1111\ 0101)$, $\delta((f_2)^0_{x_3}) = \{x_2\}$;
$(f_2)^1_{x_3} = (1111\ 0111)$, $\delta((f_2)^1_{x_3}) = \varnothing$;
$(f_2)^0_{x_4} = (1111\ 0001)$, $\delta((f_2)^0_{x_4}) = \varnothing$;
$(f_2)^1_{x_4} = (1111\ 1111)$, $\delta((f_2)^1_{x_4}) = \{x_1, x_2, x_3\}$.

Очевидно, что для x_1, x_2, x_3 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции, а для x_4 выполняется первое условие. Итак, функция f_2 является 2-нежесткой.

4) Найдем остаточные функции от функции f_3 по каждой переменной:
$(f_3)^0_{x_1} = (1111\ 1111)$, $\delta((f_3)^0_{x_1}) = \{x_2, x_3, x_4\}$;
$(f_3)^1_{x_1} = (0000\ 0001)$, $\delta((f_3)^1_{x_1}) = \varnothing$;
$(f_3)^0_{x_2} = (1111\ 0000)$, $\delta((f_3)^0_{x_2}) = \{x_3, x_4\}$;
$(f_3)^1_{x_2} = (1111\ 0001)$, $\delta((f_3)^1_{x_2}) = \varnothing$;
$(f_3)^0_{x_3} = (1111\ 0000)$, $\delta((f_3)^0_{x_3}) = \{x_2, x_4\}$;
$(f_3)^1_{x_3} = (1111\ 0001)$, $\delta((f_3)^1_{x_3}) = \varnothing$;
$(f_3)^0_{x_4} = (1111\ 0000)$, $\delta((f_3)^0_{x_4}) = \{x_2, x_3\}$;
$(f_3)^1_{x_4} = (1111\ 0001)$, $\delta((f_3)^1_{x_4}) = \varnothing$.

Очевидно, что для x_1, x_2, x_3, x_4 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции. Итак, функция f_3 является 2-нежесткой.

5) Найдем остаточные функции от функции f_4 по каждой переменной:
$(f_4)^0_{x_1} = (1111)$, $\delta((f_4)^0_{x_1}) = \{x_2, x_3\}$;
$(f_4)^1_{x_1} = (0100)$, $\delta((f_4)^1_{x_1}) = \varnothing$;
$(f_4)^0_{x_2} = (1101)$, $\delta((f_4)^0_{x_2}) = \varnothing$;
$(f_4)^1_{x_2} = (1100)$, $\delta((f_4)^1_{x_2}) = \{x_3\}$;
$(f_4)^0_{x_3} = (1100)$, $\delta((f_4)^0_{x_3}) = \{x_2\}$;
$(f_4)^1_{x_3} = (1110)$, $\delta((f_4)^1_{x_3}) = \varnothing$.

Очевидно, что для x_1, x_3 выполняется второе условие определения 2-нежесткой функции, а для x_2 выполняется первое условие. Итак, функция f_4 является 2-нежесткой.

6) Найдем остаточные функции от функции f_5 по каждой переменной:
$(f_5)^0_{x_1} = (0100)$, $\delta((f_5)^0_{x_1}) = \varnothing$;
$(f_5)^1_{x_1} = (1101)$, $\delta((f_5)^1_{x_1}) = \varnothing$;
$(f_5)^0_{x_2} = (0111)$, $\delta((f_5)^0_{x_2}) = \varnothing$;
$(f_5)^1_{x_2} = (0001)$, $\delta((f_5)^1_{x_2}) = \varnothing$;
$(f_5)^0_{x_3} = (0010)$, $\delta((f_5)^0_{x_3}) = \varnothing$;
$(f_5)^1_{x_3} = (1011)$, $\delta((f_5)^1_{x_3}) = \varnothing$.

Для x_1, x_2, x_3 выполняется третье условие 2-нежесткой функции, так как $\delta((f_5)'_{x_1}) = \varnothing$, $\delta((((f_5)'_{x_1})'_{x_2}) = \{x_3\}$, $\delta((f_5)'_{x_2}) = \varnothing$, $\delta((((f_5)'_{x_2})'_{x_1}) = \{x_3\}$, $\delta((f_5)'_{x_3}) = \varnothing$, $\delta((((f_5)'_{x_3})'_{x_1}) = \{x_2\}$. Итак, функция f_5 является 2-нежесткой.

Случаи 7) и 8) аналогичны случаю 5).

Таким образом, функция f является наследственно 2-нежесткой, поэтому по теореме 1 бесповторна в D.

Вызов алгоритма 2.

C.0. Находим $\tilde{x}_0 = \delta(f^0_{x_1})$, $\tilde{x}_1 = \delta(f^1_{x_1})$:

$$f^0_{x_1} = (1111\ 1111\ 1111\ 1111), f^1_{x_1} = (0100\ 0100\ 0100\ 1101),$$

т. е. $\tilde{x}_0 = \delta(f^0_{x_1}) = \{x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $\tilde{x}_1 = \delta(f^1_{x_1}) = \varnothing$. Очевидно, выполняется условие пункта C.1.a, поэтому переходим к нему.

C.1.a. Применив алгоритм к $f^1_{x_1}(\tilde{x}_0)$ (вызов 3), найдем бесповторный терм $\Psi(\tilde{x}_0) = d_3(x_2 \cdot x_3, \bar{x}_4, x_5)$, представляющий функцию $f^1_{x_1}(\tilde{x}_0)$. Тогда искомый терм $\Phi(\tilde{x}) = \overline{x_1 \cdot \bar{d}_3(x_2 \cdot x_3, \bar{x}_4, x_5)}$.

Вызов алгоритма 3.

C.0. $f(x_2, x_3, x_4, x_5) = (0100\ 0100\ 0100\ 1101)$. Находим $\tilde{x}_0 = \delta(f^0_{x_2})$, $\tilde{x}_1 = \delta(f^1_{x_2})$:

$$f^0_{x_2} = (0100\ 0100), f^1_{x_2} = (0100\ 1101),$$

т. е. $\tilde{x}_0 = \delta(f^0_{x_2}) = \{x_3\}$, $\tilde{x}_1 = \delta(f^1_{x_2}) = \varnothing$. Выполняется условие пункта C.1.c, поэтому переходим к нему.

C.1.c. Находим $\tilde{u} = \{x_2, x_3\}$, $\tilde{v} = \{x_4, x_5\}$. Вычисляем остаточные функции от f по x_1, x_2:

$$f_1(x_4, x_5) = (0100), f_2(x_4, x_5) = (1101).$$

Находим функции $h(z, x_4, x_5) = (0100\ 1101)$ и $g(x_2, x_3) = (0001)$.

Применив алгоритм к $h(z, x_4, x_5) = (0100\ 1101)$ (вызов 4), найдем бесповторный терм $\Psi_h(z, x_4, x_5) = d_3(z, \bar{x}_4, x_5)$. Применив алгоритм к $g(x_2, x_3) = (0001)$ (вызов 5), найдем бесповторный терм $\Psi_g(x_2, x_3) = x_2 \cdot x_3$.Тогда искомый терм $\Phi(x_2, x_3, x_4, x_5) = d_3(x_2 \cdot x_3, \bar{x}_4, x_5)$.

Вызов алгоритма 4.

C.0. $f(z, x_4, x_5) = (0100\ 1101)$. Для любой переменной множества $\tilde{x}_0$ и $\tilde{x}_1$ являются пустыми, переходим к C.2.

C.2. Поскольку $f \in K$, имеем искомый терм $\Phi(z, x_4, x_5) = d_3(z, \bar{x}_4, x_5)$.

Вызов алгоритма 5.

C.0. $f(x_2, x_3) = (0001)$. Находим $\tilde{x}_0 = \delta(f^0_{x_2})$, $\tilde{x}_2 = \delta(f^1_{x_1})$:

$$f^0_{x_2} = (00), f^1_{x_2} = (01),$$

т. е. $\tilde{x}_0 = \delta(f^0_{x_2}) = \{x_3\}$, $\tilde{x}_1 = \delta(f^1_{x_2}) = \varnothing$. Очевидно, выполняется условие пункта C.1.a, поэтому переходим к нему.

C.1.a. Применив алгоритм к $f^1_{x_2}(x_3)$ (вызов 6), найдем бесповторный терм $\Psi(x_3) = x_3$, представляющий функцию $f^1_{x_2}(x_3)$. Тогда искомый терм

$$\Phi(x_2, x_3) = x_2 \cdot x_3.$$

Вызов алгоритма 6.

B. $f(x_3) = (01)$. Функция f одноместная, поэтому искомый терм $\Phi(x_3) = x_3$.

References

[1] A.V. Kuznetsov, *On Repetition-Free Contact Circuits and Repetition-Free Superpositions of Logic Functions*, Trudi Mat. Instit. AN USSR, **51** (1958), 186–225.

[2] S.F. Vinokurov, N.A. Peryazev, *Selected Questions of Theory of Boolean functions*, Fizmatlit, M., 2001.

[3] N.A. Peryazev, I.K. Sharankhaev, *Repetition-free Criteria for a Boolean Function in the Pre-elementary Bases of Rank 3*, Discrete Math. Appl., **15**:3 (2005), 299–311. `http://www.mathnet.ru/php/archive.phtml?wshow=paper&jrnid=dm&paperid=104&option_lang=eng`

[4] N.A. Peryazev, *Fundamentals of Theory of Boolean Functions*, Fizmatlit, M., 1999.

Ivan Konstantinovich Sharankhaev
Dorzhi Banzarov Buryat State University,
st. Smolina, 24a,
670000, Ulan-Ude, Russia
E-mail address: goran5@mail.ru