

Рецензия на статью
«НЕПРИВОДИМЫЕ КОВРЫ ЛИЕВА
ТИПА B_l , C_l И F_4 НАД ПОЛЯМИ»
А.О. Лихачёвой и Я.Н. Нужина

Содержание работы

Работа посвящена изучению подгрупп элементарных присоединённых групп Шевалле $\Phi(F)$ над полем F соответствующих приведённой неприводимой системе корней Φ . С подгруппой $H \leq \Phi(F)$ естественно связать набор «корневых» подгрупп $\mathfrak{A}_r = x_r(F) \cap H$, где $r \in \Phi$, которые отождествляются с аддитивными подгруппами F удовлетворяющими дополнительным условиям,

$$N_{r,s,i,j} \mathfrak{A}_r^i \mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}$$

вытекающим из коммутационной формы Шевалле всякий раз когда $ir + js$ является корнем (здесь i, j — целые положительные числа, $r, s \in \Phi$, $N_{r,s,i,j}$ — структурные константы группы Шевалле $\Phi(F)$, см. [St]).

Набор аддитивных подгрупп поля F с такими свойствами называют ковром. Естественной задачей, связанной с классификацией подгрупп, является классификация ковров. При дополнительном предположении, что хотя бы одна из корневых подгрупп \mathfrak{A}_r является векторным пространством над некоторым полем R таким, что F/R алгебраическое, ковры удаётся классифицировать. Значительная часть этой классификации получена в [L], однако случаи $\text{char } F = 0, 2$ для $\Phi = B_l, C_l, F_4$ оставались открытыми. Настоящая работа посвящена классификации ковров в указанных случаях. При этом ответ в характеристике 2 является принципиально новым по сравнению с известными ранее результатами в этом направлении.

Рекомендация

Статья содержит новый интересный результат, однако в настоящий момент в статье не вводятся аккуратно некоторые обозначения, не всегда аккуратно приведены ссылки, не хватает подробностей в некоторых доказательствах, и отсутствует обзор смежных результатов последних лет. Если это будет исправлено, я готов рекомендовать статью к публикации в журнале «Сибирские электронные математические известия».

Список замечаний

- Краткость Введения, разумеется, не является математической проблемой, однако для такой короткой статьи особенно важно объяснить место полученных результатов среди классических и современных работ. В частности, читателю важно получить ответ на вопрос, почему случаи характеристики 0 и 2 сорок лет оставались открытыми. В списке литературы присутствуют ссылки на статьи второго автора [N1, N2, NS]: объясните, пожалуйста, во Введении связь настоящей статьи с этими работами. Кроме того, укажите, какой статус имеет аналогичная задача для $\Phi = A_1$ и $\Phi = G_2$ при $\text{char } F = 0, 2, 3$.
- Я рекомендую авторам согласовать свою терминологию с какой-нибудь книгой о группах Шевалле, а не со статьёй, поскольку так будет удобнее для большинства читателей. В любом случае, хорошим стилем будет пояснить, обозначениям какой работы следуют авторы.
- Авторы не дают определения группы Шевалле в тексте. Между тем, этот термин в разных работах используется по-разному, даже если ограничиться текстами, которые содержатся в библиографии статьи. Например, в книге Картера [Ca] группа Шевалле понимается более узко, чем в [Ku, 7.28], которая следует книге Стейнберга [St]. Более того, в одной из недавних статей второго автора группой Шевалле называется группа точек групповой схемы Шевалле–Демазюра (см. [NS, Abstract]). Хорошим стилем мне кажется не только ясно написать, какой терминологии авторы следуют, но и предостеречь читателя от ошибки.
- Опечатка в определении ковра: поле сначала обозначается F , затем K .

- В формуле $\Phi(K) \cap x_r(F) = x_r(\mathfrak{A}_r)$ в определении замкнутости ковра по-видимому опечатка.
- Обозначение $\widehat{\Phi}(F)$ вводится но не используется. Кроме того, ссылка на [Ca] по-видимому не вполне аккуратна: насколько я понимаю, обозначение $\widehat{\mathcal{L}}(F)$ в этой книге не используется и расширенная группа Шевалле не определяется (и совершенно точно в [Ca] не используется обозначение $\widehat{\Phi}(F)$). Авторы правильно обращают внимание читателя, что термин «сопряжённые ковровые подгруппы» не означает, что подгруппы соражены элементом $\Phi(F)$, однако я рекомендую им не вводить лишних обозначений.
- Везде следует заменить «лемма N» на «Лемма N».
- В статье не определяется «неприводимый» ковёр.
- Нужно ли свойство неприводимости ковра в Лемме 2?
- По-видимому, ссылка в Лемме 4 не аккуратная (по крайней мере в arXiv'ной версии статьи [NS] нет Леммы 5).
- В Доказательстве Леммы 5 ссылка на [L, Лемма 3] не очень аккуратная: напишите подробнее, почему имеет место посылка [L, Лемма 3].
- Обозначения в доказательстве Теоремы 1 несколько сбивают с толку. Если $p_i, p_j \in \Pi$ и $p_i + p_j$ является корнем, то наверное $|i - j| = 1$. Кроме того, хорошим стилем будет добавить замечание о нумерации фундаментальных корней, тем более что нумерация фундаментальных корней системы B_2 (Рис. 2) не согласована с нумерацией Бурбаки: обычно первый корень длиннее второго.
- Фраза «... наши рассуждения не зависят от характеристики поля F , и, следовательно, мы рассматриваем общий случай...» определённо не самая удачная.
- Далее авторы пишут: «В силу связности графа Кокстера, ассоциированного с системой Φ , аналогичное утверждение справедливо...». Но, по-видимому, авторы имеют в виду: «*Пользуясь* связностью графа Кокстера, ассоциированного с системой Φ , мы докажем, что аналогичное утверждение справедливо...».
- Ссылка на [N2] конце доказательства Теоремы 1 не очень удобна для читателя. Сформулируйте нужное утверждение в тексте статьи.

Список литературы

- [Ca] R. Carter, “Simple groups of Lie type”, *Wiley and Sons*, London–New York–Sydney–Toronto (1972).
- [Ku] “The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory”, Eds.: V.D. Mazurov, E.I. Khukhro, *Sobolev Institute of Mathematics*, Novosibirsk, no. 19 (2018).
- [L] V. Levchuk, “On generating sets of root elements of Chevalley groups over a field”, *Algebra i Logika* 22:5 (1983) 504–517 (in Russian).
- [N1] Ya. Nuzhin, “Groups contained between groups of Lie type over various fields”, *Algebra and Logic*, 22:5 (1983) 378–389.
- [N2] Ya. Nuzhin, “Intermediate groups in the Chevalley groups of type B_l , C_l , F_4 and G_2 over the nonperfect fields of characteristic 2 and 3”, *Siberian Math. J.*, 54 (2013) 119–123.
- [NS] Ya. Nuzhin, A. Stepanov, “Subgroups of Chevalley groups of types B_l and C_l containing the group over a subring, and corresponding carpets”, *St. Petersburg Math. J.*, 31:4 (2020) 719–737.
- [St] R. Steinberg, “Lectures on Chevalley groups”, *Yale Univ.*, New Haven (1967).