

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

<http://semr.math.nsc.ru>

Том ***, стр. ***-*** (20**)
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx

УДК 519.632.4
MSC 86A25

ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ГАРМОНИЧЕСКОЕ ПОЛЕ В
АНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Э.П. ШУРИНА, Е.И. ШТАНЬКО, Д.А. АРХИПОВ

АБСТРАКТ. The paper considers the interaction of a harmonic electromagnetic field excited by a solenoidal source with a layered anisotropic medium. The source position varies with respect to the day surface. The computational scheme based on the vector finite elements method on the simplex adaptive mesh is implemented in this work. The performed realization allows considering the conductivity of certain subdomains of the computational domain as the second-rank tensor, which reflects the anisotropic behavior of the electromagnetic field during propagating in rocks and soils. The source-loop is introduced into the discrete model of the computational domain at the mesh level, taking into account its geometry. Authors analyze the influence of the field source position on the wave process propagation in the layered medium depending on the conductivity contrast of its layers and the geometry of the media interface on the signal in the receivers and the distribution of the induced non-zero components of the electromagnetic field on the day surface. A conclusion is made about the optimal position of the field source when investigating the subsurface at shallow depths.

Keywords: vector finite element method, electromagnetic field, anisotropic medium, solenoidal field source.

1. ВВЕДЕНИЕ

Корректное представление источника электромагнитного поля в вычислительной схеме – сложная задача. Источники электромагнитного поля можно

SHURINA E.P., SHTANKO E.I., ARHIPOV D.A. ELECTROMAGNETIC HARMONIC FIELD IN AN ANISOTROPIC MEDIUM.

© 2022 ШУРИНА Э.П., ШТАНЬКО Е.И., АРХИПОВ Д.А..

Работа выполнена при поддержке проекта FWZZ-2022-0025.

Поступила 1* марта 2022 г., опубликована ** *** 20** г.

разделить на несколько видов по их геометрии (точечные, линия, петля, катушка) и по характеру воздействия (импульсные, гармонические, стационарные). Источники могут быть разделены на электрические и магнитные.

Задачи, в которых источник излучения является точечным, или при некоторых допущениях может рассматриваться как точечный, возникают в основном в оптике, исследовании метаматериалов и в некоторых геофизических приложениях [1]-[4]. Точечным принято называть тот источник, размерами и геометрией которого в масштабах задачи можно пренебречь и считать его точкой. Точечные источники широко отражены в литературе, благодаря относительной простоте их учета: нет необходимости в аппроксимации их геометрии.

Точечный источник вводится в систему уравнений Максвелла как δ -функция [3]. В работе [3] рассматривается взаимодействие введенного таким образом источника и двухслойной среды, состоящей из проводящего и непроводящего слоев.

В [2] рассматривается многофизическая задача, сочетающая моделирование упругих деформаций и распространение электромагнитного поля в геологической среде. Плоские электромагнитные волны возбуждаются конечными разломами, возникающими в результате землетрясений. Каждый из подразломов при этом рассматривается как точечный источник электромагнитного поля (электрокинетический эффект). При этом точечный источник вводится как тензорная функция.

В настоящее время представляет интерес исследование взаимодействия волн от точечного источника с различными слоистыми средами и метаматериалами с отрицательными электрофизическими характеристиками [4].

Математические модели, в которых в качестве источника электромагнитного излучения выступает диполь, получили широкое распространение в наземной и морской геофизике [1], [5]-[10]. Диполи разделяются на магнитные и электрические. Электрический диполь состоит из двух зарядов одинаковой величины [1]. При моделировании в ближней зоне модель с диполем дает серьезную вычислительную погрешность, и многие авторы приходят к выводу что точечный источник представляет реальный источник точнее, чем диполь [1], [5]. В [1] приведено сравнение результатов вычисления электрического и магнитного полей во временной области в однородном пространстве от простого точечного источника и от диполя.

Магнитный диполь – абстракция, введенная по аналогии с электрическим диполем. В геофизических исследованиях магнитным диполем принято считать плоскую проводящую замкнутую рамку или катушку, при этом предполагается, что в условиях рассматриваемой задачи точной геометрией источника можно пренебречь [9], [10]. В [7] исследуется влияние расстояния между источником-диполем и точкой наблюдения на значение компонент \mathbf{E}_ϕ и \mathbf{H}_z в двухслойной среде. В [6] решается аналогичная задача, но с позиций прямого численного моделирования электрического и магнитного полей в двумерной среде с включениями, в то время как в [7] приводится асимптотическое разложение аналитического интегрального выражения, выведенного для описания поведения отдельных компонент поля при заданных параметрах задачи. В [11]-[15] рассматривается применение такого типа источников для задач морской геоэлектрики. В [13] вводится конечноэлементная постановка как для диполя, так и для электрической петли. Моделирование, в отличие от [11], [12], [14],

[15], выполняется в анизотропных средах с тензорными величинами электропроводности для различных подобластей расчетной области.

Линейные источники электромагнитного поля приведены в [16]-[20]. В [16] рассмотрены особенности моделирования линейного источника, работающего в импульсном режиме, для двух непроводящих полупространств с различными значениями диэлектрической и магнитной проницаемости. Моделирование выполняется для двумерного случая и источник вводится как δ -функция двух пространственных координат x и z . Случай проводящего нижнего полупространства рассмотрен в [17]. Источник введен аналогичным с [16] образом. Влияние проводящей неоднородности на распространение поля от линейного источника в двумерной среде исследовано в [18]. Взаимодействие поля от линейного импульсного источника с тонкими проводящими пластинами приведено в [19], рассмотрены различные типы импульсного сигнала. В [20] линейный источник усложняется и представляет собой антенну – массив металлических линий на диэлектрической подложке. Для определения напряженности электрического поля такого источника вводится интегральное аналитическое выражение, учитывающее период расположения металлических полос. В [21] обсуждается трехмерное прямое моделирование электромагнитного поля на акустических частотах с управляемым источником в среде с тензорными электрофизическими характеристиками векторным методом конечных элементов. Возбуждение поля выполняется двумя линейными конечномерными перекрещивающимися источниками, расположенными на горизонтальной поверхности и ориентированными вдоль координатных направлений x и y . Такой подход позволяет вычислять импеданс и его фазу, и кажущееся сопротивление, представленные тензорными величинами.

Источник электромагнитного поля в виде замкнутой петли широко применяется при моделировании задач электроразведки и электромагнитного зондирования [22]-[25]. В [22] рассматривается учет горизонтально расположенной петли, работающей в гармоническом режиме. В [22] учет источника петли проводится аналогично линейному источнику – через δ -функцию, но в цилиндрических координатах. Моделирование выполнено для слоистой среды в широком диапазоне частот источника поля. В [23] для исследования отклика слоистой среды на воздействие круговым источником-петлей в широком диапазоне частот вводятся аналитические интегральные выражения в виде несобственных интегралов для компонент электромагнитного поля \mathbf{H}_z , \mathbf{H}_r и \mathbf{E}_ϕ . В [24], [25] в качестве источника электромагнитного поля рассматривается прямоугольная рамка, которая учитывается авторами в конечноэлементной постановке как магнитный диполь. Применение систем программно-контролируемых источников-петель/контуров (controlled-source) в различных геофизических приложениях приведено в [14], [26]. В [26] рассматривается задача инверсии внутренней структуры среды на основе решения серии прямых задач моделирования трехмерного электромагнитного поля, источником которого является двойной горизонтальный контур, излучающий в гармоническом режиме.

Одна из первых попыток введения тороидальных токовых источников показана в [27], где рассмотрено поле тороидальных, зависящих от времени токовых конфигураций. Однако в [27] предлагается рассматривать источник не с

учетом всех его геометрических особенностей, а введением некоторой параметризации плотности тока. В [28] приведено подробное исследование катушки с тороидальным ферритовым сердечником с учетом всех геометрических параметров данного источника, таких как геометрия сердечника и плотность обмотки. Проведено исследование особенностей излучения такой конфигурации и ее взаимодействия с окружающей средой. Устанавливается, что топология обмотки является основным фактором, влияющим на конфигурацию поля и его амплитуду. В [29] в качестве источника электромагнитного поля выступает стальная обсадка вертикальной скважины, которая рассматривается как заземленный электрод. На данных численного эксперимента показана возможность использования подобного подхода для мониторинга коллектора путем измерения составляющих электрического поля на поверхности на удалении от коллектора.

В данной работе исследуется влияние положения токовой петли относительно дневной поверхности на формирование электромагнитного поля в слоистой среде, одна из подобластей которой проявляет анизотропные свойства. В качестве источников электромагнитного поля будут рассмотрены горизонтальные, вертикальные и наклонные петли. Численное моделирование проведено в средах с тензорными значениями удельной электропроводности. Реализованная вычислительная схема строится на базе векторного метода конечных элементов [30]-[32] для трехмерных расчетных областей на симплицальной адаптивном сеточном разбиении, учитывающем геометрию петли. Выполненный анализ позволяет сформулировать методические указания к способам проведения наземных электромагнитных измерений для исследования недр на малых глубинах.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Уравнение Гельмгольца для напряженности электрического поля \mathbf{E} [В/м] в расчетной области Ω при гармоническом возбуждении $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$ имеет вид:

$$(1) \quad \operatorname{rot} \mu^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -i\omega \mathbf{J} \text{ в } \Omega$$

где $k^2 = i\omega\sigma - \omega^2\varepsilon$, $\omega = 2\pi f$ – циклическая частота [Гц], $\varepsilon = \varepsilon_r\varepsilon_0$ – диэлектрическая проницаемость [Ф/м], ε_r – относительная диэлектрическая проницаемость, $\varepsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ Ф/м; $\mu = \mu_r\mu_0$ – магнитная проницаемость [Гн/м], μ_r – относительная магнитная проницаемость, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ Гн/м; σ – удельная электропроводность среды [См/м], Ω – расчетная область [м³] с границей $\partial\Omega$.

На границах расчетной области заданы однородные электрические краевые условия:

$$(2) \quad \mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\partial\Omega} = \mathbf{0}$$

где \mathbf{n} – внешняя единичная нормаль к границе расчетной области.

3. ВАРИАЦИОННАЯ ПОСТАНОВКА

Введем следующие функциональные пространства:

$$(3) \quad \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \mid \text{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \}$$

$$(4) \quad \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega) = \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega) \mid \mathbf{u} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

где $\mathbf{L}^2(\Omega)$ – гильбертово пространство векторных функций, интегрируемых с квадратом. В пространствах (3)-(4) обеспечивается непрерывность тангенциального следа векторной функции на внутренних границах. В (3)-(4) определены норма

$$(5) \quad \|\mathbf{u}\|_{\text{rot}, \Omega}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\Omega} (\text{rot} \mathbf{u}) \cdot (\text{rot} \mathbf{u}^*) d\Omega$$

и скалярное произведение

$$(6) \quad (\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}^* d\Omega + \int_{\Omega} (\text{rot} \mathbf{u}) \cdot (\text{rot} \mathbf{v}^*) d\Omega$$

Вариационная постановка принимает вид: для $\mathbf{J} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E} \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ такое, что $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ выполняется

$$(7) \quad \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} d\Omega = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{v} d\Omega$$

Дискретизация области моделирования выполняется на неструктурированном адаптивном симплицеальном разбиении, учитывающем геометрию источника поля

$$(8) \quad T_h = \left\{ \Omega = \bigcup_{l=1}^N \Omega_l, \forall \Omega_l, \Omega_j \in T_h, \quad l \neq j \quad \Omega_l \cap \Omega_j = \Gamma_{lj} \right\}$$

Для построения дискретной вариационной постановки вводится конечномерное подпространство пространства $\mathbf{H}_0^h(\text{rot}, \Omega) \subset \mathbf{H}_0(\text{rot}, \Omega)$ и базисные функции $\mathbf{w}_i^h \in \mathbf{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$, $i = 1, \dots, N$, где N – количество базисных функций. Дискретная вариационная постановка формулируется следующим образом: для $\mathbf{J} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ найти $\mathbf{E}^h \in \mathbf{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ такое, что для любых функций $\mathbf{v}^h \in \mathbf{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$ выполняется

$$(9) \quad \int_{\Omega} \mu^{-1} \text{rot} \mathbf{E}^h \cdot \text{rot} \mathbf{v}^h d\Omega + \int_{\Omega} k^2 \mathbf{E}^h \cdot \mathbf{v}^h d\Omega = -i\omega \int_{\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{v}^h d\Omega$$

Интерполянт \mathbf{E}^h по введенному базису имеет вид:

$$(10) \quad \mathbf{E}^h(\mathbf{x}) = \sum_i q_i \mathbf{w}_i^h(\mathbf{x})$$

где q_i – веса разложения \mathbf{E}^h по базису пространства $\mathbf{H}_0^h(\text{rot}, \Omega)$. Положим $\mathbf{v}^h = \mathbf{w}_j^h(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, N$, тогда в матрично-векторной форме (9) принимает вид:

$$(11) \quad (\mu^{-1} \mathbf{G} + k^2 \mathbf{B}) \mathbf{q} = \mathbf{F}$$

где

$$(12) \quad [\mathbf{G}]_{ij} = \mu^{-1} \int_{\Omega_l} \operatorname{rot} \mathbf{w}_i^l \cdot \operatorname{rot} \mathbf{w}_j^l d\Omega$$

$$(13) \quad [\mathbf{B}]_{ij} = \int_{\Omega_l} k^2 \mathbf{w}_i^l \cdot \mathbf{w}_j^l d\Omega$$

$$(14) \quad [\mathbf{F}]_i = -i\omega \int_{\Omega_l} \mathbf{J} \cdot \mathbf{w}_i^l d\Omega$$

здесь $\Omega_l \in T_h$, \mathbf{w}_i^l – определенные на конечном элементе Ω_l базисные функции.

Удельная электропроводность среды σ является тензорной величиной вида $\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$ и не приводится к диагональной форме [30], [31].

Умножение тензора σ на векторные базисные функции \mathbf{w}_i^l в (13) выполняется в соответствии с правилом скалярного умножения тензора на вектор [33].

4. ОСОБЕННОСТИ УЧЕТА СОЛЕНОИДАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ПОЛЯ

Пусть источник электромагнитного поля – петля с поперечным сечением во много раз меньшим чем радиус петли. Такой источник представим δ -функцией [22]:

$$(15) \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{x}_l \in G_h} (\delta(x - x_l) \delta(y - y_l) \delta(z - z_l) \boldsymbol{\tau}_l \cdot |\mathbf{J}|)$$

где G_h – множество точек, лежащих на ребрах сеточного разбиения петли, $\boldsymbol{\tau}_l$ – единичный вектор, сонаправленный с вектором плотности тока на рассматриваемом ребре сеточного разбиения. Точки с координатами (x_l, y_l, z_l) принадлежат ребрам сетки, аппроксимирующим петлю с радиусом r и центром в точке $O(x_0, y_0, z_0)$. В зависимости от положения петли в пространстве будут преобладать различные компоненты электрического поля \mathbf{E} . Горизонтальная петля, лежащая в плоскости XY , генерирует поле с ведущими компонентами \mathbf{E}_x и \mathbf{E}_y . Для вертикальной петли, лежащей в плоскости YZ , преобладают компоненты \mathbf{E}_y и \mathbf{E}_z . Наклонная петля генерирует все три компоненты электрического поля.

5. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

5.1. Влияние ориентации петли. Влияние ориентации петли относительно горизонтальной дневной поверхности исследуется в области $\Omega = [0..20 \text{ м}] \times [0..20 \text{ м}] \times [0..14 \text{ м}]$ (рис.1). Граница раздела сред – горизонтальная поверхность. Высота слоя Ω_1 составляет 8 м, слоя Ω_2 – 1 м. Слой Ω_3 – воздух.

Заданы следующие электрофизические характеристики: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_0$. Значение σ_1 и σ_2 варьировались. Исследования выполнялись на частоте $f = 10$ кГц.

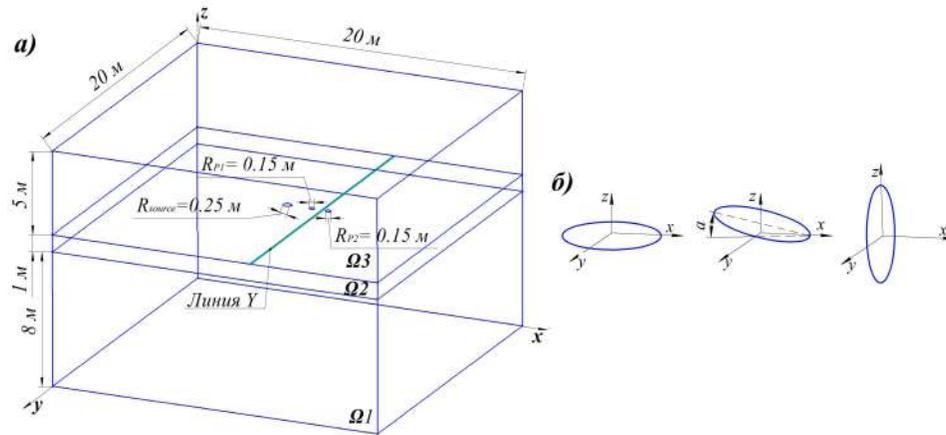


Рис. 1. а) расчетная область Ω . Граница раздела сред – горизонтальная поверхность; б) положения петли: горизонтальная петля в плоскости XY , наклонная петля под углом α , вертикальная петля в плоскости YZ .

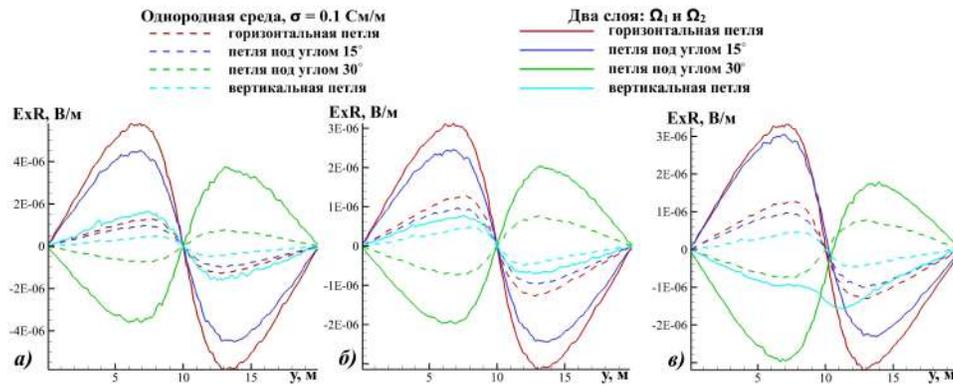


Рис. 2. Напряженность электрического поля по линии Y на дневной поверхности для четырех положений петли. Варьируется удельная электропроводность подобласти Ω_1 (для Ω_2 $\sigma_2 = 0.1$ См/м): а) $\sigma_1 = 1$ См/м (изотропный слой Ω_1); б) $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м (анизотропный слой Ω_1); в) σ_1 – плотный тензор (анизотропный слой Ω_1).

Результаты расчетов (рис.2) представлены по линии Y : $x = 12$ м, $z = 9$ м, лежащей на дневной поверхности, 1.75 м от генераторной петли (рис.1.а). Для наклонной петли рассмотрены 2 положения $\alpha = \pi/12 = 15^\circ$ и $\alpha = \pi/6 = 30^\circ$.

На рисунке 2 приведено распределение действительной компоненты E_x по линии Y для различных положений петли. На рисунке 2.а показаны результаты, когда Ω_1 и Ω_2 – изотропные среды с характеристиками: $\sigma_1 = 1$ См/м, $\sigma_2 = 0.1$ См/м. На рисунке 2.б – для расчетной области, у которой нижний слой Ω_1 анизотропный, его удельная электропроводность задана диагональным тензором $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м. Верхний слой Ω_2 изотропный:

$\sigma_2 = 0.1$ См/м. На рисунке 2.в показаны результаты для среды, у которой слой Ω_1 – анизотропный, его удельная электропроводность - плотный тензор

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.095 & 0.3 \\ 0.095 & 0.1 & 0.01 \\ 0.3 & 0.01 & 0.75 \end{pmatrix} \text{ См/м. Слой } \Omega_2 \text{ – изотропный: } \sigma_2 = 0.1 \text{ См/м.}$$

Наибольшее отклонение амплитуды поля от рассчитанной для однородной среды ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ См/м) наблюдается для всех рассмотренных положений источника в случае скалярной удельной электропроводности нижнего слоя Ω_1 . В данном случае максимальная амплитуда действительной компоненты напряженности \mathbf{E}_x электрического поля возрастает по сравнению с однородной средой в 5 раз для горизонтальной и расположенных под углами 15° и 30° петель и в 3.8 раза для вертикальной петли. Наклон петли на 15° незначительно уменьшает значение напряженности поля \mathbf{E} по сравнению с горизонтальным положением петли. Для петли, расположенной под углом 30° к дневной поверхности распределение поля в расчетной области, значительно изменяется – происходит поворот поля на 180° .

Для поля от вертикальной петли фиксируется наименьшее по амплитуде электрическое поле на дневной поверхности для всех рассмотренных конфигураций среды, что связано с геометрическим расположением приемников относительно источника. В случае диагонального тензора амплитуда фиксируемых на поверхности компонент электрического поля возрастает для различных положений петли в 1.7-2.7 раза (относительно случая $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ См/м). Наибольший рост по сравнению с однородной средой отмечается для петли, расположенной под углом 30° . Это же расположение дает наибольший рост амплитуды \mathbf{E}_x^R в случае, когда удельная электропроводность среды Ω_1 – плотный тензор.

На рисунках 3-4 приведено распределение действительной и мнимой компоненты \mathbf{E}_x на дневной поверхности для расчетной области Ω , состоящей из анизотропного слоя Ω_1 : $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м; и изотропного слоя Ω_2 : $\sigma_2 = 0.1$ См/м. Рассмотрены 4 положения генерирующей петли.

Положение петли влияет на распределение как действительных компонент \mathbf{E}_x и \mathbf{E}_y поля в плоскости дневной поверхности, так и мнимых. Для действительной части влияние значительнее – амплитуда меняется на порядок. В мнимой части влияние меньше – амплитуда меняется в пределах 1.5-2 раз, в дальнейших исследованиях мнимая компонента поэтому приводиться не будет.

В таблице 1 приведено значение ЭДС_{отн}, рассчитанное как

$$(16) \quad \text{ЭДС}_{\text{отн}} = \frac{\text{ЭДС}^{P_1} - \text{ЭДС}^{P_2}}{\text{ЭДС}_{\sigma=0.1}^{P_1} - \text{ЭДС}_{\sigma=0.1}^{P_2}}$$

где P_1 – первая приемная петля, P_2 – вторая приемная петля (рис.1.а). ЭДС_{отн} в однородной среде с $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ См/м равна 1.

Согласно приведенным в таблице результатам, поведение электрического поля \mathbf{E} , порожденного горизонтальной петлей, расположенной в плоскости XY, и наклонной петлей (угол наклона 15°) практически совпадает, если нижний слой Ω_1 представлен скалярным значением удельной электропроводности или диагональным тензором. В данных случаях угол наклона в 15° не позволяет получить значимо отличные результаты. Поведение поля при возбуждении всеми рассмотренными источниками значительно отличается от поведения в однородной среде в случае скалярной удельной электропроводности нижнего слоя Ω_1 .

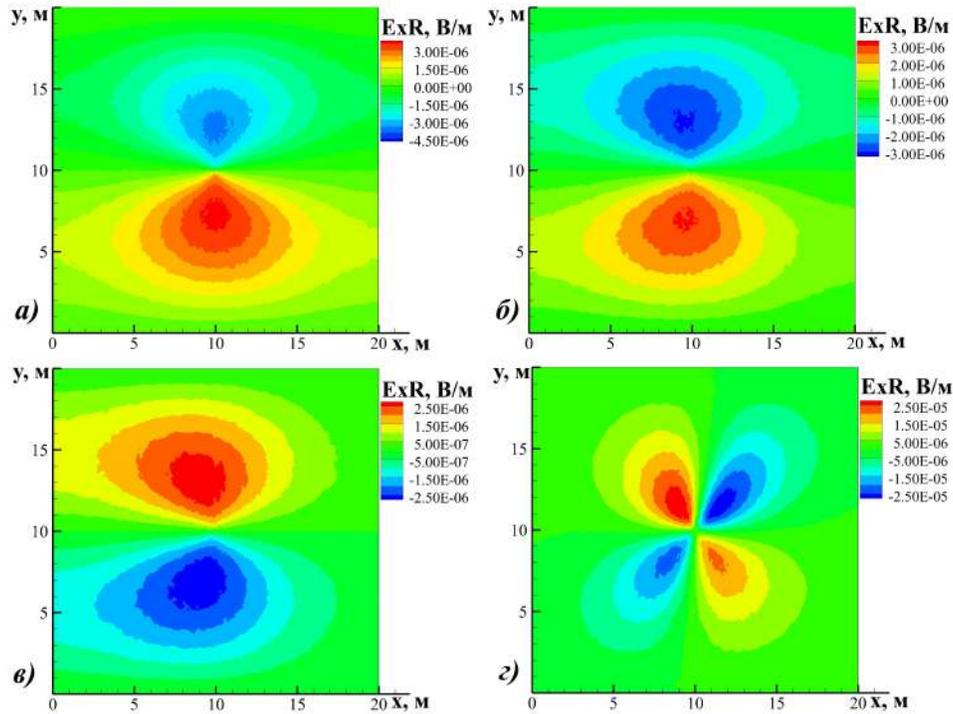


Рис. 3. Действительная компонента \mathbf{E}_x^R в плоскости XU (дневная поверхность). Среда состоит из 2 слоев: анизотропный слой Ω_1 с $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м, изотропный слой Ω_2 с $\sigma_2 = 0.1$ См/м; а) горизонтальная петля; б) петля под углом 15° ; в) петля под углом 30° ; г) вертикальная петля.

Таблица 1. ЭДС_{отн.}. Удельная электропроводность Ω_1 варьируется, для Ω_2 : $\sigma_2 = 0.1$ См/м

Положение петли	$\sigma_1 = 1$ См/м	σ_1 диагональный тензор	σ_1 плотный тензор
Петля XU	3.82E+00	1.31E+00	1.23E+00
Петля под углом 15°	4.03E+00	1.33E+00	8.81E-01
Петля под углом 30°	5.53E+00	1.51E+00	6.12E-01
Петля вертикальная	3.98E-01	8.90E-01	5.12E-01

В случае диагонального тензора с рассмотренными характеристиками фиксируемое приемниками значение ЭДС увеличивается на 30%–50% по сравнению с однородной средой для горизонтальной и наклонных петель-источников. Для вертикальной петли значение ЭДС уменьшается на 10%, такое положение петли наименее информативно при рассмотренной системе приемников. Для приведенного плотного тензора только в случае горизонтального расположения петли-источника отмечается рост ЭДС в сравнении с однородной средой на 23%. Для остальных положений значение ЭДС уменьшается на 10%–50%. Для

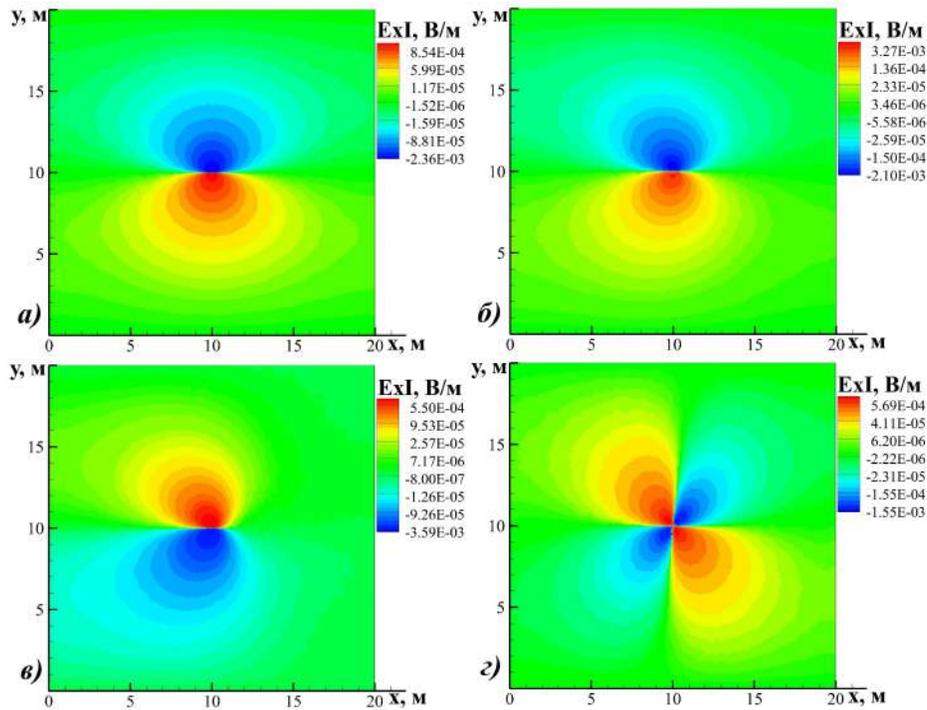


Рис. 4. Мнимая компонента \mathbf{E}_x^I в плоскости XU (дневная поверхность). Среда состоит из 2 слоев: анизотропный слой Ω_1 с $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м, изотропный слой Ω_2 с $\sigma_2 = 0.1$ См/м; а) горизонтальная петля; б) петля под углом 15° ; в) петля под углом 30° ; г) вертикальная петля.

вертикальной петли реакция в приемниках при возбуждении поля таким источником для большинства из рассмотренных контрастностей сред по значению удельной электропроводности ниже, чем в случае других источников.

5.2. Влияние контрастности удельной электропроводности. Зафиксируем тип источника – горизонтальная петля. В качестве расчетной области будем рассматривать среду с горизонтальной границей раздела подобластей (рис.1).

5.2.1. Диагональный тензор. Исследуем формирование электрического поля в случае, когда для нижней подобласти Ω_1 удельная электропроводность среды представлена в виде диагонального тензора. Далее сравниваются результаты расчетов для следующих слоистых сред:

- 1) $\sigma_1 = 1$ См/м, $\sigma_2 = 0.1$ См/м;
- 2) $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м, $\sigma_2 = 0.1$ См/м;

и однородных сред (значения электрофизических характеристик для Ω_1 и Ω_2 равны):

- 3) однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ См/м;
- 4) однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ См/м;

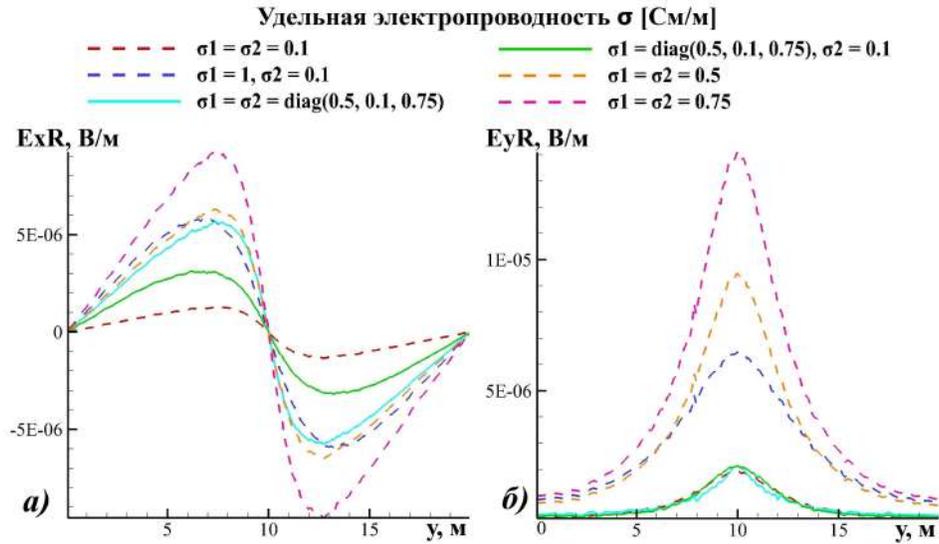


Рис. 5. Компоненты поля \mathbf{E} по горизонтальной линии Y на дневной поверхности для горизонтальной петли, расположенной в плоскости XU , и горизонтальной границы раздела сред: а) E_x действительная; б) E_y действительная

5) однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.75$ См/м;

6) однородная анизотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м.

В сравнение включены однородные среды, удельная электропроводность которых равна одной из диагональных компонент тензора: п.4 – компоненте σ_{xx} рассмотренного диагонального тензора, п.3 – компоненте σ_{yy} , п.5 – компоненте σ_{zz} . Результаты моделирования приведены на рисунке 5.

Для действительных компонент \mathbf{E}_x и \mathbf{E}_y максимальное по амплитуде значение фиксируется для случая однородной изотропной среды с $\sigma = 0.75$ См/м. Для действительной компоненты \mathbf{E}_x минимальное значение отмечается для однородной среды с $\sigma = 0.1$ См/м. Для действительной компоненты \mathbf{E}_y поведение в однородных средах с $\sigma = 0.1$ См/м, в однородной анизотропной среде с $\sigma = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м и в слоистой среде с параметрами $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м, $\sigma_2 = 0.1$ См/м, практически идентично. Это связано с тем, что компонента σ_{yy} совпадает по значению с σ однородной среды и σ_2 слоистой среды. Для \mathbf{E}_x^R близкое поведение отмечается для кривых, полученных для $\sigma = 0.5$ См/м, для $\sigma = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м и для среды с параметрами $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м, $\sigma_2 = 0.1$ См/м. Для действительных компонент \mathbf{E}_x и \mathbf{E}_y кривые, соответствующие слоистой среде с характеристиками $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м, $\sigma_2 = 0.1$ См/м, лежат между кривыми однородной среды $\sigma = 0.1$ См/м и однородной среды $\sigma = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м. Остальные из рассмотренных кривых проходят значительно выше.

В таблице 2 приведены рассчитанные ЭДС. Вычисления выполнены по формуле

$$(17) \quad \text{ЭДС}_{P_1-P_2} = \text{ЭДС}_{P_1}^R - \text{ЭДС}_{P_2}^R$$

Таблица 2. ЭДС

Характеристики среды	ЭДС
Однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ См/м	4.51E-08
Однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ См/м	2.24E-07
Однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.75$ См/м	3.34E-07
Однородная анизотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м	2.15E-07
2 слоя: $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м, $\sigma_2 = 0.1$	5.93E-08
2 слоя: $\sigma_1 = 1$ См/м, $\sigma_2 = 0.1$	1.72E-07

где P_1 и P_2 – приемные петли на дневной поверхности (рис.1). Рассматривается только действительная часть рассчитанных ЭДС, так как разность мнимых практически не изменяется в рассмотренных случаях.

Приведенные в таблице результаты согласуются с описанным выше поведением кривых напряженности электрического поля \mathbf{E} на дневной поверхности. Рассчитанная ЭДС для однородной среды $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.75$ См/м в 7.4 раза больше, чем для однородной среды $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ См/м, что пропорционально изменению σ . ЭДС для однородной анизотропной среды $\sigma_1 = \sigma_2 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м практически совпадает с ЭДС, определенной для изотропной среды $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.5$ См/м. ЭДС, вычисленная в среде $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м, $\sigma_2 = 0.1$ См/м, наиболее близка к результатам в однородной изотропной среде $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ См/м (больше в 1.32 раза).

5.2.2. *Плотный тензор.* Исследуем формирование электрического поля в случае, когда для нижней подобласти Ω_1 удельная электропроводность среды представлена в виде плотного тензора. Далее сравниваются результаты расчетов для следующей слоистой среды:

$$1) \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.095 & 0.3 \\ 0.095 & 0.1 & 0.01 \\ 0.3 & 0.01 & 0.75 \end{pmatrix} \text{ См/м}, \sigma_2 = 0.1 \text{ См/м};$$

и однородных сред:

$$2) \text{ однородная анизотропная среда } \sigma_1 = \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.095 & 0.3 \\ 0.095 & 0.1 & 0.01 \\ 0.3 & 0.01 & 0.75 \end{pmatrix} \text{ См/м};$$

$$3) \text{ однородная изотропная среда } \sigma_1 = \sigma_2 = 0.721E - 1 \text{ См/м};$$

$$4) \text{ однородная изотропная среда } \sigma_1 = \sigma_2 = 0.323 \text{ См/м};$$

$$5) \text{ однородная изотропная среда } \sigma_1 = \sigma_2 = 0.954 \text{ См/м}.$$

Выбранные в п.3-5 значения удельной электропроводности для однородных сред соответствуют собственным значениям введенного плотного тензора п.1. Результаты расчетов приведены на рисунке 6.

Кривые \mathbf{E}_x -действительная и \mathbf{E}_y -действительная, полученные для слоистой среды, располагаются между кривыми для $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.721E - 1$ См/м и $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.954$ См/м. Данные значения удельной электропроводности соответствуют минимальному и максимальному собственным значениям плотного тензора.

ЭДС рассчитан по формуле 17 (табл.3).

ЭДС для слоистой среды, удельная электропроводность слоя Ω_1 которой представлена как плотный тензор, в 1.23 раза больше ЭДС для однородной

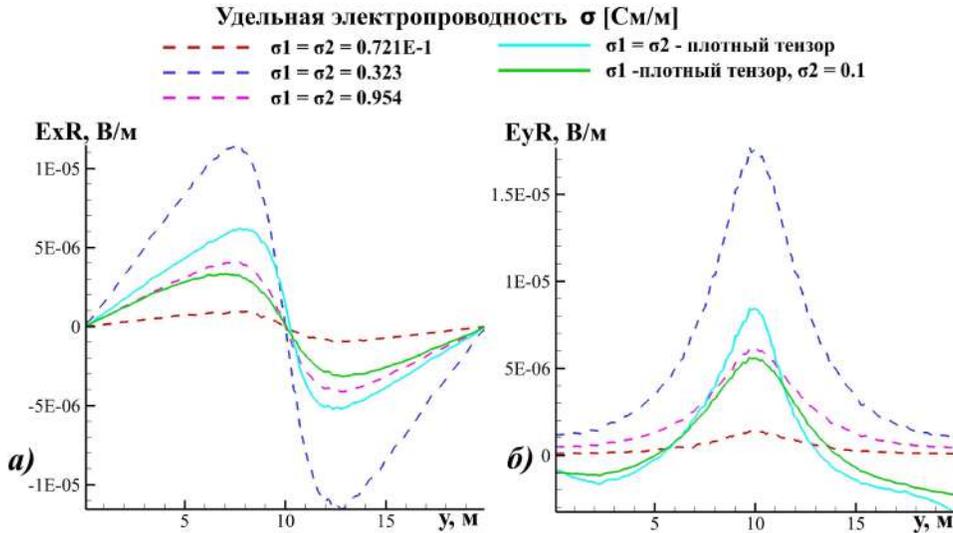


Рис. 6. Компоненты поля \mathbf{E} по горизонтальной линии Y для горизонтальной петли: а) E_x действительная; б) E_y действительная

ТАБЛИЦА 3. ЭДС

Характеристики среды	ЭДС
Однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.721E - 1$ См/м	3.25E-08
Однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.954$ См/м	4.23E-07
Однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.323$ См/м	1.45E-07
Однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ См/м	4.51E-08
Однородная анизотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2$ – плотный тензор	1.57E-07
2 слоя: σ_1 – плотный тензор, $\sigma_2 = 0.1$	5.57E-08

среды с характеристиками верхнего слоя Ω_2 (однородная изотропная среда $\sigma_1 = \sigma_2 = 0.1$ См/м).

5.3. Влияние формы границы раздела сред. Зафиксируем тип источника – горизонтальная петля.

5.3.1. Диагональный тензор. Пусть удельная электропроводность в подобласти Ω_1 задана как диагональный тензор $\sigma_1 = \text{diag}(0.5, 0.1, 0.75)$ См/м. Кроме приведенной на рисунке 1, рассмотрены следующие конфигурации расчетных областей (рис. 7):

На рисунке 8 приведено распределение действительных компонент поля \mathbf{E} по линии Y на дневной поверхности.

Распределение действительной компоненты E_x на дневной поверхности значительно изменяется при появлении границы раздела сред и изменении ее формы. Действительная компонента E_x наиболее чувствительна к изменению формы внутренней границы, что связано с особенностями рассмотренной геометрии расчетной области. Наименьшей амплитуды действительная компонента E_x достигает при отсутствии слоя Ω_1 под дневной поверхностью. Наибольшая

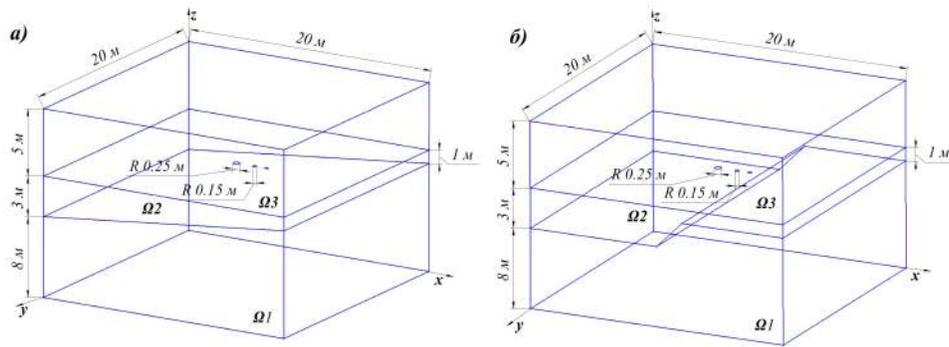


Рис. 7. а) наклонная граница раздела сред; б) ступенчатая граница раздела сред

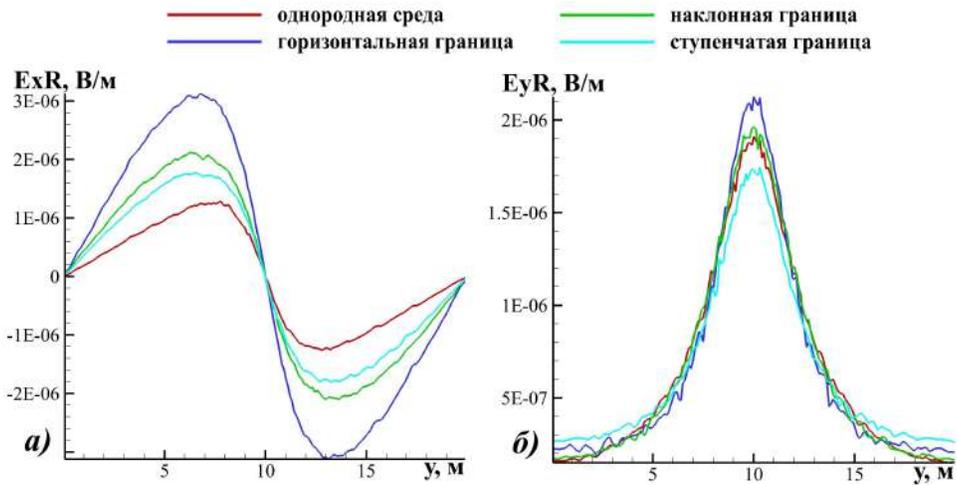


Рис. 8. Компоненты поля \mathbf{E} по горизонтальной линии Y для горизонтальной петли: а) E_x действительная; б) E_y действительная

амплитуда – для горизонтальной границы в случае, если источник представлен горизонтальной петлей. Кривая для ступенчатой границы и для наклонной границы проходят между кривыми для однородной среды и среды с горизонтальной границей раздела сред.

5.3.2. *Плотный тензор.* Удельная электропроводность подобласти Ω_1 задана как плотный тензор $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.095 & 0.3 \\ 0.095 & 0.1 & 0.01 \\ 0.3 & 0.01 & 0.75 \end{pmatrix}$ См/м. На рисунке 9 приведено распределение действительных компонент поля \mathbf{E} по линии Y на дневной поверхности.

Для действительных компонент E_x и E_y минимальные значения амплитуд достигаются для однородной среды, максимальные – для расчетной области с горизонтальной границей. Остальные кривые проходят между данными. Для

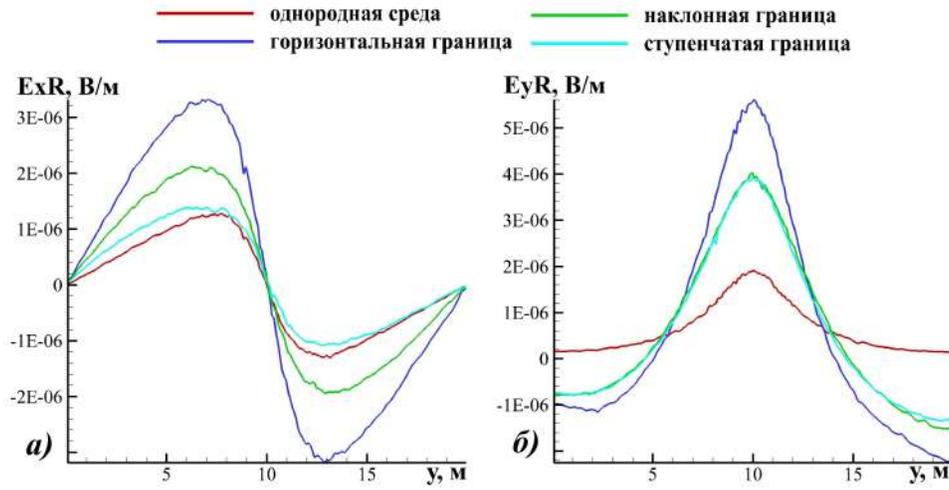


Рис. 9. Компоненты поля E по горизонтальной линии Y для горизонтальной петли: а) E_x действительная; б) E_y действительная

Таблица 4. ЭДС. $\sigma_2 = 0.1$ См/м, варьируется значение σ_1 и форма границы раздела сред Ω_1 и Ω_2

Характеристики среды	ЭДС
Однородная изотропная среда $\sigma_1 = 0.1$ См/м	4.51E-08
Горизонтальная граница, σ_1 – диагональный тензор	5.93E-08
Наклонная граница, σ_1 – диагональный тензор	4.66E-08
Ступенчатая граница, σ_1 – диагональный тензор	4.12E-08
Горизонтальная граница, σ_1 – плотный тензор	5.57E-08
Наклонная граница, σ_1 – плотный тензор	4.61E-08
Ступенчатая граница, σ_1 – плотный тензор	4.12E-08

компоненты E_x^R практически совпадают кривые, полученные для однородной среды и расчетной области со ступенчатой границей. Для компоненты E_y^R совпадают кривые для наклонной и ступенчатой границы.

ЭДС рассчитана по формуле 17 (табл. 4).

Согласно приведенным в таблице данным в случае, когда σ_1 – диагональный тензор или плотный тензор с заданными характеристиками, близкими к значению удельной электропроводности слоя Ω_2 , рассчитанное в петлях-приемниках значение ЭДС незначительно отличается от рассчитанного для однородной среды. Горизонтальная петля и система из двух расположенных на дневной поверхности приемников не позволяет отследить ни только форму границы раздела сред, но даже ее наличие в рассмотренных случаях.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для моделирования электромагнитного поля в среде с тензорным значением удельной электропроводности при возбуждении поля соленоидальным источником, работающим в гармоническом режиме, реализована вычислительная схема на базе векторного метода конечных элементов, позволяющая выполнять точный учет геометрии источника, без упрощения модели, и учитывать анизотропные свойства отдельных подобластей расчетной области. Выполнены численные расчеты для различных пространственных положений источника-петли в слоистой среде, один из слоев которой демонстрирует анизотропное поведение, которое может быть описано либо диагональным, либо плотным тензором удельной электропроводности. На основе проведенных численных экспериментов были сделаны следующие выводы:

1) При выполнении наземных измерений наиболее высокий по амплитуде сигнал в измерительных петлях получается при возбуждении поля петлей, расположенной под углом 30° при горизонтальной границе раздела сред под дневной поверхностью.

2) Для всех рассмотренных положений источника поля мнимая компонента поля \mathbf{E} на 1-2 порядка больше действительной, однако, менее чувствительна к наличию внутренней границы любой из рассмотренных форм под дневной поверхностью.

3) Наличие границы раздела сред с разными значениями удельной электропроводности значительно искажает распределение действительной компоненты \mathbf{E} на дневной поверхности по сравнению со случаем однородной среды.

4) При возбуждении поля горизонтальной петлей для среды с горизонтальной внутренней границей наиболее значимой при формировании поля оказывается контрастность компонент тензора σ_{xx} и σ_{yy} по сравнению с σ изотропного слоя.

5) В случае, если удельная электропроводность анизотропного слоя задана плотным тензором, то максимальная амплитуда ненулевых компонент \mathbf{E} на дневной поверхности лежит между рассчитанными для однородных сред, удельная электропроводность которых задается как собственные значения данного плотного тензора.

6) При любом положении петли наиболее “заметной” при измерении наземными методами является горизонтальная граница раздела сред для рассмотренной системы приемников.

В качестве развития данной работы предполагается провести численные эксперименты, воспроизводящие процедуру электромагнитных измерений в скважине при возбуждении поля как соленоидальными, так и тороидальными источниками гармонического электромагнитного поля.

REFERENCES

- [1] N.N. Zhou, G.G. Xue, H.Y. Wang, *Comparison of the time-domain electromagnetic field from an infinitesimal point charge and dipole source*, Applied Geophysics, **10**:3 (2013), 349–356.
- [2] H. Hu, Y. Gao., *Electromagnetic field generated by a finite fault due to electrokinetic effect*, Journal of Geophysical Research: Solid Earth, **116**:B08302 (2011), 1–14.
- [3] B.J. Kooij, *The electromagnetic field emitted by a pulsed current point source above the interface of a nonperfectly conducting Earth*, Radio Science, **31**:6 (1996), 1345–1360.

- [4] A.B. Petrin, *On the propagation of an electromagnetic wave in a medium with negative refraction from a point source located in air*, Journal of Experimental and Theoretical Physics Letters, **87**:9 (2008), 550–555. (in Russ.)
- [5] Y.T. Lo, *Electromagnetic field of a dipole source above a grounded dielectric slab*, Journal of Applied Physics, **25**:6 (1954), 733–740.
- [6] M.J. Unsworth, B.J. Travis, A.D. Chave, *Electromagnetic induction by a finite electric dipole source over a 2-D earth*, Geophysics, **58**:2 (1993), 198–214.
- [7] W.C. Chew, J.A. Kong, *Electromagnetic field of a dipole on a two-layer earth*, Geophysics, **46**:3 (1981), 309–315.
- [8] G.Q. Xue, S. Yan, N.N. Zhou, *Theoretical study on the error caused by dipole hypothesis of large loop TEM response*, Chinese J. Geophys, **54**:9 (2011), 2389–2396.
- [9] C.H. Stoyer, R.J. Greenfield, *Numerical solutions of the response of a two-dimensional earth to an oscillating magnetic dipole source*, Geophysics, **41**:3 (1976), 519–530.
- [10] R.J. Tolboll, N.B. Christensen, *Sensitivity functions of frequency-domain magnetic dipole-dipole systems*, Geophysics, **72**:2 (2007), F45–F56.2.
- [11] S. Constable, L.J. Srnka, *An introduction to marine controlled-source electromagnetic methods for hydrocarbon exploration*, Geophysics, **72**:2 (2007), WA3–WA12.
- [12] E.S. Um, D.L. Alumbaugh, *On the physics of the marine controlled-source electromagnetic method*, Geophysics, **72**:2 (2007), WA13–WA26.
- [13] V. Puzyrev, J. Koldan, J. de la Puente, G. Houzeaux, M. Vazquez, J.M. Cela, *A parallel finite-element method for three-dimensional controlled-source electromagnetic forward modelling*, Geophysical Journal International, **193**:2 (2013), 678–693.
- [14] M. Commer, G.A. Newman, *Three-dimensional controlled-source electromagnetic and magnetotelluric joint inversion*, Geophysical Journal International, **178**:3 (2009), 1305–1316.
- [15] A.M. Tehrani, E. Slob, *Fast and accurate three-dimensional controlled source electromagnetic modelling*, Geophysical Prospecting, **58**:6 (2010), 1133–1146.
- [16] A.T. De Hoop, *Pulsed electromagnetic radiation from a line source in a two-media configuration*, Radio Science, **14**:2 (1979), 253–268.
- [17] B.J. Kooij, *The transient electromagnetic field of an electric line source above a plane conducting earth*, IEEE transactions on electromagnetic compatibility, **33**:1 (1991), 19–24.
- [18] G.W. Hohmann, *Electromagnetic scattering by conductors in the earth near a line source of current*, Geophysics, **36**:1 (1971), 101–131.
- [19] T. Adrianus, L.L. Meng, L.J. Jiang, *Pulsed line source response of a thin sheet with high-contrast dielectric and conductive properties—A time-domain analysis*, IEEE transactions on antennas and propagation, **61**:11 (2013), 5649–5657.
- [20] H.Y.D. Yang, D.R. Jackson, *Theory of line-source radiation from a metal-strip grating dielectric-slab structure*, IEEE transactions on antennas and propagation, **48**:4 (2000), 556–564.
- [21] Y.C. Hu, T.L. Li, C.S. Fan, D.Y. Wang, J.P. Li, *Three-dimensional tensor controlled-source electromagnetic modeling based on the vector finite-element method*, Applied Geophysics, **12**:1 (2015), 35–46.
- [22] J. Ryu, H.F. Morrison, S.H. Ward, *Electromagnetic fields about a loop source of current*, Geophysics, **35**:5 (1970), 862–896.
- [23] N.P. Singh, T. Mogi, *Electromagnetic Response of a Large Circular Loop Source on a Layered Earth: A New Computation Method*, Pure and Applied Geophysics, **162**:1 (2005), 181–200.
- [24] J.H. Li, Z.Q. Zhu, S.C. Liu, S.H. Zeng, *3D numerical simulation for the transient electromagnetic field excited by the central loop based on the vector finite-element method*, Journal of Geophysics and Engineering, **8**:4 (2011), 560–567.
- [25] J. Li, C.G. Farquharson, X. Hu, *3D vector finite-element electromagnetic forward modeling for large loop sources using a total-field algorithm and unstructured tetrahedral grids*, Geophysics, **82**:1 (2017), E1–E16.
- [26] Y. Sasaki, M.A. Meju, *A multidimensional horizontal-loop controlled-source electromagnetic inversion method and its use to characterize heterogeneity in aquiferous fractured crystalline rocks*, Geophysical Journal International, **166**:1 (2006), 59–66.
- [27] G.N. Afanasiev, Y.P. Stepanovsky, *The electromagnetic field of elementary time-dependent toroidal sources*, Journal of Physics A: Mathematical and General, **28**:16 (1995), 4565.

- [28] P.E. Levy, C. Gautier, F. Costa, B. Revol, C. Labarre, *Accurate modeling of radiated electromagnetic field by a coil with a toroidal ferromagnetic core*, IEEE transactions on electromagnetic compatibility, **55**:5 (2013), 825–833.
- [29] W. Tang, A. Li, A. Swidinsky, J. Liu, *Three-dimensional controlled-source electromagnetic modelling with a well casing as a grounded source: a hybrid method of moments and finite element scheme*, Geophysical Prospecting, **63**:6 (2015), 1491–1507.
- [30] E.P. Shurina, N.V. Shtabel, *Analysis of vector finite element approximations of Maxwell's equations in anisotropic media*, Computational Technologies, **18**:4 (2013), 91–104. (in Russ.)
- [31] M.I. Epov, E.P. Shurina, N.V. Shtabel, *The mathematical modeling of the electric field in the media with anisotropic objects*, Applied Numerical Mathematics, **93** (2015), 164–175.
- [32] P. Monk, *Finite element methods for Maxwell's equations*, Oxford University Press, 2003.
- [33] E.N. Vilchevskaya, *Tensor algebra and tensor analysis*, St. Petersburg: Polytechnical University Press, 2012. (in Russ.)

ELLA PETROVNA SHURINA
NOVOSIBIRSK STATE TECHNICAL UNIVERSITY,
PR. K. MARKSA, 20,
630073, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: shurina@online.sinor.ru

EKATERINA IGOREVNA SHTANKO
TROFIMUK INSTITUTE OF PETROLEUM GEOLOGY AND GEOPHYSICS, SIBERIAN BRANCH OF
THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,
PR. KOPTYUGA, 3,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: mik_kat@ngs.ru

DMITRIY ALEKSANDROVICH ARKHIPOV
TROFIMUK INSTITUTE OF PETROLEUM GEOLOGY AND GEOPHYSICS, SIBERIAN BRANCH OF
THE RUSSIAN ACADEMY OF SCIENCES,
PR. KOPTYUGA, 3,
630090, NOVOSIBIRSK, RUSSIA
Email address: d_arhipov@list.ru