Рецензия на статью “Splitting of c.e. degrees and superlowness” (автор: Marat Khaidarovich Faizrahmanov)

Работа посвящена исследованию вопросов разложимости в супернизких тьюринговых степенях. На сегодняшний день супернизкие степени являются одним из классических классов тьюринговых степеней, которые “близки” к вычислимым степеням. В частности, этот класс лежит строго между классом K-тривиальных степеней и классом низких степеней. Каждый из этих классов активно изучается в литературе, и в первую очередь представляет интерес элементарного различия или сходства между соответствующими структурами. Автором были замечены и доказаны две очень интересные теоремы о свойствах разложимости в супернизких степенях. Теорема 2 в качестве следствия дает элементарное различие между супернизкими вычислимо перечислимыми (далее, в.п.) и низкими в.п. тьюринговыми степенями. Несмотря на то, что это различие между этими структурами известно (например, в процитированной автором работе Гринберга, Доуни и Вебера [3] 2007 года), предложенный автором альтернативный вариант различия дает более “естественное” различие. В частности, эта естественность прослеживается и в конструкции, анализ которой показывает почему именно возникает такое различие между супернизкими в.п. и низкими в.п. степенями. Вторая теорема (теорема 5 в работе) с одной стороны отвечает на дальнейшие вопросы после теоремы 2, а с другой стороны на открытый вопрос из работы Нииса [2] 2006 года.

В теореме 2 доказывается, что для любых супернизких в.п. степеней $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ существует супернизкая в.п. степень $\mathbf{c}$, которая не разлагается на две в.п. степени, лежащие под $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, соответственно. Согласно известному результату Вэлша [4] это не является верным для низких в.п. степеней. Таким образом достигается элементарное различие между супернизики в.п. и низкими в.п. тьюринговыми степенями. Таким образом, теорема 2 достигается не за счет того, что супернизким степеням не хватает вычислительной сложности, для вычисления $\mathbf{c}$, а счет того, что не удается попасть в точности в степень $\mathbf{c}$. Здесь существенным образом помогает то, что мы всегда знаем количество изменений в заданном супернизком оракуле, более того, имея под контролем множество C всегда можем вынуждать эти изменения (при этом за счет косвенного контроля A_0 и B_0 все эти изменения будут происходить “вовремя”). Также было бы логично отметить, что $\mathbf{0}'$ разлагается на супернизкие в.п. степени, до теоремы 4 (которая является теоремой 2, но появляется в разделе доказательства теоремы 2). Это сняло бы у читателя ряд вопросов перед чтением доказательства теоремы 2.

Теорема 5 логически продолжает теорему 2, и здесь еще раз проявляется особенность супернизких степеней, а именно: две супернизкие степени не могут дать в точности заданную степень (при операции наименьшей верхней грани). Это достигается по-прежнему за счет известного количества изменений в супернизких оракулах и полным контролем за вынуждением этих изменений. Однако, поскольку нет равномерного перечисления в точности всех представителей супернизких степеней приходится иметь дело с в.п. множествами, не являющимися супернизкими. Поскольку эти случаи в конструкции никак не распознаются (если условия пункта 1 на стр. 149 никогда не выполняются, то это соответствует отсутствию супернизости), то значение функции для ограничения изменений в супернизком оракуле можем получить сколько угодно поздно. А значит стратегии с меньшим приоритетом не смогут в нужный момент эффективно оценить количество своих нарушений. Это на мой взгляд и есть ключевой момент конструкции, который показывает почему построенное множество A может быть низким, но не супернизким.

Доказательства теорем 2 и 5 являются верными, что можно установить на основе приведенных в статье деталей и полной конструкции. Верификация стандартна для метода приоритета с конечными нарушениями и легко восстанавливается. Поэтому полностью соглашусь с тем, что автор не стал приводить полную версию, а лишь указал ключевые моменты. Однако, небольшие интуитивные комментарии (например, после требований и перед конструкцией) сильно облегчили бы восприятия доказательств.

Считаю, что результаты статьи органично дополняют локальную теорию степеней по вопросам, связанным с супернизкими степенями, и будут интересны специалистам по теории вычислимости. Таким образом, статья может быть рекомендована для публикации в журнале “Сибирские электронные математические известия”.

Ниже также приводится ряд комментариев, связанных с текстом работы. Некоторые пункты дублируют пожелания выше.

1. Теорема 4 (доказательство). На мой взгляд наибольшая проблема, с которой сталкивается читатель в этой теореме – это совершенная неясность (при первом чтении) как используется множество C в оракуле R-требования (возможно, даже имеет смысл поменять местами в R-требовании $C = \Phi_e(W_p \oplus W_q)$ и $W_p \oplus W_q \neq \Phi_k(C)$, с заменой $=$ на $\neq$ и наоборот). А идея, если я правильно понимаю, следующая: используя супернизость имеем (эффективно и сразу находим) число m в рамках одного R-требования. Далее, постепенно начинаем выбирать свидетелей диагонализации $x_0 < x_1 < ... < x_m$, причем каждый следующий выбирается после завершения всех процедур с предыдущим (в частности, запрет для x_i на множество C будет меньше, чем x_{i+1}). Таким образом, перечисление x_{i+1} в C никак не будет портить приготовлений x_i, но заставит один из супернизких оракулов A или B поменяться еще один раз. В конце концов, в одной из точек x_{i_0} будет диагонализация, т.к. W_p и W_q не будут больше меняться (на соответствующих начальных интервалах), это является доводом, чтобы поменяться местами соответствующие части R-требования. При этом без нашего запрета на множество C свидетели x_i путали бы приготовления других x_j и не получилось бы заставлять меняться A и B на нужных начальных интервалах.

   Если это так, то хорошо бы как-нибудь выразить этот момент, именно для лучшего интуитивного восприятия доказательства читателем.

2. Теорема 5 (доказательство). Комментарий аналогичный предыдущему, но здесь читателю хочется пояснения почему стратегия из прошлой теоремы не работает и почему множество A не удается сделать супернизким (хотя похожим образом берем последовательности $x_0 < x_1 < ... < x_m$). Это как раз (если я правильно понимаю) из-за того, что необходимо подождать в пункте 1 стр. 149 выполнения $\varphi_{p,s}(z, m_p)$ и т.д., соответственно m узнаем только после этого, а значит заранее не сможем оценить количество нарушений для младших требований.

3. Замечание о разложении. Мне кажется, что замечание (непосредственно перед разделом 3 о том, что $\mathbf{0}'$ разлагается на супернизкие степени) должно идти перед теоремой 4 (или например дублироваться перед теоремой 4). Таким образом читателю будет сразу понятна логика возникновения теоремы 4, а также то, что нужно учитывать запретов на множество C в R-требованиях.

4. стр. 145, строка 17 снизу. Проверить еще раз, “called abject there” звучит для английского непривычно.

5. стр. 145-146. Теорема 2 и теорема 4 это одно и то же. Необходимо подправить нумерацию (включая сдвиг теоремы 5).

6. стр. 146, строка 14 снизу. Обратить внимание на фразу “the standard Friedberg-Muchnik strategy from the low simple set construction”. Насколько я помню, под стратегией Фридберга-Мучника обычно подразумевают стратегию диагонализации с учетом запретов в оракуле. Если предложенное автором наименовании для стратегии и встречается, то оно

достаточно редко, и тогда лучше сопроводить это ссылкой. Часто на эту стратегию для N-требований ссылаются просто как на “the standard lowness strategy” (как вариант можно добавить “...from the low simple set construction” и ссылку на главу 6 книги Соара)

7. стр. 146, строка 11 снизу. “define” вместо второго “set” выглядит лучше.
8. стр. 146, строка 2 снизу. Видимо индекса s у заглавной кси быть не должно. Более того, было бы хорошо подчеркнуть почему всегда сможем добиться того, чтобы оба этих функционала определились.
9. стр. 147, строка 19 снизу. Опечатка, должно быть “use-values” вместо “use-vales”.
10. стр. 147, строка 3 сверху. Опечатка, должно быть “is enumerated” вместо “enumerates”.
11. стр. 147, строка 1 снизу. Опять индекс s у заглавной кси лишний.
12. стр. 148, строка 11 сверху. Запреты “restraints” смотрятся более привычно, нежели “prohibitions”.
13. стр. 148. В целях единообразия в теореме 5 можно было бы заменить A на B, B на C и C на A (для совпадения с обозначениями теоремы 4).
14. стр. 149, строка 11 снизу. В данном случае $\varnothing$ (“varnothing”) выглядит лучше, чем $\emptyset$, т.к. последнее очень легко спутать с нулем.