S ⓔ MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 16, стр. 144–144 (2019) УДК 512.54
???.?
DOI 10.33048/semi.2019.16.xxx MSC ??X??

НЕПРИВОДИМЫЕ КОВРЫ ЛИЕВА ТИПА B_l, C_l И F_4 НАД ПОЛЯМИ

А.О. ЛИХАЧЁВА AND Я.Н. НУЖИН

Abstract. V.M. Levchuk described irreducible carpets of Lie type of rank greater than 1 over the field F, at least one additive subgroup of which is an R-module, where F is an algebraic extension of the field R, in assumption that the characteristic of the field F is different from 0 and 2 for the types B_l, C_l, F_4, and for the type G_2 it is different from 0, 2 and 3 (Algebra i Logika, 1983, 22, no. 5). It turned out that, up to conjugation by a diagonal element, all additive subgroups of such carpets coincide with one intermediate subfield between R and F. We solve a similar problem for carpets of types B_l, C_l, F_4 over a field of characteristic 0 and 2. It turned out that carpets appear in characteristic 2, which are parameterized by a pair of additive subgroups, and for types B_l and C_l one of these two additive subgroups may not be a field.

Keywords: Chevalley group, carpet of additive subgroups, carpet subgroup.

1. Введение

Пусть Φ — приведенная неразложимая система корней ранга l, $\Phi(F)$ — группа Шевалле типа Φ над полем F. Она порождается своими корневыми подгруппами $x_r(F) = \{x_r(t) \mid t \in F\},\ r \in \Phi$. Подгруппы $x_r(F)$ абелевы и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in F$ справедливы соотношения

$$x_r(t)x_r(u) = x_r(t+u). \tag{1}$$

Likhacheva, A.O., Nuzhin, Ya.N., Irreducible carpets of Lie type B_l, C_l and F_4 over fields.

Работа поддержана РНФ (грант 22-21-00733).

Поступила 1 января 2015 г., опубликована 31 декабря 2015 г.

Назовем *ковром типа* Φ *ранга* l *над* F набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$$

поля K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \text{ при } r, s, ir + js \in \Phi,\ i > 0,\ j > 0, \tag{2}$$

где $\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \mid a \in \mathfrak{A}_r\}$, а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j),\ r, s, ir + js \in \Phi. \tag{3}$$

Всякий ковер $\mathfrak{A}$ типа Φ над F определяет *ковровую* подгруппу

$$\Phi(\mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \mid r \in \Phi\rangle$$

группы $\Phi(F)$, где $\langle M\rangle$ — подгруппа, порожденная множеством M. Ковер $\mathfrak{A}$ называется *замкнутым*, если его ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, то есть если $\Phi(K) \cap x_r(F) = x_r(\mathfrak{A}_r)$ для всех $r \in \Phi$.

Используемое здесь определение ковра дал В.М. Левчук [1] (см. также [2, вопрос 7.28]), он же в статье [3] описал неприводимые ковры лиева типа ранга больше 1 над полем F, хотя бы одна аддитивная подгруппа которых является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R, в предположении, что характеристика поля F отлична от 0 и 2 для типов B_l, C_l, F_4, а для типа G_2 отлична от 0, 2 и 3. Оказалось, что с точностью до сопряжения диагональным элементом все аддитивные подгруппы этих ковров совпадают с одним промежуточным подполем между R и F. Назовем такие ковры *константными*. Мы решаем аналогичную задачу для ковров типа B_l, C_l, F_4 над полем характеристики 0 и 2. Выяснилось, что неконстантные ковры появляются только в характеристике 2 и они параметризуются парой аддитивных подгрупп, причем для типов B_l и C_l одна из этих двух аддитивных подгрупп может не быть полем и примеры таких ковров указаны в [4].

Основным результатом статьи является

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа B_l ($l \geq 2$), C_l ($l \geq 2$) или F_4 над полем F, причем хотя бы одна аддитивная подгруппа $\mathfrak{A}_r$ является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R. Тогда с точностью до сопряжения диагональным элементом либо $\mathfrak{A}_r = P$ при всех $r \in \Phi$, для некоторого подполя P поля F, либо $charF = 2$, существует несовершенное подполе K поля F и*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ короткий корень} \\ Q, & \text{если } r \text{ длинный корень} \end{cases}$$

для двух различных бесконечных аддитивных подгрупп P и Q поля K, удовлетворяющих включениям

$$K^2 \leq Q < P \leq K. \tag{4}$$

и равенствам

$$P = P^{-1}, \quad Q = Q^{-1}. \tag{5}$$

Кроме того, ковер $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ является замкнутым.

2. Предварительные результаты

Группа $\Phi(F)$ увеличивается до расширенной группы Шевалле $\widehat{\Phi}(F)$ при помощи всех диагональных элементов $h(\chi)$, где χ — F-характер целочисленной решетки корней $\mathbb{Z}\Phi$, то есть гомоморфизм аддитивной группы $\mathbb{Z}\Phi$ в мультипликативную группу F^* поля F [5, §7.1]. Любой F-характер χ однозначно задается значениями на фундаментальных корнях и для любых $r \in \Phi$ и $t \in F$

$$h(\chi)x_r(t)h(\chi)^{-1} = x_r(\chi(r)t). \tag{6}$$

То, что равенство (6) естественным образом сочетается с определением ковра, утверждает следующая

Лемма 1. [6, лемма 1] *Сопрягая диагональным элементом $h(\chi)$ ковровую подгруппу $\Phi(\mathfrak{A})$, получим ковровую подгруппу*

$$h(\chi)\Phi(\mathfrak{A})h(\chi)^{-1} = \Phi(\mathfrak{A}'),$$

определяемую ковром

$$\mathfrak{A}' = \{\mathfrak{A}'_r \mid r \in \Phi\}, \text{ где } \mathfrak{A}'_r = \chi(r)\mathfrak{A}_r.$$

Ковер $\mathfrak{A}'$ из леммы 1 естественно назвать *сопряженным* к исходному ковру $\mathfrak{A}$ и мы можем говорить о сопряженных коврах, не привязывая их к ковровым подгруппам. Поэтому допустимо такое высказывание. "С точностью до сопряжения диагональным элементом ковер $\mathfrak{A}$ совпадает с ковром $\mathfrak{A}'$."

Для системы корней типа A_2 условия ковровости имеют только один вид $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ (с точностью до вращения, см. рисунок 1).

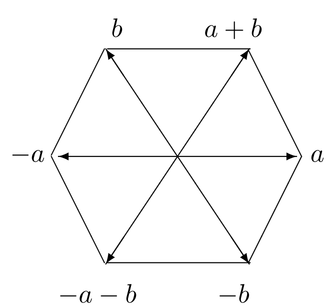

Рис. 1

Для системы корней Φ типа B_2 (см. рисунок 2) мы имеем три вида условий ковровости: $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$, $\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ и $2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$.

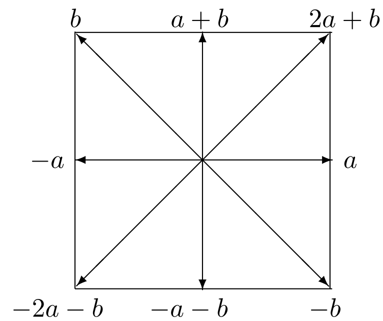

Рис. 2

Доказательство следующей леммы, фактически, повторяет рассуждения доказательства теоремы 2 из [7, стр. 530] для типа B_2, но там накладывалась инвариантность относительно диагональной подгруппы порядка больше 3 и в действительности рассматривались замкнутые ковры, хотя понятие "ковер" не использовалось. Здесь работают только условия ковровости.

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа B_2 над полем F, $\{a, b\}$ — фундаментальная система для Φ и пусть $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Тогда $t^n \in \mathfrak{A}_r$ для любого $t \in \mathfrak{A}_r$ и любого натурального числа n, если r есть $a+b$ или $2a+b$.*

Доказательство. В силу предположения $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$. Поэтому из включений $\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a-b}$ и $\mathfrak{A}^2_{-a}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-2a-b}$ получаем $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi^-$. Сейчас из условий ковровости $\mathfrak{A}^2_{a+b}\mathfrak{A}_{-b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ и $\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ получаем включения $\mathfrak{A}^2_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ и соответственно $\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$. Таким образом,

$$\mathfrak{A}^2_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}. \tag{7}$$

Далее, из условий ковровости $\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{-2a-b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a}$ следует $\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{-a}$. Объединяя последнее включение с условием ковровости $\mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$, получаем

$$\mathfrak{A}_{a+b}\mathfrak{A}_{2a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}. \tag{8}$$

Пусть $t \in \mathfrak{A}_{a+b}$. Из включений (7) следует $t^2 \in \mathfrak{A}_{a+b} \cap \mathfrak{A}_{2a+b}$. Отсюда и в силу включения (8) индукцией по n получаем $t^n \in \mathfrak{A}_{a+b}$ для всех натуральных чисел n.

Пусть $t \in \mathfrak{A}_{2a+b}$. Из включений (7) и (8) также легко следует, что $t^n \in \mathfrak{A}_{2a+b}$ для всех натуральных чисел n. □

Доказательство следующей леммы элементарно и мы его опускаем.

Лемма 3. *Пусть F — алгебраическое расширение поля R, A — ненулевая аддитивная подгруппа поля F, являющаяся R-модулем, и $t^n \in A$ для любого $t \in A$ и для всех натуральных чисел n. Тогда $1 \in A$ и $A = A^{-1}$, где A^{-1} состоит из всех обратных к ненулевым элементам из A в объединении с нулем.*

Лемма 4. [4, лемма 5] *Пусть $Q \subseteq P$ — аддитивные подгруппы поля F характеристики $p > 0$ с условиями:*

(1) $1 \in Q$;
(2) $P^p Q \subseteq Q$;
(3) $Q = Q^{-1}$.

Пусть K — наименьшее подполе в F, содержащее P. Тогда Q содержит поле K^p.

Лемма 5. *Пусть $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \mid r \in \Phi\}$ — неприводимый ковер типа A_2 или B_2 над полем F, $\{a, b\}$ — фундаментальная система для Φ, причем хотя бы одна аддитивная подгруппа $\mathfrak{A}_r$ является R-модулем, где F — алгебраическое расширение поля R. Тогда, если $1 \in \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$, то либо $\mathfrak{A}_r = P$ при всех $r \in \Phi$ для некоторого подполя P поля F, либо Φ типа B_2, $charK = 2$, существует несовершенное подполе K поля F и*

$$\mathfrak{A}_r = \begin{cases} P, & \text{если } r \text{ короткий корень} \\ Q, & \text{если } r \text{ длинный корень} \end{cases}$$

для двух различных бесконечных аддитивных подгрупп P и Q поля K, удовлетворяющих включениям

$$K^2 \leq Q < P \leq K. \tag{9}$$

и равенствам

$$P = P^{-1}, \quad Q = Q^{-1}. \tag{10}$$

Доказательство. Если Φ типа A_2 или $charF > 2$ и Φ типа B_2, то в силу [3, лемма 3] все $\mathfrak{A}_r$ совпадают с некоторым фиксированным подкольцом поля F, а по лемме 3 это подкольцо является полем. Пусть Φ типа B_2. Не теряя общности, можно считать, что $\mathfrak{A}_{a+b}$ или $\mathfrak{A}_{2a+b}$ является R-модулем.

Пусть $\mathfrak{A}_{a+b}$ является R-модулем. Тогда $1 \in \mathfrak{A}_{a+b}$ и $\mathfrak{A}_{a+b} = \mathfrak{A}_{a+b}^{-1}$ в силу лемм 2 и 3. Используя включение $1 \in \mathfrak{A}_{a+b} \cap \mathfrak{A}_{-a} \cap \mathfrak{A}_{-b}$ и условия ковровости, получаем $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех $r \in \Phi$. Сейчас применяя только условия ковровости, приходим к равенствам $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_s$ при $|r| = |s|$. Положим $\mathfrak{A}_r = P$, если r — короткий корень, и $\mathfrak{A}_r = Q$, если корень r длинный.

Если $charK \neq 2$, то из условий ковровости $\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$ и $2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$ следует, что $P = Q$ и P является подкольцом поля F, а следовательно, подполем в силу алгебраичности расширения F/R.

Пусть $charK = 2$. Тогда R^2 — поле и F — его алгебраическое расширение. Поскольку $\mathfrak{A}_{a+b}$ является R-модулем и $1 \in \mathfrak{A}_{a+b}$, то $R \subseteq \mathfrak{A}_{a+b}$. Поэтому аддитивная подгруппа $\mathfrak{A}_{2a+b}$ является R^2-модулем в силу условия ковровости $\mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b \subseteq \mathfrak{A}_{2a+b}$. Отсюда $1 \in \mathfrak{A}_{2a+b}$ и $\mathfrak{A}_{2a+b} = \mathfrak{A}_{2a+b}^{-1}$ снова в силу лемм 2 и 3. Таким образом, равенства (10) установлены, $1 \in Q$, $PQ \subseteq P$ и $P^2Q \subseteq Q$. Поэтому либо $P = Q$ и P — поле, либо по лемме 4 существует несовершенное подполе K поля F, удовлетворяющее включениям (9).

Второй случай, когда $\mathfrak{A}_{2a+b}$ является R-модулем, рассматривается подобным образом. $\square$

Лемма 6. [5, стр. 50] *Любой положительный корень $r \in \Phi^+$ может быть представлен в виде суммы фундаментальных корней $r = p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_k}$ таким образом, что $p_{i_1} + p_{i_2} + \cdots + p_{i_s}$ является корнем для всех $s \leq k$.*

3. Доказательство теоремы 1

Пусть $\Pi = \{p_1, \ldots, p_l\}$ — фундаментальная система корней системы корней Φ. С точностью до сопряжения диагональным элементом можно считать, что $1 \in \mathfrak{A}_{-p_i}$ для всех $p_i \in \Pi$. С другой стороны, не теряя общности можно считать, что для некоторых i, j одна из аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}_{p_i+p_j}$ или $\mathfrak{A}_{2p_i+p_j}$ является R-модулем. Пусть Φ_{ij} — подсистема корней с фундаментальной системой $\{p_i, p_j\}$. По лемме 5 $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких корней из Φ_{ij} и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных корней из Φ_{ij}, причем в данном случае мы не исключаем совпадения аддитивных подгрупп P и Q, так как наши рассуждения не зависят от характеристики поля F, и, следовательно, мы рассматриваем общий случай. В силу связности графа Кокстера, ассоциированного с системой Φ, аналогичное утверждение справедливо для любой подсистемы Φ_{km}, порожденной соседними корнями на графе Кокстера. В частности, $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких фундаментальных корней и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных фундаментальных корней, причем выполняются условия (4) и (5) из теоремы 1. Используя лемму 5, установим справедливость этого утверждения для всех аддитивных подгрупп индукцией по высоте корней $h(r)$, совпадающей с суммой коэффициентов в представлении корня r через Π. Но, для того чтобы применять лемму 5, сначала нужно получить включения $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех отрицательных корней $r \in \Phi^-$.

По лемме 6 любой отрицательный корень $r \in \Phi^-$ представляется в виде $r = s - p_i$, где $h(p_i) = 1$, $s \in \Phi^-$ и $|h(s)| = |h(r)| - 1$. Возможны три случая:

1) $\{s, -p_i\}$ — фундаментальная система типа A_2;

2) $\{s, -p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2;

3) $s, -p_i$ — короткие корни и они порождают подсистему корней типа B_2.

Индукцией по $|h(r)|$ установим включение $1 \in \mathfrak{A}_r$ для всех отрицательных корней $r \in \Phi^-$. В случаях 1) и 2) в силу условия ковровости $\mathfrak{A}_s\mathfrak{A}_{-p_i} \subseteq \mathfrak{A}_r$, а также индуктивного предположения, получаем включение $1 \in \mathfrak{A}_r$. В случае 3) сумма $s + p_i$ является корнем, p_i — короткий корень и $\{s + p_i, -p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2. Поэтому в силу условия ковровости $\mathfrak{A}^2_{-p_i}\mathfrak{A}_{s+p_i} \subseteq \mathfrak{A}_r$, а также индуктивного предположения, получаем включение $1 \in \mathfrak{A}_r$.

По лемме 6 любой положительный корень $r \in \Phi^+$ представим в виде $r = s + p_i$, где $h(p_i) = 1$, $h(s) = h(r) - 1$. Возможны три случая:

1) $\{s, p_i\}$ — фундаментальная система типа A_2;

2) $\{s, p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2;

3) s, p_i — короткие корни и они порождают подсистему корней типа B_2.

Индукцией по высоте корней покажем, что $\mathfrak{A}_{-r} = \mathfrak{A}_r$ и $\mathfrak{A}_r$ совпадает с P или Q в зависимости от длины корня r.

В случае 1) сразу получаем равенство $\mathfrak{A}_r = \mathfrak{A}_{p_i}$ в силу индуктивного предположения и леммы 5, где $\mathfrak{A}_{p_i}$ совпадает с P или Q. В случае 2) тоже сразу в силу индуктивного предположения и леммы 5 получаем равенство $\mathfrak{A}_r = P$, поскольку корень r короткий. В случае 3) разность $s - p_i$ является корнем, p_i — короткий корень и $\{s - p_i, p_i\}$ — фундаментальная система типа B_2. Поэтому $\mathfrak{A}_{p_i} = P$, а в силу индуктивного предположения $\mathfrak{A}_{s-p_i} = Q$. Отсюда $\mathfrak{A}_r = Q$ по лемме 5.

Итак, мы доказали, что $\mathfrak{A}_r = P$ для всех коротких и $\mathfrak{A}_r = Q$ для всех длинных корней. Условия (4) и (5) из теоремы 1 выполняются в силу леммы 5. При

$P = Q$ исходный ковер $\mathfrak{A}$ замкнут, так как при переходе к сопряженному ковру замкнутость не изменяется. Если же подгруппы P и Q различны, то в силу включений (4) ($K^2 \leq Q \leq P \leq K$) ковровая подгруппа $\Phi(\mathfrak{A})$ лежит между группами Шевалле $\Phi(K^2)$ и $\Phi(K)$ и тогда поле K должно быть несовершенным. Группы, лежащие между группами Шевалле над несовершенными полями, описаны в [8], и там же установлено, что они определяются замкнутыми коврами аддитивных подгрупп (см. также [4]). Таким образом, наш исходный ковер $\mathfrak{A}$ замкнут.

Теорема доказана.

References

[1] V.M. Levchuk, *Parabolic subgroups of certain ABA-groups*, *Mathematical Notes*, **31**:4 (1982), 509–525.

[2] *The Kourovka notebook: Unsolved Problems in Group Theory*, Eds. V.D. Mazurov, E.I. Khukhro, Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, 2018, no. 19.

[3] V.M. Levchuk, *On generating sets of root elements of Chevalley groups over a field*, Algebra i Logika, **22**:5 (1983), 504–517 (in Russian).

[4] Ya.N. Nuzhin and A.V. Stepanov, *Subgroups of Chevalley groups of types B_l and C_l containing the group over a subring, and corresponding carpets*, St Peterburg Math. J., **31**:4 (2020), 719–737.

[5] R. Carter, *Simple groups of lie type*, Wiley and Sons, London–New York–Sydney–Toronto, 1972.

[6] V.A. Koibaev, S.K. Kuklina, A.O. Likhacheva, Ya.N. Nuzhin, *Subgroups, of Chevalley Groups over a Locally Finite Field, Defined by a Family of Additive Subgroups*, Mathematical Notes, **102**:6 (2017), 792–798.

[7] Ya.N. Nuzhin, *Groups contained between groups of Lie type over various fields*, Algebra and Logic, **22**:5 1983), 378–389.

[8] Ya.N. Nuzhin, *Intermediate groups in the Chevalley groups of type B_l, C_l, F_4 and G_2 over the nonperfect fields of characteristic 2 and 3*, Siberian Math. J., **54** (2013), 119–123.

Alena Olegovna Likhacheva
Siberian Federal University,
pr.Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: likhacheva.alyona@mail.ru

Yakov Nifantevich Nuzhin
Siberian Federal University,
pr.Svobodny, 79,
660041, Krasnoyarsk, Russia
E-mail address: nuzhin2008@rambler.ru