Рецензия на статью А.Х. Хачатряна, Х.А. Хачатряна и А.С. Петросян «Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода»

Описание тематики рецензируемой статьи

В статье изучаются решения типа одномерной бегущей волны $P(x,t) = \Phi(x+ct)$ уравнения

$$\partial P(x,t)/\partial t + m\partial P(x,t)/\partial x + aP(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y)G(P(x-y,t))\,dy \qquad (c,m,a>0).$$

Сразу получаем $(c+m)\Phi' + a\Phi = K * G(\Phi)$, т.е. уравнение

$$\Phi' + \lambda\Phi = \mathcal{K} * G(\Phi),$$

где $\lambda = (c+m)^{-1}a$ и $\mathcal{K} = (c+m)^{-1}K$. Его свертывание с фундаментальным решением

$$E(x) = e^{-\lambda x}\chi_{(0,\infty)}(x)$$

дифференциального оператора $\frac{d}{dx} + \lambda$ доставляет уравнение

$$\Phi = f * G(\Phi),$$

где $f = E * \mathcal{K}$ — неотрицательная функция из $L_1(\mathbb{R})$ с нормировкой $\int_{\mathbb{R}} f\,dx = 1$.

В статье (§ 5) утверждается, что исходное уравнение с $K(x) = ae^{-|x|}/2$ и $G(X) = \gamma\{1 - e^{-X}\}$ $(\gamma > 1)$ встречается в теории распределения богатства страны. Данное утверждение выглядит сомнительно, так как в § 1 идет отсылка к публикациям [1*]≡[1], [2*]≡[2] и [3*]≡[3], из которых первая оказалась недоступной рецензенту, но в [2*] (с. 319, со ссылкой на [1*]) и в [3*] рассмотрены линейные уравнения. Не являясь специалистом по эконометрике, рецензент далее оценивает статью с позиций теории нелинейных уравнений в свертках, что представляется допустимым в общематематическом журнале. Добавим, что уравнение $\Phi = f * G(\Phi)$, по § 1 работы [4*], возникает в эпидемиологических моделях, где обычно $G(X) = \gamma\{1 - e^{-X}\}$, и в моделях распространения генов при $G(X) = [\alpha X^2 + \beta X(1-X)]/[\alpha X^2 + \beta X(1-X) + \gamma(1-X)^2]$.

Теория нелинейных уравнений в свертках кажется не очень разработанной, причем уравнения различной структуры слабо связаны между собой. Отметим публикации [5*], [6*], [7*], [8*], [9*], [10*] и [11*]. Для уравнения $\Phi = f * G(\Phi)$ основополагающей является работа [4*], где в общих чертах предполагается, что для некоторого $\eta > 0$

$$G \in C^2[0,\eta] \quad \& \quad G(0) = 0 \quad \& \quad G(\eta) = \eta \quad \& \quad G' > 0 \quad \& \quad G'' < 0.$$

[1*] J.D. Sargan, *The distribution of wealth*, Econometrica, **25**:4 (1957), 568–590.

[2*] Р. Беллман, К.Л. Кук, *Дифференциально-разностные уравнения*, М.: Мир, 1967.

[3*] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян, *Об одном интегро-дифференциальном уравнении в задаче распределения дохода*, Экономика и матем. методы, **45**:4 (2009), 84–96.

[4*] O. Diekmann, H.G. Kaper, *On the bounded solutions of a nonlinear convolution equation*, Nonlinear Anal. Th. Meth. Appl., **2**:6 (1978), 721–737.

[5*] Л.Г. Арабаджян, Н.Б. Енгибарян, *Уравнения в свертках и нелинейные функциональные уравнения*, Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал., **22** (1984), 175–244.

[6*] С.Н. Асхабов, Н.К. Карапетянц, А.Я. Якубов, *Об одном нелинейном уравнении типа свертки*, Дифференц. уравнения, **22**:9 (1986), 1606–1609.

[7*] F. Comets, Th. Eisele, M. Schatzman, *On secondary bifurcations for some nonlinear convolution equations*, Trans. Amer. Math. Soc., **296**:2 (1986), 661–702.

[8*] A. Chmaj, X. Ren, *Homoclinic solutions of an integral equation: existence and stability*, J. Differ. Equations, **155**:1 (1999), 17–43.

[9*] A. Asselah, R.D. Nussbaum, *Existence, uniqueness and analyticity for periodic solutions of a non-linear convolution equation*, Integr. Equations Oper. Theory, **42**:4 (2002), 385–424.

[10*] С.Н. Асхабов, *Нелинейные уравнения типа свертки*, М.: Физматлит, 2009.

[11*] С.Н. Асхабов, *Периодические решения уравнений типа свертки с монотонной нелинейностью*, Уфим. матем. журнал, **8**:1 (2016), 22–37.

Установлено, что для существования решения

$$\Phi \in C_M(\mathbb{R}) = C(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R}): \quad 0 \leqslant \Phi \leqslant \eta \quad \& \quad \Phi(-\infty) = 0 \quad \& \quad \Phi(+\infty) = \eta$$

уравнения $\Phi = f * G(\Phi)$ необходимо соблюдение ряда условий о «скошенности вправо» функции f: малость интеграла $\int_{-\infty}^0 f\,dx$, положительность первого момента $\int_\mathbb{R} xf(x)\,dx$, сходимость и малость интеграла $\int_{-\infty}^0 e^{-\mu x} f(x)\,dx$ для некоторого $\mu > 0$ и разрешимость характеристического уравнения

$$G'(0)\int_\mathbb{R} e^{-\mu x} f(x)\,dx = 1 \qquad (\mu > 0),$$

которое получается применением анзаца $\phi(x) = e^{\mu x}$ к линеаризации $\phi = G'(0) f * \phi$ уравнения $\Phi = f * G(\Phi)$. Пара главных результатов в [4*] утверждает, что при некоторых условиях

$$(\exists A > 0) \qquad \Phi(x) \sim Ae^{\sigma x} \quad \text{при} \quad x \to -\infty,$$

где σ — наименьший корень характеристического уравнения, и что Φ единственно с точностью до сдвигов по x. О теории Дикмана–Капера и ее развитии см. публикации [12*], [13*] и [14*].

Вопрос разрешимости уравнения $\Phi = f * G(\Phi)$ более прост. Он изучен, например, в работе [15*]≡[8] (§ 6). Монотонность отображения $\phi \mapsto f * G(\phi)$ позволила применить принцип суб- и суперрешений с функцией $\eta e^{\sigma x} \wedge \eta$ в роли суперрешения.

Самые существенные оплошности статьи

1. На с. 3 редукция исходного уравнения к уравнению $\Phi = f * G(\Phi)$ производится с помощью «механического» интегрирования по частям. Возникает вопрос об обращении этой редукции, чтобы из решения уравнения $\Phi = f * G(\Phi)$ получить искомую бегущую волну. Очевидно, что выкладка (8) обратима, но ничего не сказано об обратимости операции интегрирования из строк 5–6 сверху. В этом интегрировании переменную z надо считать фиксированной, так как от нее зависит подынтегральная функция, так что мы имеем дело с определенным интегралом, а не первообразной. Это делает доказательство теоремы 1 неполным. Отметим, что в терминах свертывания с E указанная проблема почти тривиальна.

2. На с. 5, строки 10–11 сверху, утверждается, что функция L выпукла на множестве $[0, \infty)$, хотя в примере $K(x) = ae^{-|x|}/2$ из § 5 она определена только на $[0, 1)$.

3. На с. 5, строки 8–11 снизу, разрешимость уравнения $\Phi = f * G(\Phi)$ установлена отсылкой к работе [16*]≡[9]. Очевидно, имеется в виду теорема 1. Однако эта теорема доказана при условии (П2) конечности второго момента $\int_\mathbb{R} x^2 f(x)\,dx$ функции f, тогда как в рецензируемой статье постулируется только сходимость интеграла $\int_\mathbb{R} |x|K(x)\,dx$ и, следовательно, только сходимость интеграла $\int_\mathbb{R} |x|f(x)\,dx$.

4. На с. 13, строка 1 сверху, содержится правильная формула $L(\mu) = \frac{G'(0)\lambda}{(\lambda+\mu)(1-\mu^2)}$ для случая $K(x) = ae^{-|x|}/2$. Отсюда $L(\mu) \to \infty$ при $\mu \uparrow 1$. Очевидно, что это противоречит утверждению об убывании функции L на $(0, 1)$ двумя строками ниже.

5. На с. 13 замечание в строках 1–6 снизу производит самое бредовое впечатление во всей статье. Сначала в исходном уравнении предлагается отбросить зависимость от t и даже сам интеграл, смысл чего совершенно непонятен. Затем утверждается, что так мы получим функцию $\frac{m}{a}\exp\bigl(-\frac{ax}{m}\bigr)\chi_{[0,\infty)}(x)$, хотя возникшее уравнение $mP'(x) + aP(x) = 0$ имеет только экспоненциальные решения $C\exp\bigl(-\frac{ax}{m}\bigr)$. Наконец, предложено обозначить $x = \ln\frac{\omega}{\omega_0}$, смысл чего снова совершенно непонятен.

[12*]M. Aguerrea, C. Gomez, S. Trofimchuk, *On uniqueness of semi-wavefronts*, Math. Ann., **354**:1 (2012), 73–109.

[13*]H. Inaba, *Age-structured population dynamics in demography and epidemiology*, Springer, Singapore, 2017.

[14*]A. Solar, S. Trofimchuk, *A simple approach to the wave uniqueness problem*, J. Differ. Equations, **266**:10 (2019), 6647–6660.

[15*]O. Diekmann, *Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection*, J. Math. Biology, **6** (1978), 109–130.

[16*]Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян, *О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна–Стилтьеса на всей прямой*, Труды МИАН, **308** (2020), 253–264.

Описание содержания статьи

В подстрочном примечании на с. 1 выполнено разделение результатов §§ 1–5 между авторами. Это вызывает недоумение, так как § 1 является кратким введением с парой формул.

В § 2 перечислены условия на параметры и функции (c, m, a, K, G) и выполнено сведение исходной задачи к уравнению $\Phi = f * G(\Phi)$, для которого сформулировано утверждение о разрешимости. Выкладки можно упростить с помощью элементарных свойств свертки.

В § 3 доказано, что

$$\exists \Phi' \in C_M(\mathbb{R}) \qquad \& \qquad \Phi'(\pm\infty) = 0.$$

Использованы повышенная гладкость свертки $f = E * \mathcal{K}$ (авторы пишут T вместо f) по сравнению с $\mathcal{K}$ и представление $\Phi = f * g$, где $g = G(\Phi) \in C_M(\mathbb{R})$, $g(-\infty) = 0$ и $g(+\infty) = \eta$. Рассуждения можно упростить с помощью соотношения

$$(\forall f_1 \in L_1(\mathbb{R}))\ (\forall g \in C_M(\mathbb{R})\colon \exists g(\pm\infty)) \quad f_1 * g \in C_M(\mathbb{R}) \quad \& \quad f_1 * g(\pm\infty) = \left(\int_{\mathbb{R}} f_1\, dx\right) g(\pm\infty).$$

Первая часть в сущности упомянута на с. 8 (строка 5 сверху), а вторая — на с. 7 (строка 7 снизу). С учетом равенства $E' + \lambda E = \delta$ и элементарных свойств свертки получаем

$$\begin{aligned}
E * g \in C_M(\mathbb{R}) \qquad & \& \qquad E * g(\pm\infty) = \lambda^{-1} g(\pm\infty),\\
(E * g)' = -\lambda E * g + g \in C_M(\mathbb{R}) \qquad & \& \qquad (E * g)'(\pm\infty) = -\lambda\lambda^{-1} g(\pm\infty) + g(\pm\infty) = 0,\\
\Phi' = (E * \mathcal{K} * g)' = \mathcal{K} * (E * g)' \in C_M(\mathbb{R}) \qquad & \& \qquad \Phi'(\pm\infty) = \left(\int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}\, dx\right)(E * g)'(\pm\infty) = 0.
\end{aligned}$$

В § 4 сначала установлено, что $\Phi \leqslant \eta$, если нелинейность $G(X)$ априори задана при $X \geqslant 0$ (вариация на тему определений). Затем исследуется поведение $\Phi(x)$ при $x \to +\infty$. В свете теории Дикмана–Капера эта проблема естественна, но неупоминание асимптотики $\Phi(x) \sim Ae^{\sigma x}$ при $x \to -\infty$ делает интерес к поведению при $x \to +\infty$ несколько странным. Идея исследования заключается в следующем. Введем функции

$$\begin{aligned}
\varphi &= \eta - \Phi \in C_M(\mathbb{R}),\\
g &= \eta - G(\eta - \cdot) \in C[0, \eta].
\end{aligned}$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned}
& 0 \leqslant \varphi \leqslant \eta \qquad \& \qquad 0 \leqslant g \leqslant \eta,\\
& \varphi = f * g(\varphi) \qquad \Big(\text{в силу } \Phi = f * G(\Phi) \text{ и } \int_{\mathbb{R}} f\, dx = 1\Big),\\
(\exists \alpha \in (0,1))\ (\exists r \in \mathbb{R})\ (\forall x > r) \quad & g(\varphi(x)) \leqslant \alpha\varphi(x) \qquad (\text{см. } (25)),\\
(\forall y \in \mathbb{R}) \qquad & \varphi(y) = \int_r^{\infty} f(y-x) g(\varphi(x))\, dx + \int_{-\infty}^{r} f(y-x) g(\varphi(x))\, dx\\
& \leqslant \alpha f * \varphi(y) + \eta f * \chi_{(-\infty, r)}(y).
\end{aligned}$$

В § 4 интегральная оценка $\varphi \in L_1(0, \infty)$ выводится с помощью регуляризации $\varphi\chi_{(r,R)}$ $(R \to +\infty)$ функции φ. Просто применить то, что свертка с αf является сжимающим оператором в $L_1(\mathbb{R})$, нельзя ввиду неинтегрируемости по $\mathbb{R}$ функций φ и $f * \chi_{(-\infty, r)}$.

Включение $\varphi \in L_1(0, \infty)$ является самым интересным результатом статьи. К сожалению, он почти идентичен свойству (III) в теореме 1 из [16*]. Доказательства внешне тоже очень схожи. Статья никак не комментирует эти «совпадения». Кроме того, результат $\varphi \in L_1(0, \infty)$ можно усилить в следующих лемме* и теореме*. Вероятно, что лемма* известна в теории вероятностей, но полноценная проверка литературы потребовала бы много времени.

Лемма*. Для неотрицательной функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ с интегралом $\int_{\mathbb{R}} f\, dx = 1$ положим

$$f^{k*} = f * \cdots * f \qquad (k \geqslant 1 \text{ сомножителей}),$$

$$
\begin{aligned}
F_k(y) &= \int_y^\infty f^{k*}\,dx \qquad (y>0),\\
F(y) &= \int_{-\infty}^y f\,dx = 1 - F_1(y),\\
G_k &= \sum_{j=1}^k jF^{j-1} = 1 + 2F + \cdots + kF^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Тогда для любого $\beta > 0$ имеет место неравенство

$$
F_k(y) \leqslant e^{\beta(k-1)} \int_0^\infty \exp\left(\beta\frac{x-y}{x}\right) f(x) G_k(x)\,dx.
$$

Доказательство. При $k=1$ искомая оценка тривиальна на основании $G_1 \equiv 1$. Пусть она верна при некотором $k \geqslant 1$ (предположение индукции). Тогда для $z>0$ ввиду $f \geqslant 0$ и $F_k \leqslant 1$

$$
\begin{aligned}
F_{k+1}(z) &= \int_{-\infty}^\infty F_k(y) f(z-y)\,dy\\
&\leqslant F_1(z) + e^{\beta(k-1)} \int_0^\infty \int_0^\infty \underbrace{\exp\left(\beta\frac{x-y}{x}\right) f(x)G_k(x)f(z-y)}_{H_k(x,y,z)}\,dx\,dy.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что

$$
x+y<z \quad\Rightarrow\quad \frac{x-y}{x} = 1 - \frac{y}{x} < 1 - \frac{y}{z-y},
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^z \int_0^{z-y} H_k(x,y,z)\,dx\,dy &\leqslant e^\beta \int_0^z \int_0^{z-y} \exp\left(\beta\frac{-y}{z-y}\right) f(\xi)G_k(\xi)f(z-y)\,d\xi\,dy\\
&= e^\beta \int_0^z \int_0^x \exp\left(\beta\frac{x-z}{x}\right) f(\xi)G_k(\xi)f(x)\,d\xi\,dx,
\end{aligned}
$$

$$
\int_0^x fG_k\,d\xi = \int_0^x f\sum_{j=1}^k jF^{j-1}\,d\xi = \int_0^x d\sum_{j=1}^k F^j \leqslant \sum_{j=1}^k F^j(x),
$$

$$
\int_0^z \int_0^{z-y} H_k(x,y,z)\,dx\,dy \leqslant e^\beta \int_0^z \exp\left(\beta\frac{x-z}{x}\right) f(x)\sum_{j=1}^k F^j(x)\,dx,
$$

$$
x+y>z \quad\Rightarrow\quad \frac{x-y}{x} = \frac{x-z+z-y}{x} < \frac{x-z}{x} + 1,
$$

$$
\begin{aligned}
\int_0^\infty dx \int_{(z-x)\vee 0}^\infty H_k(x,y,z)\,dy &\leqslant e^\beta \int_0^\infty \exp\left(\beta\frac{x-z}{x}\right) f(x)G_k(x)\,dx \int_{z-x}^\infty f(z-y)\,dy\\
&= e^\beta \int_0^\infty \exp\left(\beta\frac{x-z}{x}\right) f(x)G_k(x)F(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Отсюда

$$
\begin{aligned}
F_{k+1}(z) &\leqslant F_1(z) + e^{\beta k} \int_0^\infty \exp\left(\beta\frac{x-z}{x}\right) f(x)\left\{\sum_{j=1}^k F^j(x) + G_k(x)F(x)\right\} dx\\
&\leqslant e^{\beta k} \int_0^\infty \exp\left(\beta\frac{x-z}{x}\right) f(x)\left\{1 + \sum_{j=1}^k F^j(x) + \sum_{j=1}^k jF^j(x)\right\} dx\\
&= e^{\beta k} \int_0^\infty \exp\left(\beta\frac{x-z}{x}\right) f(x)G_{k+1}(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Индукция по k доказывает лемму*. $\square$

Теорема*. Пусть функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $\varphi \in C_M(\mathbb{R})$ таковы, что $f \geqslant 0$, $\int_{\mathbb{R}} f\,dx = 1$ и

$$(\exists \alpha \in (0,1))\ (\exists \eta > 0)\ (\exists r \in \mathbb{R}) \qquad \varphi \leqslant \alpha f * \varphi + \eta f * \chi_{(-\infty,r)}.$$

Тогда для любых $0 < \beta < \ln \frac{1}{\alpha}$ и $y > r$ выполнено неравенство

$$\varphi(y) \leqslant \eta \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha e^{\beta})^{k-1} \frac{k(k+1)}{2} \int_0^{\infty} \exp\left(\beta \frac{x+r-y}{x}\right) f(x)\,dx. \tag{†}$$

Если дополнительно $f(x) = 0$ для $x > x_0 > 0$, то

$$\varphi(x) = O(e^{-\beta x/x_0}) \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{*}$$

а если $p \geqslant 0$ и $\int_0^{\infty} x^p f(x)\,dx < \infty$, то

$$\varphi(x) = o(x^{-p}) \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \tag{**}$$

$$(p \neq 0) \qquad \int_0^{\infty} x^{p-1} \varphi(x)\,dx < \infty. \tag{***}$$

Доказательство. Обозначим $\zeta = \eta \chi_{(-\infty,r)}$. По индукции выводим

$$\varphi \leqslant \alpha f * \{\alpha f * \varphi + f * \zeta\} + f * \zeta \leqslant \cdots \leqslant \alpha^N f^{N*} * \varphi + \sum_{k=1}^{N} \alpha^{k-1} f^{k*} * \zeta,$$

$$\varphi(y) \leqslant \alpha^N \sup \varphi + \eta \sum_{k=1}^{N} \alpha^{k-1} \int_{y-r}^{\infty} f^{k*}\,dx \xrightarrow{N\to\infty} \eta \sum_{k=1}^{\infty} \alpha^{k-1} \int_{y-r}^{\infty} f^{k*}\,dx.$$

При $y > r$ это дает основную оценку (†) по лемме* и свойству $G_k \leqslant \sum_{j=1}^{k} j = \frac{k(k+1)}{2}$.

Если $f(x) = 0$ для $x > x_0 > 0$, то при $y > r$

$$\int_0^{\infty} \exp\left(\beta \frac{x+r-y}{x}\right) f(x)\,dx = \int_0^{x_0} \exp\left(\beta \frac{x+r-y}{x}\right) f(x)\,dx \leqslant \exp\left(\beta \frac{x_0+r-y}{x_0}\right),$$

что в силу основной оценки доказывает (*).

Пусть $p \geqslant 0$ и $\int_0^{\infty} x^p f(x)\,dx < \infty$. Тогда по основной оценке

$$\begin{aligned}
(y-r)^p \varphi(y) &\leqslant C(\alpha,\beta,\eta) \int_0^{\infty} \mathcal{E}(x,y) x^p f(x)\,dx,\\
\mathcal{E}(x,y) &= \left(\frac{y-r}{x}\right)^p \exp\left(\beta \frac{x+r-y}{x}\right) \leqslant \sup_{t>0} t^p e^{\beta-\beta t},\\
(\forall X > 0) \quad \sup_{0<x<X} \mathcal{E}(x,y) &\leqslant \sup_{t>(y-r)/X} t^p e^{\beta-\beta t} \xrightarrow{y\to\infty} 0,
\end{aligned}$$

откуда вытекает (**). Если же $p \neq 0$, то аналогично

$$\begin{aligned}
\int_r^{\infty} (y-r)^{p-1} \varphi(y)\,dy &\leqslant C \int_r^{\infty} \int_0^{\infty} (y-r)^{p-1} \exp\left(\beta \frac{x+r-y}{x}\right) f(x)\,dx\,dy\\
&= C \int_0^{\infty} x^p f(x)\,dx \int_0^{\infty} t^{p-1} e^{\beta-\beta t}\,dt < \infty,
\end{aligned}$$

что устанавливает (***). □

Неравенства (†) и (*) теоремы* являются новыми по сравнению с результатами из § 4. Теория Дикмана–Капера и экспоненциальная оценка (*) подсказывают такую проблему: верно ли, что

$$\varphi(x) = \eta - \Phi(x) \sim A_+ e^{-\sigma_+ x} \quad \text{при} \quad x \to +\infty$$

для некоторых $A_+, \sigma_+ > 0$ в случае финитной функции f, а если да, то вычислить по данным задачи показатель σ_+ и не зависящую от сдвигов по x константу связи $A^{1/\sigma} A_+^{1/\sigma_+}$. Свойство (**) в отличие от теоремы 3 не требует монотонности функции φ.

В § 5 для конкретных функций K и G проверяются постулированные ранее в статье условия. Выкладки — простое упражнение, но даже в них закралась оплошность № 4. Функцию Дикмана проще вычислять по формуле

$$L(\mu) = G'(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-\mu x} f(x)\,dx = G'(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-\mu x} E * \mathcal{K}(x)\,dx$$
$$= G'(0) \int_{\mathbb{R}} e^{-\mu x} E(x)\,dx \int_{\mathbb{R}} e^{-\mu x} \mathcal{K}(x)\,dx = \frac{G'(0)}{\lambda + \mu} \int_{\mathbb{R}} e^{-\mu x} \mathcal{K}(x)\,dx.$$

Без § 5 лучше было бы обойтись. Например, Одо Дикман обошелся без иллюстрации примером своей теоремы о разрешимости уравнения $\Phi = f * G(\Phi)$ (теорема 6.1 в [15*]).

Заключение

Рецензируемая статья состоит из нескольких несложных и слабо связанных между собой тем: редукция исходного уравнения к нелинейному уравнению в свертках, дифференцируемость решения уравнения в свертках и поведение решения уравнения в свертках на бесконечности. Тем самым она имеет во многом компиляционный характер. Изложение в § 2 и § 3 можно упростить в несколько раз на основе базовых фактов о свертках функций и обобщенных функций, обычно излагаемых в курсах функционального анализа. Результаты в § 4 имеют малую степень новизны относительно другой работы авторов этого года и могут быть значительно усилены с помощью не очень сложной леммы. Текст статьи отягощен рядом логических погрешностей, из которых самые важные перечислены в списке пяти оплошностей. Считаю, что статью нельзя рекомендовать к публикации в Сибирских электронных математических известиях.