S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, стр. 144–144 (2022) УДК 517.95
DOI 10.33048/semi.2022.16.xxx MSC 35A05

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ МАССОПЕРЕНОСА С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Ж.Ю. Сарицкая

Abstract. Global solvability of a boundary value problem for nonlinear mass-transfer equations under innhomogeneous Dirichlet condition for substance's concentration is proved. For a velocity vector we use a homogeneous Dirichlet condition. The model under consideration generalizes the Boussinesq approximation since the reaction coefficient depends nonlinearly on substance's concentration and depends on spatial variables. Sufficient conditions were established for initial data of boundary value problem under which its solution is unique and also there were determined the conditions under which the maximum principle for substance's concentration is valid .

Keywords: nonlinear mass-transfer model, generalized Boussinesq model, reaction coefficient, global solvability, maximum principle.

1. Введение. Постановка краевой задачи

На протяжении длительного периода интерес к исследованию краевых и экстремальных задач для уравнений тепломассопереноса только усиливается (см., например, [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8]). Наряду с поиском эффективных механизмов управления физическими полями в сплошных средах, задачи управления имеют и ряд других приложений. К указанным задачам в рамках оптимизационного подхода сводятся некоторые обратные задачи (о корректности такого подхода см. [9, 10, 11]). Также отметим применение методов оптимизации к задачам тепловой маскировки [12, 13].

Saritskaia, Zh.Yu., Boundary value problem for nonlinear mass-transfer equations under Dirichlet condition.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда N 22-21-00271).

Поступила 1 января 2022 г., опубликована 31 декабря 2022 г.

В настоящей работе рассматривается краевая задача для нелинейных уравнений массопереноса. Предполагается, что коэффициент реакции нелинейно зависит от концентрации вещества, а также зависит от пространственных переменных. Здесь отметим работы [14, 15, 16, 17], также обобщающие приближение Буссинеска для различных моделей, и статьи [18, 19, 20, 21, 22], по исследованию ряда сложных гидродинамических моделей.

В ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с границей Γ рассматривается краевая задача:

$$-\nu\Delta\mathbf{u} + (\mathbf{u}\cdot\nabla)\,\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} + \beta\mathbf{G}\varphi,\ \operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \tag{1}$$

$$-\operatorname{div}(\lambda(\mathbf{x})\nabla\varphi) + \mathbf{u}\cdot\nabla\varphi + k(\varphi,\mathbf{x})\varphi = f \text{ в } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0},\ \ \varphi = \psi \text{ на } \Gamma. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор скорости, φ – концентрация загрязняющего вещества, $p = P/\rho$, где P – давление, $\rho = \text{const}$ – плотность жидкости, $\nu = \text{const} > 0$ – постоянная кинематическая вязкость, $\lambda = \lambda(\mathbf{x}) > 0$ – коэффициент диффузии, β – коэффициент массового расширения, $\mathbf{G} = -(0, 0, G)$ – ускорения свободного падения, $\mathbf{f}$ и f – объемные плотности внешних сил и внешних источников, функция $k = k(\varphi,\mathbf{x})$ имеет смысл коэффициента реакции, где $\mathbf{x} \in \Omega$. Ниже при заданных функциях $\mathbf{f}, f, \lambda, \beta, k$ и ψ на задачу (1)–(3) мы будем ссылаться как на задачу 1.

В настоящей работе доказывается глобальная разрешимость и локальная единственность решения задачи 1 и устанавливается принцип максимума и минимума для концентрации φ. В отличие, например, от [17], на границе задается неоднородное условие Дирихле для концентрации φ. С физической точки зрение это более оправдано, поскольку при однородном условии Дирихле сложно объяснить большие значения градиента концентрации вблизи границы, на которой она должна стать равной нулю. Более того, функция ψ в (3) может играть роль граничного управления при исследовании экстремальных задач. Но при этом на нелинейность $k(\varphi,\cdot)\,\varphi$ накладываются дополнительные ограничения, по сравнению с условиями в [17].

С одной стороны, в настоящей статье обобщаются некоторые результаты работ [2, 3] и [5, 6] по исследованию краевых задач для нелинейных моделей тепломассопереноса в рамках приближения Обербека-Буссинеска. С другой стороны, обобщаются некоторые результаты статей [11] и [24, 25, 26, 27] по исследованию краевых задач для полулинейных уравнений реакции-диффузии-конвекции. Здесь же отметим работы [28, 29, 30] по исследованию близких полулинейных моделей сложного теплообмена.

2. Разрешимость задачи 1

Ниже будем использовать пространства Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{R}$. Здесь D обозначает область Ω или некоторое ее подмножество $Q \subset \Omega$, или границу Γ. Через $\|\cdot\|_{s,Q}$, $|\cdot|_{s,Q}$ и $(\cdot,\cdot)_{s,Q}$ будем обозначать, соответственно, норму, полунорму и скалярное произведение в $H^s(Q)$. Норму и скалярное произведение в $L^2(Q)$ будем обозначать, соответственно, $\|\cdot\|_Q$ и $(\cdot,\cdot)_Q$. Введем функциональные пространства

$$L^p_+(D) = \{k \in L^p(D) : k \geq 0\},\ \ p \geq 5/3,$$

$$L^\infty_{\lambda_0}(\Omega) = \{\lambda \in L^\infty(\Omega) : \lambda \geq \lambda_0 > 0\}, \;\; L^2_0(\Omega) = \{h \in L^2(\Omega) : (h, 1) = 0\}.$$

Введем пространство тестовых функций для скорости $\mathbf{u}$:

$$V = \{\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3 : \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \text{ в } \Omega\}.$$

Введем произведения пространств $H = H^1_0(\Omega)^3 \times H^1_0(\Omega)$, $W = V \times H^1_0(\Omega)$ и двойственное к H пространство $H^* = H^{-1}(\Omega)^3 \times H^{-1}(\Omega)$.

Пусть выполняются следующие условия:

(i) Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с границей $\Gamma \in C^{0,1}$;

(ii) $\lambda \in L^\infty_{\lambda_0}(\Omega)$, $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)^3$, $f \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{b} = \beta\mathbf{G} \in L^2(\Omega)^3$, $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$;

(iii) для любой функции $w \in H^1_0(\Omega)$ имеет место вложение $k(w, \cdot) \in L^p_+(\Omega)$, где $p \geq 5/3$ и не зависит от w, и на любом шаре $B_r = \{w \in H^1_0(\Omega) : \|w\|_{1,\Omega} \leq r\}$ радиуса r справедливо неравенство:

$$\|k(w_1, \cdot) - k(w_2, \cdot)\|_{L^p(\Omega)} \leq L\|w_1 - w_2\|_{L^4(\Omega)} \;\; \forall w_1, w_2 \in H^1_0(\Omega).$$

Здесь L – константа, зависящая от r, но не зависящая от $w_1, w_2 \in B_r$.

(iv) нелинейность $k(\varphi, \cdot)\varphi$ является монотонной в следующем смысле:

$$(k(\varphi_1, \cdot)\varphi_1 - k(\varphi_2, \cdot)\varphi_2, \varphi_1 - \varphi_2) \geq 0 \; \forall \varphi_1, \varphi_2 \in H^1(\Omega).$$

(v) функция $k(\varphi, \cdot)$ является ограниченной в том смысле, что существуют положительные константы A_1, B_1, зависящие от k, такие, что

$$\|k(\varphi, \cdot)\|_{L^p(\Omega_2)} \leq A_1\|\varphi\|^t_{1,\Omega} + B_1, \; p \geq 5/3, \; t \geq 0. \tag{4}$$

Заметим, что условия (iii)–(v) задают оператор, действующий из $H^1(\Omega)$ в $L^p(\Omega)$, где $p \geq 5/3$, Например,

$k = \varphi^2$ (или $k = \varphi^2|\varphi|$) в подобласти $Q \subset \Omega$ и $k = k_0(\mathbf{x}) \in L^{5/3}_+(\Omega \setminus Q)$ в $\Omega \setminus Q$.

Напомним, что из теорем вложения Соболева вытекает, что пространство $H^1(\Omega)$ вкладывается в $L^s(\Omega)$ непрерывно при $s \leq 6$ и компактно при $s < 6$ и с некоторой константой C_s, зависящей от s и Ω, справедлива оценка

$$\|\varphi\|_{L^s(\Omega)} \leq C_s\|\varphi\|_{1,\Omega} \;\; \forall \varphi \in H^1(\Omega). \tag{5}$$

Справедлива следующая техническая лемма (подробно см. [3, 5, 31]).

Лемма 1. *При выполнении условия (i)* $k_0 \in L^p_+(\Omega), p \geq 5/3$, $\mathbf{u} \in H^1(\Omega)^3$, $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{b} \in L^2(\Omega)^3$, $\lambda \in L^\infty_{\lambda_0}(\Omega)$, *существуют положительные константы* $C_0, C_1, \delta_0, \delta_1, \gamma_1, \gamma'_1, \gamma_2, \gamma'_2, \gamma_p, \beta_1$, *зависящие от* Ω *или от* Ω *и* p, *и константа* β_0, *которая зависит от* $\|\mathbf{b}\|_\Omega$, *с которыми выполняются следующие соотношения:*

$$|(\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{w})| \leq C_0\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega},$$

$$|(\mathbf{b}h, \mathbf{v})| \leq \beta_0\|h\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \;\; \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega)^3, h \in H^1(\Omega),$$

$$\begin{gathered} |((\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{h}, \mathbf{z})| \leq \gamma'_1\|\mathbf{w}\|_{L^4(\Omega)^3}\|\mathbf{h}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega} \leq \\ \leq \gamma_1\|\mathbf{w}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{h}\|_{1,\Omega}\|\mathbf{z}\|_{1,\Omega} \;\; \forall \mathbf{w}, \mathbf{h}, \mathbf{z} \in H^1(\Omega)^3, \end{gathered} \tag{6}$$

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{w}, \mathbf{v}),$$

$$((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{v}, \mathbf{v}) = 0 \;\; \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \; \mathbf{w} \in H^1(\Omega)^3, \tag{7}$$

$$\nu(\nabla\mathbf{v}, \nabla\mathbf{v}) \geq \nu_*\|\mathbf{v}\|^2_{1,\Omega}, \;\; \nu_* = \delta_0\nu \;\; \forall \mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \tag{8}$$

$$\sup_{\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3, \mathbf{v} \neq \mathbf{0}} -(\operatorname{div}\mathbf{v}, p)/\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} \geq \beta_1\|p\|_\Omega \;\; \forall p \in L^2_0(\Omega), \tag{9}$$

(10)
$$|(\lambda\nabla h, \nabla\eta)| \le C_1\|\lambda\|_{s,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},\ \ |(k_0 h, \eta)| \le \gamma_p\|k_0\|_{L^p(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega},$$

(11)
$$|(\mathbf{u}\cdot\nabla h, \eta)| \le \gamma_2'\|\mathbf{u}\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \le \gamma_2\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega} \quad \forall h, \eta \in H^1(\Omega),$$

(12)
$$(\mathbf{u}\cdot\nabla h, h) = 0 \ \ (\lambda\nabla h, \nabla h) \ge \lambda_*\|h\|^2_{1,\Omega} \ \ \forall h \in H^1_0(\Omega), \ \ \lambda_* \equiv \delta_1\lambda_0.$$

Из второй оценки в (10) вытекает следующее неравенство для функции $k(\varphi,\cdot)$, удовлетворяющей условию (iii):

$$|((k(\varphi_1,\cdot) - k(\varphi_2,\cdot))\varphi, \eta)| \le$$

(13)
$$\le \gamma_p L\|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\eta\|_{1,\Omega}\, \forall \varphi, \varphi_1, \varphi_2, \eta \in H^1(\Omega).$$

Для доказательства разрешимости краевой задачи (1)–(3) будем использовать следующую лемму (см. [31]).

Лемма 2. *Пусть выполняются условие (i). Тогда существует семейство непрерывных неубывающих функций* $M_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \equiv (0,\infty) \to \mathbb{R}_+$, *с* $M_\varepsilon(0) = 0$, *зависящих от параметра* $\varepsilon \in (0,1]$ *также, как от* Ω *и* Γ, *такое, что для любой не равной тождественно нулю функции* $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$ *найдется функция* $\varphi_\varepsilon \in H^1(\Omega)$, *удовлетворяющая условиям*

(14)
$$\varphi|_{\Gamma_D} = \psi, \ \|\varphi_\varepsilon\|_{L^4(\Omega)} \le \varepsilon, \|\varphi_\varepsilon\|_{1,\Omega} \le M_\varepsilon(\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D})\ \forall\varepsilon \in (0,1].$$

Умножим первое уравнение в (1) на функцию $\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3$, уравнение (2) на функцию $h \in H^1_0(\Omega)$ и проинтегрируем по Ω, применяя формулы Грина. В результате приходим к слабой формулировке задачи 1:

(15)
$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) - (p, \operatorname{div}\mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}\varphi, \mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v} \in H^1_0(\Omega)^3,$$

(16)
$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi,\cdot)\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, h) = (f, h) \ \ \forall h \in H^1_0(\Omega),$$

(17)
$$\operatorname{div}\mathbf{u} = 0 \text{ в } \Omega, \ \ \varphi = \psi \text{ на } \Gamma.$$

Тройку $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H^1_0(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) \times L^2_0(\Omega)$, удовлетворяющую (15)–(17), назовем слабым решением задачи 1.

Рассмотрим сужение (15) на пространство V:

(18)
$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}\varphi, \mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v} \in V.$$

Для доказательства существования слабого решения задачи 1 достаточно доказать существование решения $(\mathbf{u}, \varphi) \in H^1_0(\Omega)^3 \times H^1_0(\Omega)$ задачи (16)–(18). О восстановлении давления p см. в [31, с. 89].

Концентрацию φ будем искать в виде суммы $\varphi = \varphi_0 + \tilde\varphi$, где функция φ_0 из леммы 2, а $\tilde\varphi \in H^1_0(\Omega)$ – новая неизвестная функция.

Подставляя $\varphi = \varphi_0 + \tilde\varphi$ в (18), (16) и прибавляя к обеим частям (16) слагаемое $-(k(\varphi_0,\cdot)\varphi_0, h)$, приходим к соотношениям

(19)
$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{f}, \mathbf{v}) + (\mathbf{b}\tilde\varphi, \mathbf{v}) \ \ \forall\mathbf{v} \in V,$$

$$(\lambda\nabla\tilde\varphi, \nabla h) + (k(\tilde\varphi + \varphi_0,\cdot)(\tilde\varphi + \varphi_0) - (k(\varphi_0,\cdot)\varphi_0, h) +$$

(20)
$$+(\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi, h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0, h) = \langle f_1, h\rangle_{-1,\Omega} \ \ \forall h \in H^1_0(\Omega),$$

где

$$\langle f_1, h\rangle_{-1,\Omega} = (f, h) - (\lambda\nabla\varphi_0, \nabla h) - (k(\varphi_0,\cdot)\varphi_0, h).$$

Ясно, что $f_1 \in H^{-1}(\Omega)$ и справедлива оценка

$$\|f_1\|_{-1,\Omega} \le M_{f_1} = \|f\|_\Omega + C_1 C_\Gamma \|\lambda\|_{L^\infty(\Omega)} \|\psi\|_{1/2,\Gamma} + \gamma_p (A_1 M_\varepsilon^t + B_1) M_\varepsilon. \tag{21}$$

Складывая (19), (20), приходим к соотношению

$$a((\mathbf{u},\tilde\varphi),(\mathbf{v},h)) + ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v}) - (\mathbf{b}\tilde\varphi,\mathbf{v}) + (k(\tilde\varphi+\varphi_0,\cdot)\tilde\varphi - (k(\varphi_0,\cdot)\varphi_0,h),h) +$$

$$+(\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi,h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0,h) = \langle \mathbf{F},(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} \ \ \forall(\mathbf{w},h)\in W. \tag{22}$$

Здесь

$$a((\mathbf{u},\tilde\varphi),(\mathbf{v},h)) = \nu(\nabla\mathbf{u},\nabla\mathbf{v}) + (\lambda\nabla\tilde\varphi,\nabla h),$$
$$\langle \mathbf{F},(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} = (\mathbf{f},\mathbf{v}) + \langle f_1,h\rangle_{-1,\Omega}.$$

Из леммы 1 вытекает, что билинейная форма a непрерывна и коэрцитивна на пространстве H:

$$a((\mathbf{v},h),(\mathbf{v},h)) \ge \delta_*(\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega}^2 + \|h\|_{1,\Omega}^2) \ \ \forall(\mathbf{v},h)\in H, \ \ \delta_* = \min\{\nu_*,\lambda_*\}. \tag{23}$$

Для доказательства разрешимости задачи (22) применим теорему Лере–Шаудера (см. [29]). Положим $\mathbf{z} = (\mathbf{u},\tilde\varphi)\in W$ и введем нелинейный оператор G по формуле

$$a(G(\mathbf{z}),(\mathbf{v},h)) = \langle \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}),(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} \equiv$$
$$\equiv ((\mathbf{u}\cdot\nabla)\mathbf{u},\mathbf{v}) - (\mathbf{b}\tilde\varphi,\mathbf{v}) + (k(\tilde\varphi+\varphi_0,\cdot)\tilde\varphi - (k(\varphi_0,\cdot)\varphi_0,h),h) +$$

$$+(\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde\varphi,h) + (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi_0,h) - \langle \mathbf{F},(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} \ \ \forall(\mathbf{w},h)\in W. \tag{24}$$

По теореме Лакса–Мильграма из (24) вытекает, что для любой пары $\mathbf{z} = (\mathbf{u},\tilde\varphi)\in W$ существует единственная пара $\mathbf{s} = (\mathbf{s}_1,s_2)\in W$, с которой справедливо равенство

$$a((\mathbf{s}_1,s_2),(\mathbf{v},h)) = \langle \tilde{\mathbf{F}}(\mathbf{z}),(\mathbf{v},h)\rangle_{H^*\times H} \ \ \forall(\mathbf{v},h)\in W.$$

В таком случае, оператор G, определенный формулой (24), действует из W в W и ставит в соответствие каждой паре функций $\mathbf{z} = (\mathbf{u},\tilde\varphi)\in W$ элемент $G(\mathbf{z})\in W$.

Тогда для доказательства существования решения задачи (22) достаточно доказать существование решения $\mathbf{z}\in W$ операторного уравнения

$$\mathbf{z} + G(\mathbf{z}) = \mathbf{0} \text{ в } W. \tag{25}$$

Вычтем (24) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}_2 \in W$ из (24) при $\mathbf{z} = \mathbf{z}_1\in W$. Будем иметь

$$a(G(\mathbf{z}_1) - G(\mathbf{z}_2),(\mathbf{w},h)) =$$
$$= ((\mathbf{u}_1\cdot\nabla)(\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2),\mathbf{v}) + (((\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\cdot\nabla)\mathbf{u}_2,\mathbf{v}) - (\mathbf{b}(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2),\mathbf{v}) +$$
$$+((k(\tilde\varphi_1+\varphi_0,\cdot)-k(\tilde\varphi_2+\varphi_0,\cdot))\tilde\varphi_1,h) + (k(\tilde\varphi_2+\varphi_0,\cdot)(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2),h) + ((\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\cdot\nabla\tilde\varphi_1,h) +$$

$$+(\mathbf{u}_2\cdot\nabla(\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2),h) + ((\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2)\cdot\nabla\varphi_0,h) \ \ \forall(\mathbf{v},h)\in H_0^1(\Omega)^3\times H_0^1(\Omega). \tag{26}$$

Используя лемму 1, неравенство Гельдера, свойство (iii) и (5), из (26) приходим к неравенству

$$|a(G(\mathbf{z}_1) - G(\mathbf{z}_2),(\mathbf{v},h))| \le$$
$$\le \gamma_1'(\|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega})\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} + \beta_0'\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|\mathbf{v}\|_{1,\Omega} +$$
$$+\gamma_p L\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega}\|h\|_{1,\Omega} + C_6\|k(\tilde\varphi_2+\varphi_0)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{L^5(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega} +$$
$$+\gamma_2'\|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}\|\tilde\varphi_1-\tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|h\|_{1,\Omega} +$$

$$+\gamma_2'(\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega} + \|\varphi_0\|_{1,\Omega})(\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3}\|h\|_{1,\Omega} \ \forall(\mathbf{v},h)\in W. \tag{27}$$

Положим $\mathbf{y} = (\mathbf{v}, h)$. Из (27) вытекает неравенство

$$|a(G(\mathbf{z}_1) - G(\mathbf{z}_2), \mathbf{y})| \leq$$
$$\leq \gamma_1'(\|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega})\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3} + \beta_0'\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3} +$$
$$+\gamma_p L\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega} + C_6\|k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^5(\Omega)} +$$
$$+\gamma_2'\|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3} +$$
$$+\gamma_2'(\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega} + \|\varphi_0\|_{1,\Omega})(\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)})\|\mathbf{y}\|_W \quad \forall \mathbf{y} \in W. \tag{28}$$

Полагая $\mathbf{y} = G(\mathbf{z}_1) - G(\mathbf{z}_2)$ в (27), приходим к оценке

$$\|G(\mathbf{z}_1) - G(\mathbf{z}_2)\|_H \leq$$
$$+\gamma_1'(\|\mathbf{u}_1\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega})\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3} + \beta_0'\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)^3} +$$
$$+\gamma_p L\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)}\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega} + C_6\|k(\tilde\varphi_2 + \varphi_0)\|_{L^{5/3}(\Omega)}\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^5(\Omega)} +$$
$$+\gamma_2'\|\mathbf{u}_2\|_{1,\Omega}\|\tilde\varphi_1 - \tilde\varphi_2\|_{L^4(\Omega)} + \gamma_2'(\|\tilde\varphi_1\|_{1,\Omega} + \|\varphi_0\|_{1,\Omega})\|\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2\|_{L^4(\Omega)^3}, \tag{29}$$

из которой в силу компактности вложений $H^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$ и $H^1(\Omega)^3 \subset L^p(\Omega)^3$, где $p < 6$, вытекает непрерывность и компактность оператора $G : W \to W$.

Наряду с (25) рассмотрим операторное уравнение

$$\mathbf{z}_w + wG(\mathbf{z}_w) = \mathbf{0} \text{ в } W,$$

где $w \in (0, 1]$, и вариационное равенство

$$a((\mathbf{u}_w, \tilde\varphi_w), (\mathbf{v}, h)) + w((\mathbf{u}_w \cdot \nabla)\mathbf{u}_w, \mathbf{v}) - w(\mathbf{b}\tilde\varphi_w, \mathbf{v}) +$$
$$+w(k(\tilde\varphi_w + \varphi_0, \cdot)\tilde\varphi_w - w(k(\varphi_0, \cdot)\varphi_0, h) +$$
$$+w(\mathbf{u}_w \cdot \nabla\tilde\varphi_w, h) + w(\mathbf{u}_w \cdot \nabla\varphi_0, h) = w\langle \mathbf{F}, (\mathbf{v}, h)\rangle_{H^* \times H} \quad \forall (\mathbf{v}, h) \in H. \tag{30}$$

Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ и $h = \tilde\varphi_w$ в (30), приходим к соотношению

$$(\nabla\tilde\varphi_w, \nabla\tilde\varphi_w) + w(k(\tilde\varphi_w + \varphi_0, \cdot)(\tilde\varphi_w + \varphi_0) - k(\varphi_0, \cdot)\varphi_0, \tilde\varphi_w) +$$
$$+w(\mathbf{u}_w \cdot \nabla\varphi_0, \varphi_w) = w\langle f_1, \varphi_w\rangle_{-1,\Omega}. \tag{31}$$

Из (31) с учетом лемм 1 и 2, выводим оценку

$$\lambda_*\|\tilde\varphi_w\|_{1,\Omega} \leq w\gamma_2'\varepsilon\|\mathbf{u}_w\|_{1,\Omega} + wM_{f_1}, \quad w, \varepsilon \in (0, 1]. \tag{32}$$

Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и $h = 0$ в (30), приходим к соотношению

$$\nu(\nabla\mathbf{u}_w, \nabla\mathbf{u}_w) = w(\mathbf{b}\tilde\varphi_w, \mathbf{u}_w) + w(\mathbf{f}, \mathbf{u}_w). \tag{33}$$

Из (33) в силу леммы 1, приходим к неравенству

$$\nu_*\|\mathbf{u}_w\|_{1,\Omega} \leq w\beta_0\|\tilde\varphi_w\|_{1,\Omega} + w\|\mathbf{f}\|_\Omega. \tag{34}$$

Учитывая (32), из (34) получаем, что

$$\nu_*\|\mathbf{u}_w\|_{1,\Omega} \leq w\beta_0(w\gamma_2'\lambda_*^{-1}\varepsilon\|\mathbf{u}_w\|_{1,\Omega} + w\lambda_*^{-1}M_{f_1}) + w\|\mathbf{f}\|_\Omega \tag{35}$$

Если $\nu_* \leq \beta_0\gamma_2'\lambda_*^{-1}$, то полагая $\varepsilon = \nu_*\lambda_*/(2\beta_0\gamma_2')$, из (35) последовательно выводим

$$(\nu_*/2)\|\mathbf{u}_w\|_{1,\Omega} \leq w^2\beta_0\lambda_*^{-1}M_{f_1} + w\|\mathbf{f}\|_\Omega,$$
$$\|\mathbf{u}_w\|_{1,\Omega} \leq 2wM_{\mathbf{u}}, \ M_{\mathbf{u}} \equiv (\beta_0/(\nu_*\lambda_*))M_{f_1} + (1/\nu_*)\|\mathbf{f}\|_\Omega. \tag{36}$$

Используя (36), из (32) (при $\varepsilon = 1$) также последовательно выводим, что

$$\lambda_*\|\tilde\varphi_w\|_{1,\Omega} \leq 2w^2\gamma_2'M_{\mathbf{u}} + wM_{f_1}, \quad w \in (0, 1],$$

$$\|\tilde{\varphi}_w\|_{1,\Omega} \le w M_{\tilde{\varphi}}, \;\; M_{\tilde{\varphi}} = (2/\lambda_*)(\gamma_2' M_{\mathbf{u}} + M_{f_1}), \;\; w \in (0,1]. \tag{37}$$

Наконец, из (36) и (37) приходим к оценке

$$\|\mathbf{z}_w\|_{1,\Omega} \le w C_*(M_{\mathbf{u}} + M_{\tilde{\varphi}}), \; w \in (0,1], \; C_* = 1/\lambda_*. \tag{38}$$

из которой, очевидно, вытекает, что

$$\|\mathbf{z}_w\|_{1,\Omega} \le C_*(M_{\mathbf{u}} + M_{\tilde{\varphi}}). \tag{39}$$

В таком случае, в силу теоремы Лере–Шаудера существует решение $\mathbf{z} \in W$ задачи (25), для которого справедлива оценка (39).

Отсюда следует, что существует решение $(\mathbf{u}, \varphi) \in W$ задачи (16)–(18), где $\varphi = \tilde{\varphi} + \varphi_0$, причем

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le M_{\mathbf{u}} = (\beta_0/(\nu_*\lambda_*))M_{f_1} + (1/\nu_*)\|\mathbf{f}\|_{\Omega}, \tag{40}$$

$$\|\varphi\|_{1,\Omega} \le M_{\varphi} \equiv (2/\lambda_*)(\gamma_2' M_{\mathbf{u}} + M_{f_1}) + M_{\varepsilon}(\|\psi\|_{1/2,\Gamma_D}). \tag{41}$$

В силу (9) для давления p и любого (произвольно малого) числа $\delta > 0$ существует функция $\mathbf{v}_0 \in H_0^1(\Omega)^3$, $\mathbf{v}_0 \ne 0$, такая что

$$-(\mathrm{div}\mathbf{v}_0, p) \ge \beta_2 \|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|p\|_{\Omega}, \; \beta_2 = (\beta_1 - \delta) > 0.$$

Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0$ в (15), с учетом неравенств леммы 1 выводим

$$\beta_2\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|p\|_{\Omega} \le \nu C_0 \|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} + \gamma_1\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}^2 + \beta_0\|\varphi\|_{1,\Omega}\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{\Omega}\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega}.$$

Разделив на $\|\mathbf{v}_0\|_{1,\Omega} \ne 0$ и учитывая оценки (40), (41), отсюда выводим, что

$$\|p\|_{\Omega} \le M_p = \beta_2^{-1}[(\nu + \gamma_1 M_{\mathbf{u}})M_{\mathbf{u}} + \|\mathbf{f}\|_{\Omega} + \beta_0 M_{\varphi}]. \tag{42}$$

Далее установим достаточные условия единственности решения задачи (15)–(17). Пусть $(\mathbf{u}_i, \varphi_i, p_i) \in H^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$, $i = 1, 2$, – решения задачи (15)–(17). Несложно показать, что их раности

$$\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 \in H_0^1(\Omega), \;\; \mathbf{u} = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 \in V$$

удовлетворяют соотношениям

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla h) + (k(\varphi_1)\varphi_1 - k(\varphi_2)\varphi_2, h) + (\mathbf{u}_1 \cdot \nabla\varphi, h) =$$

$$= -(\mathbf{u} \cdot \nabla\varphi_2, h) \; \forall h \in H_0^1(\Omega), \tag{43}$$

$$\nu(\nabla\mathbf{u}, \nabla\mathbf{v}) + ((\mathbf{u}_1 \cdot \nabla)\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{b}\varphi, \mathbf{v}) - ((\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}_2, \mathbf{v}) \; \forall \mathbf{v} \in V. \tag{44}$$

Полагая $h = \varphi$ в (43) и $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ в (44), из леммы 1 с учетом (13), (5), приходим к оценкам

$$\lambda_*\|\varphi\|_{1,\Omega} \le \gamma_2 M_{\varphi}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}, \tag{45}$$

$$\nu_*\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le \beta_0\|\varphi\|_{1,\Omega} + \gamma_1 M_{\mathbf{u}}\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega}. \tag{46}$$

Введем безразмерные аналоги числа Рейнольдса и диффузионного числа Рэлея (см. [3, 5] и [31, гл. 5]):

$$\mathrm{Re} = (\gamma_1/\delta_0\nu)M_{\mathbf{u}}, \;\; \mathrm{Ra} = (\gamma_2/\delta_0\nu)(\beta_0/\delta_1\lambda)M_{\varphi}. \tag{47}$$

Из (45), (46) с учетом (47) приходим к неравенству

$$\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} \le (\mathrm{Re} + \mathrm{Ra})\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega},$$

из которого вытекает, что если выполняется условие

$$\mathrm{Re} + \mathrm{Ra} < 1, \tag{48}$$

то $\|\mathbf{u}\|_{1,\Omega} = 0$ или $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$. Тогда из (45) следует, что $\|\varphi\|_{1,\Omega} = 0$ или $\varphi_1 = \varphi_2$.

Вычитая (15) при $(\mathbf{u}_2, \varphi_2, p_2)$ из (15) при $(\mathbf{u}_1, \varphi_1, p_1)$, учитывая, что $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ и $\varphi = 0$, получаем, что разность $p = p_1 - p_2$ удовлетворяет уравнению

$$-(p, \operatorname{div} \mathbf{v}) = 0 \ \ \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)^3.$$

Отсюда, в силу (9), заключаем, что $p = 0$ или $p_1 = p_2$.

Сформулируем полученные результаты в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (i)–(v). Тогда существует слабое решение* $(\mathbf{u}, \varphi, p) \in H_0^1(\Omega)^3 \times H^1(\Omega) \times L_0^2(\Omega)$ *задачи 1 и справедливы оценки (40)–(42). Если, к тому же, выполняется условие (48), то слабое решение задачи 1 единственно.*

3. Принцип максимума и минимума

Пусть в дополнение к (i)–(v) выполняется условие:

(vi) $\psi_{\min} \le \psi \le \psi_{\max}$ п.в. на Γ_D, $f_{\min} \le f \le f_{\max}$ и $\lambda_{\min} \le \lambda \le \lambda_{\max}$ п.в. в Ω.

Здесь $\psi_{\min}$, $\psi_{\max}$, $f_{\min}$, $f_{\max}$ – неотрицательные, а $\lambda_{\min}$, $\lambda_{\max}$ – положительные числа.

Будем считать, что коэффициент реакции имеет следующий вид:

(vii) $k(\varphi, \mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) k_1(\varphi)$, где $k_1(\cdot) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ непрерывная функция, $0 < a_{\min} \le a(\mathbf{x}) \le a_{\max} < \infty$ п.в. в Ω, при этом функциональные уравнения

$$k_1(s)s = f_{\min}/a_{\max}, \tag{49}$$

$$k_1(s)s = f_{\min}/a_{\max}, \ s > 0 \tag{50}$$

имеют хотя бы по одному (положительному) решению.

Теорема 2. *При выполнении условий (i)–(vii) для решения* $\varphi \in H^1(\Omega)$ *задачи 1 справедлив следующий принцип максимума и минимума:*

$$m \le \varphi \le M \ \textit{п.в. в}\ \Omega, \ M = \max\{\psi_{\max}, M_1\}, \ m = \min\{\psi_{\min}, m_1\}. \tag{51}$$

Здесь M_1 *– минимальный корень уравнения (49), а* m_1 *– максимальный корень уравнения (50).*

Доказательство. Сначала докажем, что $\varphi \le M$ п.в. в Ω. С этой целью введем функцию

$$\tilde{\varphi} = \max\{\varphi - M, 0\}.$$

Ясно, что принцип максимума или оценка $\varphi \le M$ п.в. в Ω выполняется тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi} = 0$ п.в. в Ω.

Через $Q_M \subset \Omega$ обозначим открытое измеримое подмножество Ω, в котором $\varphi > M$. Из [32, с. 152] и [33] вытекает, что $\nabla\tilde{\varphi} = \nabla\varphi$ п.в. в Q_M и $\tilde{\varphi} \in H_0^1(\Omega)$. Тогда справедливы следующие равенства:

$$(\lambda\nabla\varphi, \nabla\tilde{\varphi}) = (\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi})_{Q_M} = (\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}), \ \ (\mathbf{u}\cdot\nabla\varphi, \tilde{\varphi}) = (\mathbf{u}\cdot\nabla\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}) = 0.$$

С учетом этого, полагая $h = \tilde{\varphi}$ в (20), получим

$$(\lambda\nabla\tilde{\varphi}, \nabla\tilde{\varphi}) + (k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi}) = (f, \tilde{\varphi}). \tag{52}$$

Ясно, что

$$(k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi}) = (k(\varphi, \cdot)\varphi, \tilde{\varphi})_{Q_M} = (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M), \tilde{\varphi})_{Q_M}$$

и в силу (v) для функций $\varphi_1 = \tilde{\varphi} + M$ и $\varphi_2 = M$ из $H^1(\Omega)$ справедливо неравенство

$$0 \le (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi}) =$$

$$= (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M}, \tag{53}$$

поскольку $\tilde{\varphi} = 0$ в $\Omega \setminus \overline{Q}_M$.

С учетом этого, вычитая $(k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})$ из обеих частей (52), получим

$$(\lambda \nabla \tilde{\varphi}, \nabla \tilde{\varphi}) + (k(\tilde{\varphi} + M, \cdot)(\tilde{\varphi} + M) - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M} =$$

$$= (f - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M}. \tag{54}$$

В силу леммы 1 и (53), из (54) приходим к оценке

$$\lambda_* \|\tilde{\varphi}\|^2_{1,\Omega} \le (f - k(M, \cdot)M, \tilde{\varphi})_{Q_M}.$$

Из нее вытекает, что если M выбрано из условия (51) для коэффиицента $k(\varphi, \mathbf{x})$ из условия (vii), то $\tilde{\varphi} = 0$.

Для доказательства принципа минимума введем функцию

$$\tilde{w} = \min\{\varphi - m, 0\}.$$

Рассуждая, как для функции $\tilde{\varphi}$, заключаем, что $\tilde{w} \in H^1_0(\Omega)$. Будем предполагать, что в измеримом открытом множестве $Q_m \subset \Omega$ справедливо неравенство $\varphi < m$. Рассуждая, как и выше, приходим к равенству

$$(\lambda \nabla \tilde{\varphi}, \nabla \tilde{\varphi}) + (k(\tilde{w} + m, \cdot)(\tilde{w} + m) - k(m, \cdot)m, \tilde{w})_{Q_m} =$$

$$= (f - k(m, \cdot)m, \tilde{w})_{Q_m},$$

из которого выводим оценку

$$\lambda_* \|\tilde{w}\|^2_{1,\Omega} \le (f - k(m, \cdot)m, \tilde{w})_{Q_m}.$$

Из полученной оценки как и выше вытекает, что $\tilde{w} = 0$ для m из (51). □

Замечание 1. Для степенных коэффициентов реакции параметры M_1 и m_1 легко вычисляются. Например, при $k(\varphi) = \varphi^2$ получаем, что

$$M_1 = f^{1/3}_{\max}, \;\; m_1 = f^{1/3}_{\min}.$$

В таком случае

$$M = \max\{\psi_{\max}, f^{1/3}_{\max}\}, \;\; m = \min\{\psi_{\min}, f^{1/3}_{\min}\}.$$

4. Заключение

В настоящей работе доказана глобальная разрешимость краевой задачи для нелинейной модели массопереноса, обобщающей приближение Буссинеска. Предполагается, что коэффициент реакции $k(\varphi, \cdot)$ нелинейно зависит от концентрации вещества и зависит от пространственных переменных. Неоднородное условие Дирихле для концентрации φ стало причиной требования монотонности нелинейности $k(\varphi, \cdot)\varphi$. В свою очередь, при этом условии удалось доказать принцип максимума и минимума для φ и доказать локальную единственность решения краевой задачи при простом условии малости

$$\mathrm{Re} + \mathrm{Ra} < 1,$$

не зависящим от конкретного вида коэффицента реакции $k(\varphi, \cdot)$ (для сравнения см. [17]). Так же отметим, что при доказательстве принципа максимума и минимума использовался подход [34].

References

[1] K. Ito K, K. Kunish, *Estimation of the convection coefficient in elliptic equations*, Inv. Probl., **14** (1997), 995–1013.

[2] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *On solvability of inverse extremal problems for stationary equations of viscous heat conducting fluid*, J. Inv. Ill-Posed Probl., **9** (1998), 521–562.

[3] G.V. Alekseev, *Solvability of inverse extremal problems for stationary heat and mass transfer equations*, Sib. Math. J., **42** (2001), 811–827.

[4] P.A. Nguyen, J.-P. Raymond, *Control problems for convection-diffusion-reaction with control localized on manifolds*, ESAIM Control Optim. Calc. Var, **6** (2001), 467–488.

[5] G.V. Alekseev, *Coefficient inverse extremum problems for stationary heat and mass transfer equations*, Comp. Math. Math. Phys., **47**:6 (2007), 1007–1028.

[6] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *Extremum problems of boundary control for steady equations of thermal convection*, J. Appl. Mech. Tech. Phys., **51**:4 (2010), 510–520.

[7] P.A. Nguyen, J.-P. Raymond, *Pointwise control of the Boussinesq system*, Systems Control Lett., **60**:4 (2011), 249–255.

[8] A.I. Korotkii, D.A. Kovtunov, *Optimal boundary control of a system describing thermal convection*, Proc. Steklov Inst. Math., **272** (2011, S74–S100.

[9] G.V. Alekseev, V.G. Romanov, *One class of nonscattering acoustic shells for a model of anisotropic acoustics*, J. Appl. Industr. Math., **6**:1 (2012), 1–5.

[10] G.V. Alekseev, V.A. Levin, *The optimization method in design problems of spherical layered thermal shells*, Doklady Physics. **62**:10 (2017), 465–469.

[11] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Optimization analysis of the inverse coefficient problem for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation*, J. Inv. Ill-Posed Probl., **9** (2018), 821–834.

[12] V.D. Fachinotti, A.A. Ciarbonetti, I. Peralta, I. Rintoul, *Optimization-based design of easy-to-make devices for heat flux manipulation*, Int. J. Thermal Sciences. **128** (2018), 38–48.

[13] G.V. Alekseev, D.A. Tereshko, *Particle swarm optimization-based algorithms for solving inverse problems of designing thermal cloaking and shielding devices*, Int. J. Heat and Mass Transfer., **135** (2019), 1269–1277.

[14] S.A. Lorca, J.L. Boldrini, *Stationary solutions for generalized Boussinesq models*, J. Dif. Eq., **124** (1996), 389–406.

[15] A. Belmiloudi, *Robin–type boundary control problems for the nonlinear Boussinesq type equations*, J. Math. An. Appl., **273** (2002), 428–456.

[16] A. Bermudez, R. Munoz-Sola, R. Vazquez, *Analysis of two stationary magnetohydrodynamics systems of equations including Joule heating*, J. Math. An. Appl., **368** (2010), 444–468.

[17] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaia, *Multiplicative control problems for nonlinear reaction-diffusion-convection model*, J. Dyn. Control Systems. **27**:2 (2021), 379–402.

[18] M. Ruzicka, V.Shelukhin, M.M. dos Santos, *Steady flows of Cosserat-Bingham fluids*, Math. Meth. Appl. Sc., **40** (2017), 2746–2761.

[19] V.V. Shelukhin, *Thermodynamics of two-phase granular fluids*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., **262** (2018), 25–37.

[20] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solvability of unsteady equations of multi-component viscous compressible fluids*, Izv. Math., **821** (2018), 140–185.

[21] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Solubility of unsteady equations of the three-dimensional motion of two-omponent viscous compressible heat-conducting fluids*, Izv. Math., **85**:4 (2021), 755–812.

[22] A.E. Mamontov, D.A. Prokudin, *Global unique solvability of the initial-boundary value problem for the equations of one-dimensional polytropic flows of viscous compressible multifluids*, J. Math. Fluid Mech., **21**:9 (2019), 1–9.

[23] R.V. Brizitskii, Zh.Yu. Saritskaya *Boundary value and extremal problems for the nonlinear convection-diffusion-reaction equation* Sib. Electron. Math. Rep., **15** (2015) 447–456.

[24] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, A.I. Byrganov, *Multiplicative control problems for nonlinear convection-diffusion-reaction equation*, Sib. Electron. Math Rep., **13**:1 (2016), 352–360.

[25] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Stability of solutions of control problems for the convection–diffusion–reaction equation with a strong nonlinearity*, Dif. Eq., **53** (2017), 485–496.

[26] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Inverse coefficient problems for a non-linear convection-diffusion-reaction equation*, Izv. Math., **82** (2018), 14–30.

[27] R.V. Brizitskii, Z.Y. Saritskaya, *Boundary control problem for a nonlinear convection–diffusion–reaction equation* Comp. Math. Math. Phys., **58**:12 (2018), 2053–2063.

[28] A.Yu. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Inverse problem with finite overdetermination for steady-state equations of radiative heat exchange*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **460**:2 (2018), 737–744.

[29] A.Yu. Chebotarev, A.E. Kovtanyuk, G.V. Grenkin, N.D. Botkin, K.-H. Hoffmann, *Nondegeneracy of optimality conditions in control problems for a radiative-conductive heat transfer model*, Applied Mathematics and Computation, **289** (2016), 371-–380.

[30] A.Y. Chebotarev, G.V. Grenkin, A.E. Kovtanyuk, *Inhomogeneous steady-state problem of complex heat transfer*, ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis, **51**:6 (2017), 2511–2519.

[31] G.V. Alekseev, *Optimization in the stationary problems of the heat-mass transfer and magnetic hydrodynamics*, Moscow. Nauchiy Mir, 2010 (in Russian).

[32] D. Gilbarg, M. Trudinger *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer, 1998.

[33] H. Berninger, *Non-overlapping domain decomposition for the Richards equation via superposition operators*, Domain Decomposition Methods in Science and Engineering XVIII. Springer, (2009), 169–176.

[34] O.A. Ladyzhenskaya, N.N. Uraltseva, *Linear and quasilinear elliptic equations*, New York-London: Academic Press, 1968.

Zhanna Yurievna Saritskaia
Institute of Applied Mathematics FEB RAS,
St Radio 7,
Vladivostok, Russia, 690041
E-mail address: zhsar@icloud.com