Асимптотическое поведение решения для одного класса нелинейных интегро-дифференциальных уравнений в задаче распределения дохода *

А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян

Аннотация: Исследуется класс нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа свертки, имеющих непосредственное применение в эконометрике. Изучаются некоторые качественные свойства решения: асимптотическое поведение, монотонность, гладкость. В конце приводится конкретный пример прикладного характера.

Ключевые слова: распределение богатств, асимптотика, волновой фронт, предел решения, монотонность.

Библиография: 14 наименований.

§1. Введение

Рассмотрим следующее нелинейное интегро-дифференциальное уравнение первого порядка:

$$\frac{\partial P(x,t)}{\partial t} + m\frac{\partial P(x,t)}{\partial x} + aP(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y)G(P(x-y,t))dy, \tag{1}$$
$$x \in \mathbb{R} := (-\infty, +\infty),\ \ t \in \mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$$

относительно искомого волнового фронта $P(x,t) := \Phi(x+ct)$, где $c > 0$ — волновая скорость, а m и a — положительные параметры. Уравнение (1) возникает в эконометрике (см. [1]-[3]). В частности, уравнением (1) описывается задача распределения богатства страны между ее экономическими агентами, при этом $P(x,t)$ играет роль плотности распределения. $P(x,t)dx$ приближенно представляет долю экономических агентов в интервале $[x, x+dx]$ в момент времени t. Ядро K из себя представляет функцию перераспределения, обусловленную разными экономическими причинами

*Исследование второго и третьего авторов выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект №19-11-00223). Результаты §1, §3, §4 принадлежат Х.А. Хачатряну и А.С. Петросян, а результаты §2, §5 - А.Х. Хачатряну. Исследование первого автора выполнено при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 18T-1A004.

(в частности, капитальные трансферты, в том числе пожертвования между агентами, возникновение новых агентов, объединение двух или нескольких предприятий, исчезновение старых предприятий и переход имущества в качестве наследства полностью или частично к другим агентам). В уравнении (1) число m характеризует среднее сбережение и рост капиталов, а параметр a описывает "потери богатств "в связи с банкротством и исчезновением агентов.

В линейном случае, когда $K(x-y)=0$ при $y<0$ уравнение (1) достаточно подробно исследовалось в работах [1] и [3]. Когда интегрирование в правой части совершается в пределах от 0 до $+\infty$, соответствующее нелинейное стационарное уравнение (т. е когда P не зависит от переменной t) было изучено в работах [4]-[6].

В настоящей работе при определенных ограничениях на нелинейность G и на ядро K займемся построением неотрицательного нетривиального волнового фронта (решения в виде бегущей волны) для уравнения (1) и изучением некоторых качественных свойств построенного решения: асимптотическое поведение, монотонность, гладкость. В конце мы приведем конкретный пример прикладного характера, для которого выполняются все условия сформулированной теоремы.

§2. Сведение уравнения (1) к интегральному уравнению. Существование решения.

В уравнении (1) ядро K — определенная на множестве $\mathbb{R}$ положительная ограниченная и суммируемая функция, причем

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x)dx = a, \quad \int_{-\infty}^{\infty} |y|K(y)dy < +\infty. \tag{2}$$

Решение $P(x,t) := \Phi(x+ct)$ уравнения (1) ищем в следующем классе функций:

$$\mathfrak{M} := \{f : f^{(k)} \in C_M(\mathbb{R}),\ f(-\infty)=0,\ k=0,1\}, \tag{3}$$

где $f^{(k)}$ — k - тая производная функции f, а $C_M(\mathbb{R})$ — пространство непрерывных и ограниченных функций на множестве $\mathbb{R}$.

Прежде, чем накладывать соответствующие условия на функции G и K, уравнение (1) запишем в терминах функции Φ :

$$c\Phi'(x+ct) + m\Phi'(x+ct) + a\Phi(x+ct) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y)G(\Phi(x-y+ct))dy \tag{4}$$

или

$$(m+c)\Phi'(x) + a\Phi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K(y)G(\Phi(x-y))dy, \quad x\in\mathbb{R}, \tag{5}$$

где $x := x+ct \in \mathbb{R}$.

Уравнение (5) перепишем в следующем виде:

$$\Phi'(x)+\lambda\Phi(x)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}(x-y)G(\Phi(y))dy,\quad x\in\mathbb{R},\tag{6}$$

где

$$\lambda:=\frac{a}{m+c},\ \tilde{K}(x):=\frac{1}{m+c}K(x),\ x\in\mathbb{R}.\tag{7}$$

Умножая обе части уравнения (6) на функцию $e^{-\lambda(z-x)}$ и интегрируя обе части полученного равенства по x в пределах от $-\infty$ до z (при этом учитывая тот факт, что $\Phi\in\mathfrak{M}$), будем иметь

$$\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\lambda(z-x)}\Phi'(x)dx+\lambda\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\lambda(z-x)}\Phi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\lambda(z-x)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}(x-y)G(\Phi(y))dydx$$

или

$$\begin{gathered}e^{-\lambda(z-x)}\Phi(x)\mid_{x=-\infty}^{z}-\lambda\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\lambda(z-x)}\Phi(x)dx+\lambda\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\lambda(z-x)}\Phi(x)dx=\\=\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-\lambda(z-x)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}(x-y)G(\Phi(y))dydx.\end{gathered}\tag{8}$$

Меняя порядок интегрирования в правой части (8), будем иметь

$$\Phi(z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(z-y)G(\Phi(y))dy,\quad z\in\mathbb{R},\tag{9}$$

где

$$T(z):=\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda\tau}\tilde{K}(z-\tau)d\tau,\quad z\in\mathbb{R}.\tag{10}$$

Заметим, что

$$\mu(T):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(z)dz=1.\tag{11}$$

Действительно, учитывая (2), (7) и (10), а также теорему Фубини (см. [7]), будем иметь

$$\mu(T)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{0}^{\infty}e^{-\lambda\tau}\tilde{K}(z-\tau)d\tau dz=\frac{1}{\lambda(m+c)}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x)dx=\frac{1}{a}\int\limits_{-\infty}^{\infty}K(x)dx=1.$$

Волновые скорости ниже выберем так, чтобы

$$\nu(T):=\int\limits_{-\infty}^{\infty}zT(z)dz>0.\tag{12}$$

Здесь также используя (2), (7), (10) и теорему Фубини, получим

$$\nu(T) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} z \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau}\tilde{K}(z-\tau)d\tau dz = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} z\tilde{K}(z-\tau)dzd\tau =$$

$$= \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda\tau} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\tau+y)\tilde{K}(y)dyd\tau = \frac{m+c}{a} + \frac{\nu(K)}{a} > 0$$

при $c > \max\{-\nu(K) - m; 0\}$.

Так как $m, c > 0$, то легко заметить, что неравенство

$$\nu(T) > 0$$

выполняется автоматически, если дополнительно потребовать, чтобы $\nu(K) \geq -m$.

Относительно функции G предположим выполнение следующих условий (см. рис. 1):

1) существует ее производная в нуле $G'(0)$, так что $1 < G'(0) < +\infty$ и

$$G(u) \leq G'(0)u, \quad u \in [0, \eta],$$

где $\eta > 0$ — первая положительная неподвижная точка функции G,

2) функция G монотонно возрастает на $\mathbb{R}^+ := [0, +\infty)$ и выпукла вверх на $\mathbb{R}^+$,

3) существуют числа $\varepsilon > 0$ и $c_0 > 0$ такие, что

$$G(u) \geq G'(0)u - c_0 u^{1+\varepsilon}, \quad u \in [0, \eta].$$

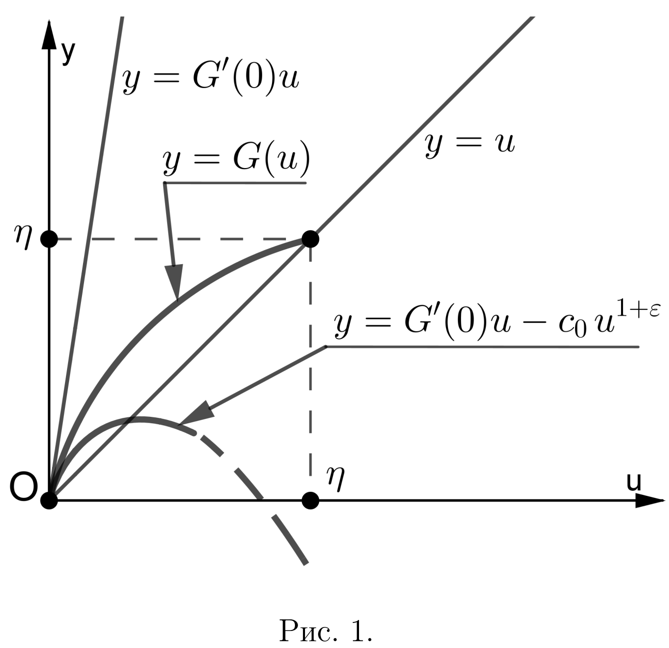

Рис. 1.

Рассмотрим теперь функцию Дикмана (см. [8])

$$L(\mu) := G'(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x} T(x) dx, \quad \mu \geq 0$$

(в предположении, что последний интеграл сходится).

Заметим, что

$$L(0) = G'(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x) dx > 1.$$

В силу (12) имеем

$$L'(+0) = \frac{d}{d\mu} L(\mu) \mid_{\mu=0} = -G'(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} x T(x) dx = -G'(0)\nu(T) < 0.$$

Из структуры функции $L(\mu)$ следует также, что

$$L''(\mu) = G'(0) \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^2 T(x) e^{-\mu x} dx > 0 \tag{13}$$

(может быть и равным $+\infty$). Следовательно, функция $L(\mu)$ выпукла вниз на множестве $[0, +\infty)$.

Если предположить, что существует число $\mu_1 > 0$ такое, что при $\mu \in (0, \mu_1]$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu x} |x| T(x) dx < +\infty,$$

то в силу непрерывности функции $L'(\mu)$ на интервале $(0, \mu_1]$ и того, что $L'(+0) < 0$, можем утверждать, что существует число $\mu_0 \in (0, \mu_1]$ такое, что имеет место $L'(\mu) < 0$ при $\mu \in (0, \mu_0]$. В дальнейшем, если не будет оговорено противное, будем считать, что

$$L(\mu_0) < 1. \tag{14}$$

При таких ограничениях на $L(\mu)$ в работе [9] (а в частном случае, когда $\varepsilon = 1$ в работе [8]) доказано, что уравнение (9) обладает положительным монотонно неубывающим и ограниченным решением Φ, причем

$$\lim_{z \to -\infty} \Phi(z) = 0, \quad \lim_{z \to +\infty} \Phi(z) = \eta. \tag{15}$$

Данное решение является также непрерывным на множестве $\mathbb{R}$. Более того, в работе [9] доказано, что решение единственно в конкретно выбранном конусном отрезке. Следует отметить, что, вообще говоря, решение уравнения (9) не единственно в пространстве неотрицательных и ограниченных функций на $\mathbb{R}$, удовлетворяющее предельным соотношениям (15), ибо всевозможные сдвиги построенного решения $\Phi(z)$ также удовлетворяют уравнению (9).

В следующем параграфе мы докажем, что решение $\Phi \in \mathfrak{M}$.

§3. Гладкость решения уравнения (9)

Для доказательства включения $\Phi \in \mathfrak{M}$ мы сперва убедимся, что

I) $T \in C^1(\mathbb{R})$,

II) $T^{(k)} \in L_1(\mathbb{R}) \cap M(\mathbb{R}), \quad k = 0, 1,$

где $T^{(k)}$ — k - тая производная функции T.

Представление (10) перепишем в следующем виде:

$$T(z) = \int\limits_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y) e^{-\lambda(z-y)} dy, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{16}$$

Так как $\tilde{K} \in C_M(\mathbb{R}) \cap L_1(\mathbb{R})$, то из (16) сразу следует, что $T \in C^1(\mathbb{R})$ и

$$T'(z) = \tilde{K}(z) - \lambda \int\limits_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y) e^{-\lambda(z-y)} dy, \quad z \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Используя (2), (7) из (17) и (16) будем иметь

$$0 \leq T(z) \leq \int\limits_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y) dy \leq \frac{1}{m+c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} K(y) dy = \frac{a}{m+c}$$

$$0 \leq T(z) \leq \sup_{y \in \mathbb{R}} \tilde{K}(y) \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-y)} dy = \frac{\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} \tilde{K}(y)(m+c)}{a} = \frac{\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} K(y)}{a},$$

$$|T'(z)| \leq \tilde{K}(z) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{z} \tilde{K}(y) e^{-\lambda(z-y)} dy \leq$$

$$\leq \frac{\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} K(y)}{m+c} + \frac{\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} K(y)}{m+c} \lambda \int\limits_{-\infty}^{z} e^{-\lambda(z-y)} dy = \frac{2 \sup\limits_{y \in \mathbb{R}} K(y)}{m+c},$$

$$|T'(z)| \leq \frac{\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} K(y)}{m+c} + \lambda \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{K}(y) dy = \frac{\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} K(y)}{m+c} + \left(\frac{a}{m+c} \right)^2.$$

Из полученных оценок немедленно следует, что

$$0 \leq T(z) \leq \min \left\{ \frac{\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} K(y)}{a}; \frac{a}{m+c} \right\},$$

$$|T'(z)| \leq \min \left\{ \frac{2 \sup\limits_{y \in \mathbb{R}} K(y)}{m+c}; \frac{\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} K(y)}{m+c} + \left(\frac{a}{m+c} \right)^2 \right\}.$$

Заметим также, что из (17) следует

$$\begin{gathered}
\int\limits_{-\infty}^{\infty}|T'(z)|dz \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}(z)dz + \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{z}\tilde{K}(y)e^{-\lambda(z-y)}dydz = \\
= \frac{a}{m+c} + \lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}(y)\int\limits_{y}^{\infty}e^{-\lambda(z-y)}dzdy = \frac{2a}{m+c}.
\end{gathered} \tag{18}$$

Итак, согласно вышеприведенному неравенству с учетом равенства (11) приходим к включениям $I)$ и $II)$.

Так как в силу (18) и (7) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(z-y)G(\Phi(y))dy \le G(\eta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}T(z)dz = \eta,$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|T'(z-y)|G(\Phi(y))dy \le G(\eta)\int\limits_{-\infty}^{\infty}|T'(z)|dz \le \frac{2a\eta}{m+c},$$

а ядро T обладает свойствами $I)$ и $II)$, то, в виду правила дифференцирования под знаком интеграла (см. [10]), можем утверждать, что существует

$$\Phi'(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}T'(z-y)G(\Phi(y))dy \in C(\mathbb{R}). \tag{19}$$

Очевидно, что

$$|\Phi'(z)| \le \int\limits_{-\infty}^{\infty}|T'(z-y)|G(\Phi(y))dy \le \frac{2a\eta}{m+c}.$$

Заметим также, что $\Phi'(+\infty) = \Phi'(-\infty) = 0$. Действительно, используя известное предельное соотношение в операции свертки (см. [11]) с учетом (15) из (19) будем иметь

$$\Phi'(+\infty) = G(\Phi(+\infty))\int\limits_{-\infty}^{\infty}T'(\tau)d\tau = \eta(T(+\infty) - T(-\infty)) = 0,$$

$$\Phi'(-\infty) = G(\Phi(-\infty))\int\limits_{-\infty}^{\infty}T'(\tau)d\tau = 0(T(+\infty) - T(-\infty)) = 0,$$

ибо

$$T(+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\tilde{K}(z)dz\lim_{\tau\to+\infty}e^{-\lambda\tau} = 0,$$

$$0 \le T(z) \le \int\limits_{-\infty}^{z}\tilde{K}(y)dy \to 0 \text{ при } z \to -\infty \Rightarrow T(-\infty) = 0.$$

§4. Асимптотическое поведение решения граничной задачи (9), (15).

Пусть Φ — любое ограниченное неотрицательное решение граничной задачи (9), (15). Сперва докажем, что Φ является непрерывной функцией на множестве $\mathbb{R}$. Как известно, свертка суммируемой и ограниченной функций является непрерывной функцией (см. [2]). Воспользуемся этим замечательным фактом. Так $G(\Phi(x))$ является также ограниченным, а $T \in L_1(\mathbb{R})$, то из (9) сразу следует, что $\Phi \in C(\mathbb{R})$. Докажем теперь, что $\eta - \Phi \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Так как $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = \eta$ и $\Phi(x) \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$, то существует число $r > 0$ такое, что при $x > r$

$$\Phi(x) > \frac{\eta}{2}. \tag{20}$$

Убедимся, что

$$\Phi(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{21}$$

Обозначим через $c_0 := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \Phi(x)$. Из (9) с учетом монотонности функции G и соотношения (11) будем иметь

$$c_0 \leq G(c_0). \tag{22}$$

Теперь предположим обратное : $c_0 > \eta$. Тогда в силу выпуклости (вверх) функции G получим (см. рис. 2)

$$\frac{G(c_0)}{c_0} < \frac{G(\eta)}{\eta} = 1.$$

Последнее противоречит неравенству (22). Следовательно,

$$0 \leq \Phi(x) \leq \eta, \quad x \in \mathbb{R}.$$

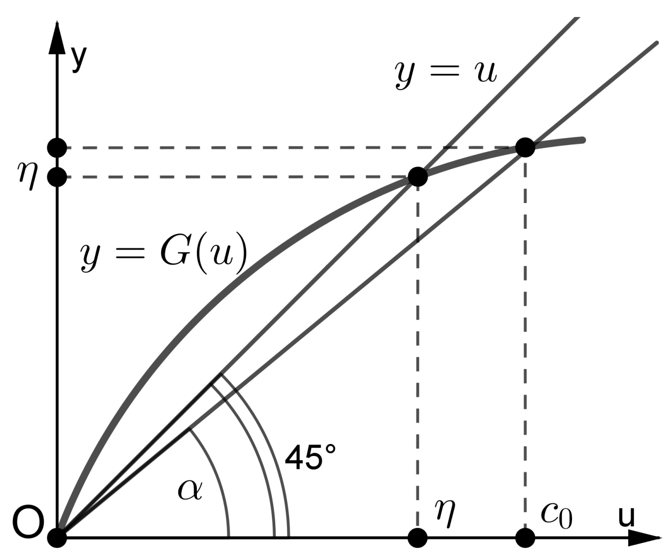

Рис. 2.

Используя (11), оценим следующую разность:

$$0 \le \eta - \Phi(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt \le \eta \int\limits_{-\infty}^{0} T(x-t)dt + \int\limits_{0}^{\infty} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt =$$

$$= \eta \int\limits_{x}^{\infty} T(\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{r} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt + \int\limits_{r}^{\infty} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt,$$

где число $r > 0$ определяется из (20).

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |x|K(x)dx < +\infty$, то с использованием теоремы Фубини легко можно убедиться, что

$$\int\limits_{0}^{r} T(x-t)dt \in L_1(\mathbb{R}^+),$$

$$\int\limits_{x}^{\infty} T(\tau)d\tau \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Следовательно, из вышеприведенного неравенства получим

$$0 \le \eta - \Phi(x) \le g_0(x) + \int\limits_{r}^{\infty} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dt, \tag{23}$$

где

$$g_0(x) := \eta \left(\int\limits_{x}^{\infty} T(\tau)d\tau + \int\limits_{0}^{r} T(x-t)dt \right) \in L_1(\mathbb{R}^+). \tag{24}$$

Пусть $R > r$ — произвольное число. Тогда из (23) с учетом (24) и конечности первого момента ядра T будем иметь

$$0 \le \int\limits_{r}^{R} (\eta - \Phi(x))dx \le \int\limits_{r}^{\infty} g_0(x)dx + \int\limits_{r}^{R} \int\limits_{r}^{\infty} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx =$$

$$= \int\limits_{r}^{\infty} g_0(x)dx + \int\limits_{r}^{R} \int\limits_{r}^{R} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx + \int\limits_{r}^{R} \int\limits_{R}^{\infty} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx \le$$

$$\le \int\limits_{r}^{\infty} g_0(x)dx + \eta \int\limits_{0}^{R} \int\limits_{R}^{\infty} T(x-t)dtdx + \int\limits_{r}^{R} \int\limits_{r}^{R} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx =$$

$$= \int\limits_{r}^{\infty} g_0(x)dx + \eta \int\limits_{0}^{R} \int\limits_{-\infty}^{x-R} T(y)dydx + \int\limits_{r}^{R} \int\limits_{r}^{R} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx =$$

$$= \int\limits_{r}^{\infty} g_0(x)dx + \eta \int\limits_{-R}^{0} \int\limits_{-\infty}^{z} T(y)dydz + \int\limits_{r}^{R} \int\limits_{r}^{R} T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx \le$$

$$\leq \int\limits_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int\limits_{-\infty}^0 \int\limits_{-\infty}^z T(y)dydz + \int\limits_r^R \int\limits_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx =$$

$$= \int\limits_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int\limits_{-\infty}^0 T(y)(-y)dy + \int\limits_r^R \int\limits_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx =$$

$$= \int\limits_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int\limits_0^\infty zT(-z)dz + \int\limits_r^R \int\limits_r^R T(x-t)(\eta - G(\Phi(t)))dtdx.$$

Из (20), (21) в силу выпуклости (вверх) функции G следует, что при $x > r$ имеет место (см. рис. 3)

$$G(\Phi(x)) \geq \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta}\Phi(x) + 2G(\eta/2) - \eta,$$

откуда получим, что для всех $x > r$

$$0 \leq \eta - G(\Phi(x)) \leq \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta}(\eta - \Phi(x)). \tag{25}$$

Следовательно, используя (25), из вышеприведенной цепочки неравенств приходим к следующей оценке сверху:

$$0 \leq \int\limits_r^R (\eta - \Phi(x))dx \leq \int\limits_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int\limits_0^\infty zT(-z)dz + \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int\limits_r^R \int\limits_r^R T(x-t)(\eta - \Phi(t))dtdx \leq$$

$$\leq \int\limits_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int\limits_0^\infty zT(-z)dz + \frac{2(\eta - G(\eta/2))}{\eta} \int\limits_r^R (\eta - \Phi(t))dt,$$

из которого следует, что

$$0 \leq \int\limits_r^R (\eta - \Phi(x))dx \leq \frac{\eta \left(\int\limits_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int\limits_0^\infty zT(-z)dz \right)}{2G(\eta/2) - \eta}, \tag{26}$$

ибо $2G(\eta/2) > \eta/2$.

В неравенстве (26) устремляя $R \to +\infty$ получаем, что $\eta - \Phi \in L_1(r, +\infty)$ и

$$\int\limits_r^\infty (\eta - \Phi(x))dx \leq \frac{\eta \left(\int\limits_r^\infty g_0(x)dx + \eta \int\limits_0^\infty zT(-z)dz \right)}{2G(\eta/2) - \eta}. \tag{27}$$

Так как $\Phi \in C(\mathbb{R})$, то из (27) получаем, что $\eta - \Phi \in L_1(\mathbb{R}^+)$.

Повторяя аналогичные рассуждения можно убедиться, что если $\int\limits_{-\infty}^\infty |y|^p K(y)dy < +\infty$ для некоторого $p > 0$, то $x^{p-1}(\eta - \Phi(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+)$. Как известно, (см. [13], стр. 85, задача 113) если функция $f(x)$ монотонна в интервале $[1, +\infty)$ и $\int\limits_1^\infty x^\alpha f(x)dx < +\infty$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{1+\alpha} f(x) = 0$. Следовательно, если дополнительно предположить, что $\Phi(x) \uparrow$ на $[1, +\infty)$, $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^p K(y)dy < +\infty,\ p > 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty} x^p(\eta - \Phi(x)) = 0$, т.е

$$\Phi(x) = \eta - o\left(\frac{1}{x^p}\right),\ \text{когда}\ x \to +\infty.$$

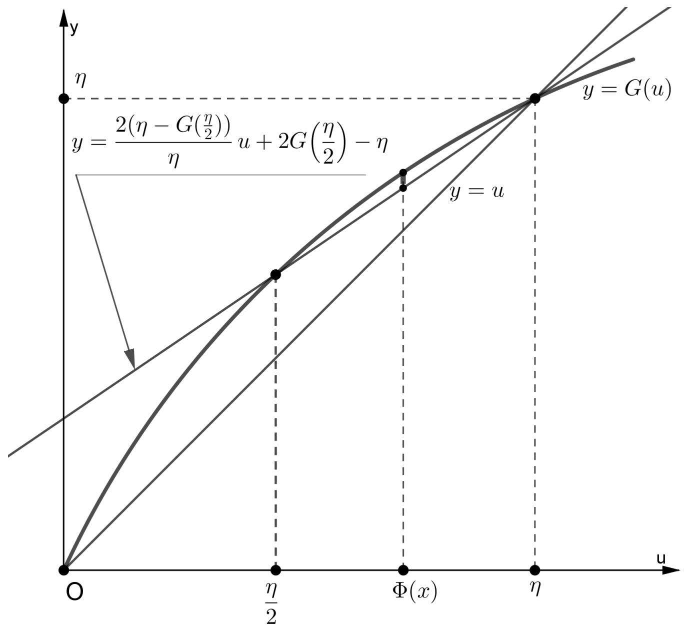

Рис. 3.

Итак, на основе отмеченных выше приходим к следующим теоремам.

Теорема 1. *При условиях* (2), 1) – 3), (14) *уравнение* (1) *обладает однопараметрическим семейством волновых фронтов* $P_c(x,t) := \Phi(x + ct)$, $c \in (\max\{-\nu(K) - m, 0\}, +\infty)$, *причем* $\Phi \in \mathfrak{M}$ *и*

$$\lim_{x\to+\infty} \Phi(x) = \eta,\ \Phi'(+\infty) = \Phi'(-\infty) = 0.$$

Более того,

$$\Phi(x) \uparrow\ \text{на}\ \mathbb{R},\ \eta - \Phi \in L_1(\mathbb{R}^+)\ \text{и}\ \ \Phi(x) = \eta - o\left(\frac{1}{x}\right)\ \text{при}\ x \to +\infty,$$

где $\eta > 0$ *— положительный корень уравнения* $G(u) = u$. ▶

Теорема 2. *При условиях* (2), 2) *если* $G(0) = 0$ *и уравнение* $G(u) = u$ *имеет положительное решение, а* $\Phi(x)$ *является ограниченным и неотрицательным решением граничной задачи* (9), (15), *то*

A) $\Phi \in C(\mathbb{R})$,

B) $\eta - \Phi \in L_1(\mathbb{R}^+)$. ▶

Теорема 3. *При условиях теоремы 2, если* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^p K(y)dy < +\infty$ *для некоторого* $p > 0$ *и* Φ *является ограниченным и неотрицательным решением граничной задачи* (9), (15), *то*

$$x^{p-1}(\eta - \Phi(x)) \in L_1(\mathbb{R}^+).$$

Более того, если дополнительно $\Phi(x) \uparrow$ *на* $[1, +\infty)$, *то*

$$\Phi(x) = \eta - o\left(\frac{1}{x^p}\right), \quad \textit{когда} \quad x \to +\infty. \blacktriangleright$$

§5. Приложение в эконометрике

В теории распределения богатства страны встречаются нелинейные интегро-дифференциальные уравнения вида (1), в которых ядро K и нелинейность G допускают следующие представления:

$$K(x) = \frac{a}{2}e^{-|x|}, \quad G(u) = \gamma(1 - e^{-u}), \quad \gamma > 1. \tag{28}$$

Предположим, что

$$c > \max\{4a - m; 0\}. \tag{29}$$

Из (29) сразу следует, что $\lambda \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$. Легко заметить, что K и G удовлетворяют условиям (2) и 1) $-$ 2). Проверим выполнение условия (14). Сперва заметим, что тогда

$$T(x) = \frac{a}{2(m+c)} \int\limits_0^\infty e^{-|x-t|} e^{-\lambda t} dt =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a}{2(m+c)} \int\limits_0^x e^{-(x-t)} e^{-\lambda t} dt + \dfrac{a}{2(m+c)} \int\limits_x^\infty e^{-(t-x)} e^{-\lambda t} dt, & x \geq 0 \\ \dfrac{a}{2(m+c)} \int\limits_0^\infty e^{-(t-x)} e^{-\lambda t} dt, & x < 0 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{a(e^{-\lambda x} - e^{-x})}{2(m+c)(1-\lambda)} + \dfrac{a e^{-\lambda x}}{2(m+c)(1+\lambda)}, & x \geq 0, \\ \dfrac{a e^{x}}{2(m+c)(1+\lambda)}, & x < 0. \end{cases}$$

Тогда функция Дикмана примет следующий вид

$$L(\mu) = \gamma \int\limits_{-\infty}^\infty T(x) e^{-\mu x} dx =$$

$$= \frac{\gamma\lambda}{2}\left(\frac{1}{(1-\lambda)(\mu+\lambda)} - \frac{1}{(1-\lambda)(\mu+1)} + \frac{1}{(\lambda+1)(\mu+\lambda)} + \frac{1}{(\lambda+1)(1-\mu)}\right) =$$

$$= \frac{\gamma\lambda}{2}\left(\frac{2}{(1-\lambda^2)(\mu+\lambda)} + \frac{1}{(1-\mu)(1+\lambda)} - \frac{1}{(1-\lambda)(\mu+1)}\right) =$$

$$= \frac{\gamma\lambda}{(\mu+\lambda)(1-\mu^2)}, \quad \text{при } \mu \in (0,1).$$

Легко заметить, что при $\mu \in (0,1)$

$$L'(\mu) = \gamma\lambda \frac{(\mu^2-1)(\mu+\lambda)}{(\mu+\lambda)^2(1-\mu^2)^2} < 0,$$

т.е. функция Дикмана $L(\mu) \downarrow$ на $(0,1)$.

Ниже проверим, что, например, для $\gamma = 2$ существует интервал $(a_0, b_0) \subset (0,1)$ такой, что $L(\mu) < 1$ при $\mu \in (a_0, b_0)$. В случае, когда $\gamma = 2$ неравенство $L(\mu) < 1$ для $\mu \in (0,1)$ примет следующий вид:

$$\mu^3 + \mu^2\lambda - \mu + \lambda < 0.$$

Очевидно, что при $\mu \in (0,1)$

$$\mu^3 + \mu^2\lambda - \mu + \lambda < \mu^3 + \mu\lambda - \mu + \lambda = (\mu+1)(\mu^2 - \mu + \lambda). \tag{30}$$

Поскольку при $\mu \in \left(\frac{1-\sqrt{1-4\lambda}}{2}, \frac{1+\sqrt{1-4\lambda}}{2}\right), \quad \lambda \in \left(0, \frac{1}{4}\right)$ имеет место неравенство

$$\mu^2 - \mu + \lambda < 0,$$

то с учетом (30) мы приходим к оценке

$$L(\mu) < 1 \quad \text{при } \lambda \in (a_0, b_0).$$

Осталось проверить условие 3) для функции $G(u) = \gamma(1-e^{-u})$. Для этого в качестве ε выберем единицу, а в качестве $c_0 = \gamma$, то неравенство 3) принимает следующий вид:

$$1 - e^{-u} \geq u - u^2, \quad u \in [0, \eta].$$

Последнее неравенство выполняется для всех $u \geq 0$, ибо для функции $\chi(u) = 1 + u^2 - u - e^{-u}, \quad u \geq 0$:

$$\chi(0) = 0, \quad \chi'(u) = 2u - 1 + e^{-u} \geq u \geq 0.$$

Замечание . *В стационарном случае, когда P не зависит от времени t, а интегральный член в* (1) *отсутствует, то из уравнения* (1) *получим*

$$P(x) = \begin{cases} \frac{m}{a}\, e^{-\frac{a}{m}x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \tag{31}$$

Обозначив $x = \ln\frac{\omega}{\omega_0}$, из (31) *приходим к известному распределению Парето*

$$Y(\omega) = \begin{cases} \frac{\alpha}{\omega_0}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^{\alpha+1}, & \omega \geq \omega_0, \\ 0, & \omega < \omega_0 \end{cases}$$

с параметрами α и ω_0 (см. на пр. [14]).

Список литературы

[1] I.D. Sargan. The distribution of wealth. Econometrics., 1957, vol 25, № 4, pp. 568-590.

[2] Р. Беллман , К.Л. Кук. Дифференциально-разностные уравнения, М.: Мир, 1967, -548стр.

[3] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. Об одном интегро-дифференциальном уравнении в задаче распределения богатства страны. Экономика и мат. методы, ЦЭМИ РАН, 2009, том 45, № 4, стр. 84-96.

[4] А.Х. Хачатрян, Х.А. Хачатрян. О разрешимости одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения в задаче распределения дохода. Ж. Вычислительной Математики и Математической Физики. 2010, том 50, № 10, стр. 1793-1802.

[5] A.Kh. Khachatryan, Kh.A. Khachatryan. On solvability of a nonlinear problem in theory of income distribution. Eurasian Math. J., 2011, vol. 2, № 2, pp. 75-88

[6] В.М. Кахкцян, А.Х. Хачатрян. Об аналитическо-чиссленном решении одного нелинейного интегро-дифференциального уравнения, возникающего в эконометрике. Ж. Вычисл. Матем. и матем. физ., том 54, № 7, 2013, стр. 1108-1112.

[7] А.Н. Колмогоров, В.С. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа, М.: Наука, 1980.

[8] O. Diekmann. Thresholds and travelling waves for the geographical spread of infection. J. Math. Biol. vol. 6, № 2, 1978, pp. 109-130.

[9] Х.А. Хачатрян, А.С. Петросян. О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна-Стильтеса на всей прямой. Туды МИАН, 2020, том 308. http://mi.mathnet.ru/tm4051.

[10] Б.М. Будак, С.В. Фомин. Кратные интегралы и ряды. М.: Наука, 1966.

[11] Г.Г. Геворкян, Н.Б. Енгибарян. Новые теоремы для интегрального уравнения восстановления. Изв. НАН Армении. Матемтика, 1977, том 32, № 1, стр. 5-20.

[12] У. Рудин. Функциональный анализ. М: Мир., 1975, -444 стр.

[13] Д. Пойа, Г. Сеге. Задачи и теоремы из анализа. Часть 1, М.: Наука, 1978. -392 стр.

[14] W. Feller. An Introduction to Probability Theory and its Application. *II* (2 nd ed), New York Wiley, 1971.

Контактная информация:
1) Хачатрян Агавард Хачатурович
Доктор физико-математических наук, профессор,
Национальный Аграрный Университет Армении,
E-mail: Aghavard59@mail.ru

2) Хачатрян Хачатур Агавардович
Доктор физико-математических наук, профессор,
Институт Математики НАН Армении,
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова,
E-mail: Khach82@rambler.ru

3) Петросян Айкануш Самвеловна
Кандидат физико-математических наук, доцент,
Национальный Аграрный Университет Армении,
Московский Государственный Университет им. М.В. Ломоносова
E-mail: Haykuhi25@mail.ru