S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №1, стр. 91–100 (2022) УДК 517.962.1, 517.55

DOI 10.33048/semi.2022.19.008 MSC 65B15, 32A15

МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ФОРМУЛЫ СУММИРОВАНИЯ ЭЙЛЕРА—МАКЛОРЕНА И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ БОРЕЛЯ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ

Е.К. ЛЕЙНАРТАС, М.Е. ПЕТРОЧЕНКО

Abstract. The aim of the paper is to study the problem of summation of functions of a discrete variable on integer points in a rational parallelepiped. Our method is based on Borel's transform of power series. Integral representation for discrete antiderivative and a new variant of the Euler-Maclaurin formula are described. Consequently new identities satisfied by Bernoulli's polynomials are obtained.

Keywords: summation of functions, Euler-Maclaurin formula, Borel transform of power series.

1. Введение

Суммирование функций дискретного аргумента относится к числу классических задач исчисления конечных разностей, например, сумму степеней последовательных натуральных чисел вычислил еще Я. Бернулли (1713). Эйлер (1733) и независимо от него Маклорен (1738) нашли формулу, названную в их честь, в которой искомая сумма выражается через производные и интеграл от заданной функции. Ее строгое доказательство дал Якоби (1834). Различные варианты доказательства формулы Эйлера-Маклорена можно найти в книге Харди [1]. Среди относительно недавних работ, посвящённых формуле Эйлера-Маклорена, можно отметить работу [2], а в работе [3] преобразование Бореля степенных рядов использовалось для суммирования функций специального вида.

Leinartas, E.K., Petrochenko, M.E., Multidimensional analogues of the Euler-Maclaurin summation formula and the Borel transform of power series.

Исследование выполнено за счёт гранта Российского научного фонда (проект № 20-11-20117).

Поступила 7 декабря 2020 г., опубликована 24 января 2022 г.

Задача суммирования функций нескольких дискретных аргументов рассматривалась в работах [4, 5, 6, 7, 8, 9]. В работах [6, 7, 8, 9] получены аналоги формулы Эйлера-Маклорена в случае суммирования многочленов по целым точкам рационального многогранника, а в [4, 5] получены аналоги для случая рационального параллелотопа, но суммируются целые функции экспоненциального типа. Отметим также работу [10], в которой указывается на связь классической задачи суммирования с функциями векторного разбиения.

В данной работе предлагается подход к проблеме суммирования, основанный на использовании преобразования Бореля кратных степенных рядов и интегральных представлений для верхней и нижней функции преобразования. Этот подход позволяет не только получить интегральное представление для дискретной первообразной (теорема 2.1), но и новый вариант формулы Эйлера-Маклорена (теорема 2.2, формула (2.17)).

Методы, использованные при доказательстве теорем, позволяют кроме решения задачи суммирования получить новые тождества с числами и многочленами Бернулли, в частности многомерный вариант (теорема 2.3) теоремы 1 из работы [11]. Эта теорема использовалась в [11] для доказательства серии тождеств с числами и многочленами Бернулли, включая и тождество Карлица. В качестве примера применения этих формул получен аналог тождеств Гульда (см. [17]) для многочленов Бернулли.

2. Обозначения, определения, формулировка основных результатов

Обозначим $\mathbb{R}$ — множество вещественных чисел, $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n}$, $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z}\times\ldots\times\mathbb{Z}}_{n}$, $\mathbb{Z}_{\geqslant}$ — множество неотрицательных целых чисел. Для $x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}$ обозначим рациональный параллелипипед

$$\Pi(x) = \{t \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant t_j \leqslant x_j,\ j = 1,\ldots,n\}$$

и для функции $\varphi(t)$ переменных $t = (t_1,\ldots,t_n)$ рассмотрим задачу о нахождении суммы

$$S(x) = \sum_{t\in\Pi(x)\cap\mathbb{Z}^n} \varphi(t), \tag{2.1}$$

т.е. *требуется найти явную формулу, в которой сумма* (2.1) *выражается через конечное, не зависящее от x число значений некоторой функции.*

Для $n = 1$ эту задачу удаётся решить, если известна дискретная первообразная функции $\varphi(t)$ (см. [12]), то есть решение $f(t)$ разностного уравнения

$$f(t+1) - f(t) = \varphi(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots,$$

а именно тогда сумма (2.1) равна $S(x) = f(x+1) - f(0)$.

Для того, чтобы определить понятие дискретной первообразной для $n > 1$ нам потребуются следующие определения и обозначения. Обозначим δ_j оператор сдвига функции $f(x)$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$ по j-ой переменной

$$\delta_j f(x) := f(x+e_j), \quad e_j = (0,0,\ldots,\underset{j}{1},\ldots,0).$$

Рассмотрим полиномиальный разностный оператор вида $P(\delta) = \prod\limits_{j=1}^{n}(\delta_j - 1)$ *и назовём разностной первообразной для функции $\varphi(x)$ всякое решение $f(x)$*

разностного уравнения

$$P(\delta)f(x) = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}. \tag{2.2}$$

Применив оператор $P(\delta)$ к функции $e^{\langle x,\xi\rangle} = e^{x_1\xi_1+\ldots+x_n\xi_n}$, получим

$$P(\delta)e^{\langle x,\xi\rangle} = e^{\langle x,\xi\rangle}(e^{\xi} - I), \tag{2.3}$$

где $(e^{\xi} - I) = \prod\limits_{j=1}^{n}(e^{\xi_j} - 1),\ I = (1,\ldots,1)$. То есть функция $e^{\langle x,\xi\rangle}$ — дискретная первообразная для функции $e^{\langle x,\xi\rangle}(e^{\xi} - I)$.

Обозначим π_j проектирование вдоль оси x_j, действующее на точки $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\pi_j x := (x_1,\ldots,x_{j-1},0,x_{j+1},\ldots,x_n)\,,$$

и определим оператор вида

$$w_{NL}(\delta,\pi) := \prod_{j=1}^{n}(\delta_j - \pi_j), \tag{2.4}$$

который *назовём оператором Ньютона-Лейбница*. Применив его к функции $e^{\langle x,\xi\rangle}$, получим:

$$w_{NL}(\delta,\pi)e^{\langle x,\xi\rangle} = \prod_{j=1}^{n}(e^{(x_j+1)\xi_j} - 1) = e^{\langle x+I,\xi\rangle} - I. \tag{2.5}$$

Если раскрыть скобки в правой части (2.4) и воспользоваться перестановочностью операторов сдвига δ_j и проектирования π_j, то оператор Ньютона-Лейбница можно записать в виде

$$w_{NL}(\delta,\pi) = \sum_{\alpha+\beta=I}(-1)^{|\beta|}\pi^{\alpha}\delta^{\beta}, \tag{2.6}$$

где $\alpha,\ \beta$ — мультииндексы, $|\beta| = \beta_1 + \ldots + \beta_n$.

Отметим, что в случае параллелепипеда $\Pi(x)$ с переменной вершиной x точки вида $\pi^{\alpha}\delta^{\beta}x$, где $\alpha+\beta = I$, представляют собой 2^n вершин параллелепипеда $\Pi(x+I)$.

Важную роль для формулы Эйлера-Маклорена играют числа и многочлены Бернулли. Определим многочлены Бернулли $B_\nu(x)$ как коэффициенты разложения в ряд функции:

$$\frac{\xi e^{\langle x,\xi\rangle}}{e^{\xi} - I} = \prod_{j=1}^{n}\frac{\xi_j e^{x_j\xi_j}}{e^{\xi_j} - 1} = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}}^{\infty}\frac{B_\nu(x)\xi^{\nu}}{\nu!}, \tag{2.7}$$

где $\nu = (\nu_1,\ldots,\nu_n),\ B_\nu(x) = B_{\nu_1}(x_1)\cdots B_{\nu_n}(x_n),\ B_{\nu_j}(x_j)$ — многочлены Бернулли переменной x_j.

Поскольку точки $\xi_j = 2\pi i$ (где i — мнимая единица) ближайшие к началу координат особые точки функций $\frac{\xi_j e^{x_j\xi_j}}{e^{\xi_j}-1}$, то ряд в правой части (2.7) сходится в полицилиндре $U_{2\pi} = \{\xi \in \mathbb{C}^n\ :\ |\xi_j| < 2\pi,\ j = 1,\ldots,n\}$. Числами же Бернулли B_ν называются значения многочленов Бернулли в точке $x = 0$.

Приведём определение преобразования Бореля степенных рядов и некоторые его свойства, которые потребуются в работе. Преобразованием Бореля степенного ряда

$$\varphi(z) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{a_\nu}{\nu!} z^\nu \tag{2.8}$$

называется ряд вида

$$\mathfrak{B}[\varphi(z)] = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{a_\nu}{z^{\nu+I}}. \tag{2.9}$$

Функции $\varphi(z)$ и $\mathfrak{B}[\varphi(z)]$ называются ассоциированными по Борелю, $\varphi(z)$ — верхняя функция, $\mathfrak{B}[\varphi(z)]$ — нижняя функция преобразования.

Пусть $\mathbb{R}_>$ — множество положительных вещественных чисел, $\mathbb{R}^n_> = \mathbb{R}_> \times \ldots \times \mathbb{R}_>$ — положительный октант в $\mathbb{R}^n$. Между точками $x, y \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $>$ следующим образом:

$$x > y \Longleftrightarrow x_j > y_j, \ j = 1, \ldots, n. \tag{2.10}$$

Обозначим

$$x \not> y \Longleftrightarrow \exists\, j: \ x_j < y_j. \tag{2.11}$$

Для фиксированного $y \in \mathbb{R}^n$ множество точек x, удовлетворяющих условию (2.10), представляет собой сдвиг $y + \mathbb{R}^n_>$ положительного октанта $\mathbb{R}^n_>$. Множество, которое вместе с каждой точкой y содержит и все точки $y + \mathbb{R}^n_>$, называется (см. [13]) октантообразным.

Обозначим $Exp(\mathbb{C}^n)$ — пространство целых функций $\varphi(z) : \mathbb{C}^n_z \to \mathbb{C}$ экспоненциального типа, т.е. целых функций, удовлетворяющих неравенству $|\varphi(z)| \leqslant Ce^{\langle \sigma, |z| \rangle}$, где $|z| = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$, $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n_>$, C — некоторая константа, $C > 0$.

Для фиксированной функции $\varphi(z) \in Exp(\mathbb{C}^n)$ рассмотрим множество (см. [15]), определяющее характеристики роста этой функции

$$\sigma_\varphi = \{\sigma \in \mathbb{R}^n_> : |\varphi(z)| \leqslant Ce^{\langle \sigma, |z| \rangle}, \ z \in \mathbb{C}^n, \ \text{для некоторой константы } C > 0\}.$$

Отметим, что это множество октантообразно.

Образ области сходимости ряда (2.9) при проектировании

$$z = (z_1, \ldots, z_n) \to |z| = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$$

обозначим $D_{\mathfrak{B}[\varphi]}$. В силу леммы Абеля [14] это множество также октантообразно и, более того, $\sigma_\varphi = D_{\mathfrak{B}[\varphi]}$ (см. [13], теорема 3.3.3).

Для доказательства основных результатов нам потребуется многомерное обобщение формулы обращения для преобразования Бореля. А именно, если $\varphi(z) \in Exp(\mathbb{C}^n)$ и $\sigma \in \sigma_\varphi$, то функция $\mathfrak{B}[\varphi(z)]$ голоморфна при $|z_j| > \sigma_j$, $j = 1, \ldots n$, и формула обращения имеет вид

$$\varphi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_\Gamma \mathfrak{B}[\varphi(\xi)] e^{\langle z, \xi \rangle} d\xi, \tag{2.12}$$

где $\Gamma = \{\xi : |\xi_j| = \sigma_j, \ j = 1, \dots n\}$, $d\xi = d\xi_1 \wedge \dots \wedge d\xi_n$. Простым следствием формулы (2.12) является формула для производной верхней функции преобразования Бореля:

$$\frac{\partial^\mu}{\partial z^\mu}\varphi(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma \mathfrak{B}[\varphi(\xi)]\xi^\mu e^{\langle z,\xi\rangle}d\xi. \tag{2.13}$$

Приведём интегральное представление для дискретной первообразной $f(x)$ функции $\varphi(x)$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi(z) \in Exp(\mathbb{C}^n)$, $\sigma \in \sigma_\varphi$ *и* $\Gamma = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi_j| = r_j,$ $r_j = \sigma_j, \ r_j \neq 2\pi m, \ j = 1, \dots, n, \ m \in \mathbb{Z}_\geqslant\}$, *тогда функция, заданная формулой*

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma \frac{\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]e^{\langle x,\xi\rangle}}{e^\xi - I}d\xi \tag{2.14}$$

определена для всех значений переменной $x = (x_1, \dots, x_n)$ *и является дискретной первообразной для* $\varphi(x)$, *а для суммы (2.1) справедлива формула:*

$$S(x) = w_{NL}(\delta, \pi)f(x). \tag{2.15}$$

В качестве примера рассмотрим случай с $\varphi(x) = x^\nu$. Нижняя функция преобразования Бореля тогда выглядит следующим образом

$$\mathfrak{B}[x^\nu] = \frac{\nu!}{x^{\nu+I}}.$$

Из формул 2.14 и 2.7 получим после почленного интегрирования

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_\Gamma \frac{\nu! e^{\langle x,\xi\rangle}}{(e^\xi - I)\xi^{\nu+I}}d\xi = \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant 0}}^{\infty}\frac{B_\nu(x)}{\nu!}\int\limits_\Gamma \xi^\nu\frac{d\xi}{\xi^{\nu+2I}}. \tag{2.16}$$

Таким образом получаем, что дискретная первообразная для функции x^ν равна $\frac{1}{\nu+I}B_{\nu+I}(x)$.

Интегральное представление (2.14) и дискретный аналог формулы Ньютона-Лейбница (2.15) позволяют получить два варианта формулы Эйлера-Маклорена. Для вывода этих формул понадобится сходимость ряда в правой части равенства (2.7), определяющего многочлены Бернулли, что ведёт к дополнительному условию, по сравнению с теоремой 2.1, на функцию $\varphi(z)$.

Теорема 2.2. *Пусть для* $\varphi(z)$ *выполнены условия теоремы (2.1) и, кроме того,* $2\pi I \in \sigma_\varphi$, *тогда справедливы следующие варианты формулы Эйлера-Маклорена для суммы (2.1):*

$$S(x) = \sum_{\nu\in I+\mathbb{Z}^n_\geqslant}\frac{\partial^{\nu-I}\varphi(0)}{\partial t^{\nu-I}}\frac{1}{\nu!}w_{NL}(\delta,\pi)B_\nu(x), \tag{2.17}$$

$$S(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_\geqslant}\frac{B_\nu}{\nu!}w_{NL}(\delta,\pi)\frac{\partial^{\nu-I}\varphi(x)}{\partial t^{\nu-I}}. \tag{2.18}$$

Здесь частная производная минус первой степени - это интеграл от 0 до x_j

$$\frac{\partial^{-1}\varphi(x)}{\partial x_j} = \int\limits_0^{x_j}\varphi(\pi_j x + te_j)dt.$$

Отметим, что вариант (2.17) формулы Эйлера-Маклорена является новым даже для случая $n=1$.

Важную часть перечислительного комбинаторного анализа составляют тождества с различными комбинаторными числами, в частности, с числами и многочленами Бернулли (см., например, [16]). Отметим, что из формул (2.17) и (2.18) сразу следует тождество, связывающее функцию $\varphi(x)$ и её производные с числами и многочленами Бернулли.

Рассмотрим случай, когда $\varphi(x)$ — многочлен и докажем, что из тождества для многочленов следует соответствующее тождество для многочленов Бернулли.

Теорема 2.3. *Если верно следующее тождество*

$$\sum_{k\in K} a_k (x+\alpha)^k = \sum_{k\in K} b_k (x+\beta)^k, \ \ x\in\mathbb{R}^n, \tag{2.19}$$

где $K\subset\mathbb{Z}^n_{\geqslant}$ — конечное множество, то будет верно соответствующее тождество для многочленов Бернулли

$$\sum_{k\in K} a_k B_k(x+\alpha) = \sum_{k\in K} b_k B_k(x+\beta), \ \ x\in\mathbb{R}^n. \tag{2.20}$$

Для $n=1$ эта теорема была доказана в [11] и в качестве следствий из неё получена серия тождеств с числами и многочленами Бернулли, включая и тождество Карлица.

Из теоремы 2.3 в качестве следствия тождеств для многочленов можно получить аналоги этих тождеств для многочленов Бернулли.

Следствие 2.1. *Справедливо следующее тождество*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left(\begin{array}{c} m \\ k \end{array}\right) (k+1)^{k-1} B_{m-k}(x+k) = B_m(x-1). \tag{2.21}$$

3. Доказательства

Приведём доказательства основных результатов работы, в которых важную роль играет формула обращения (2.12).

Доказательство теоремы 2.1. Подействуем разностным оператором $P(\delta)$ на обе части (2.14) и с учётом формулы (2.3) получим

$$\begin{aligned} P(\delta)f(x) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]P(\delta)e^{\langle x,\xi\rangle}}{e^{\xi}-I}d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]e^{\langle x,\xi\rangle}(e^{\xi}-I)}{e^{\xi}-I}d\xi = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma} \mathfrak{B}[\varphi(\xi)]e^{\langle x,\xi\rangle}d\xi. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Применив формулу обращения (2.12), мы найдём, что $P(\delta)f(x)=\varphi(x)$.

Докажем вторую часть теоремы. Действительно, из (2.14) найдём, что

$$w_{NL}(\delta,\pi)f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma} \frac{\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]w_{NL}(\delta,\pi)e^{\langle x,\xi\rangle}}{e^{\xi}-I}d\xi.$$

С учётом формулы (2.5) и формулы кратной геометрической прогрессии преобразуем подынтегральное выражение

$$w_{NL}(\delta,\pi)e^{\langle x,\xi\rangle} = e^{\langle x+I,\xi\rangle} - I = (e^{\xi} - I)\sum_{0\leqslant\nu\leqslant x} e^{\langle \nu,\xi\rangle}, \tag{3.2}$$

тогда по формуле обращения (2.12)

$$w_{NL}(\delta,\pi)f(x) = \frac{1}{(2\pi n)^n}\sum_{t\in\Pi(x)\cap\mathbb{Z}^n}\int\limits_{\Gamma}\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]e^{\langle t,\xi\rangle}d\xi = \sum_{t\in\Pi(x)\cap\mathbb{Z}^n}\varphi(t) = S(x).$$

Доказательство теоремы 2.2. Основная идея доказательства теоремы 2.2 состоит в том, что рассматриваются два варианта разложения подынтегральной функции в (2.14) в ряды и их последующее почленное интегрирование. Условие $2\pi I \in \sigma_\varphi$ и октантообразность множества σ_φ позволяют выбрать $\Gamma = \{\xi : |\xi_j| = r_j,\ r_j < 2\pi,\ j = 1,2,\dots,n\}$ таким образом, что на Γ сходится не только ряд для нижней функции преобразования Бореля $\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]$, но и ряд из правой части (2.9), определяющий многочлены и числа Бернулли.

Воспользуемся формулой (2.14), определением (2.7) многочленов Бернулли, формулой (2.9) и после стандартных преобразований получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}}\frac{B_\nu(x)}{\nu!}\xi^\nu\right)\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi} = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}}\frac{B_\nu(x)}{\nu!}\int\limits_{\Gamma}\xi^\nu\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}}\frac{B_\nu(x)}{\nu!}\int\limits_{\Gamma}\sum_{k\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}}\frac{a_k}{\xi^{k-\nu+I}}\frac{d\xi}{\xi} = \\ &= \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}+I}\frac{B_\nu(x)}{\nu!}a_{\nu-I}. \end{aligned}$$

Таким образом для дискретной первообразной справедлива формула

$$f(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}}\frac{B_\nu(x)}{\nu!}\frac{\partial^{\nu-I}\varphi(0)}{\partial t^{\nu-I}},$$

из которой, после применения дискретного оператора Ньютона-Лейбница, получается (2.17).

Для вывода второго варианта формулы Эйлера-Маклорена воспользуемся формулой (2.14) из теоремы 2.1, определением чисел Бернулли и возможностью почленного интегрирования рядов:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\Gamma}\left(\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}}\frac{B_\nu}{\nu!}\xi^\nu\right)e^{\langle x,\xi\rangle}\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi} = \\ &= \frac{1}{(2\pi i)^n}\sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}}\frac{B_\nu}{\nu!}\int\limits_{\Gamma}\xi^\nu e^{\langle x,\xi\rangle}\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]\,\frac{d\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

Используя (2.13) для производной верхней функции преобразования Бореля и формулу обращения (2.12) получим

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{B_\nu}{\nu!} \frac{\partial^{\nu-I}}{\partial t^{\nu-I}} \int\limits_\Gamma e^{\langle x,\xi\rangle}\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]\, d\xi = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{B_\nu}{\nu!} \frac{\partial^{\nu-I}\varphi(x)}{\partial t^{\nu-I}}.$$

Таким образом для дискретной первообразной $f(x)$ справедлива формула

$$f(x) = \sum_{\nu\in\mathbb{Z}^n_{\geqslant}} \frac{B_\nu}{\nu!} \frac{\partial^{\nu-I}\varphi(x)}{\partial t^{\nu-I}},$$

из которой после применения дискретного аналога оператора Ньютона-Лейбница следует (2.18).

Доказательство теоремы 2.3. Обозначим частную производную по всем переменным

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial}{\partial x_n}.$$

Воспользуемся формулой (2.14) из теоремы 2.1, после дифференцирования которой получим

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_\Gamma \frac{\xi\mathfrak{B}[\varphi(\xi)]e^{\langle x,\xi\rangle}}{e^\xi - I} d\xi.$$

Если $\varphi(\xi)$ — многочлен и $\varphi(\xi) = \sum\limits_k a_k(\xi+\alpha)^k$, то с учётом формулы бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} f(x) &= \sum_k a_k \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_\Gamma \frac{\xi\mathfrak{B}[(\xi+\alpha)^k]e^{\langle x,\xi\rangle}}{e^\xi - I} d\xi = \\ &= \sum_k a_k \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_\Gamma \frac{\xi e^{\langle x,\xi\rangle}}{e^\xi - I} \mathfrak{B}[\sum_{\mu=0}^{k} \frac{k!\alpha^{k-\mu}}{\mu!(k-\mu)!}\xi^\mu] d\xi = \\ &= \sum_k a_k \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_\Gamma \left(\sum_{s=0}^{\infty} \frac{B_s(x)}{s!}\xi^s\right) \left(\sum_{\mu=0}^{k} \frac{k!\alpha^{k-\mu}}{\xi^{\mu+I}(k-\mu)!}\xi^\mu\right) d\xi. \end{aligned} \tag{3.3}$$

На последнем шаге мы воспользовались формулой (2.7), которая даёт определение многочленов Бернулли $B_s(x)$. Далее, после умножения рядов, стоящих под знаком интеграла, и почленного интегрирования полученного ряда найдём

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \sum_k a_k \sum_{\mu=0}^{k} \frac{B_\mu(x)}{\mu!} \frac{k!}{(k-\mu)!} \alpha^{k-\mu},$$

а с учётом формулы сложения для многочленов Бернулли

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \sum_k a_k B_k(x+\alpha).$$

Аналогичным образом доказывается, что в случае $\varphi(\xi) = \sum\limits_k b_k(\xi+\beta)^k$ для правой части справедлива формула

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x) = \sum_k b_k B_k(x+\beta),$$

что и доказывает теорему 2.3.

Доказательство следствия 2.1. Воспользуемся тождеством (1.117) из монографии [17]

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (x+k)^{m-k}(k+1)^{k-1} = (x-1)^m \tag{3.4}$$

и преобразуем левую часть этого тождества, используя формулу бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (k+1)^{k-1} \sum_{\nu=0}^{m-k} \binom{m-k}{\nu} x^\nu k^{m-k-\nu} =$$
$$= \sum_{\nu=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{m-\nu} (-1)^k \binom{m}{k} (k+1)^{k-1} \binom{m-k}{\nu} k^{m-k-\nu} \right) x^\nu.$$

Обозначим $\alpha_\nu = \sum_{k=0}^{m-\nu} (-1)^k \binom{m}{k}(k+1)^{k-1}\binom{m-k}{\nu} k^{m-k-\nu}$, тогда тождество (3.4) примет вид

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu x^\nu = (x-1)^m$$

и, по теореме 2.3, получим

$$\sum_{\nu=0}^{m} \alpha_\nu B_\nu(x) = B_m(x-1).$$

Левую часть последнего тождества преобразуем, используя формулу для α_ν.

$$\sum_{\nu=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{m-\nu} (-1)^k \binom{m}{k} (k+1)^{k-1} \binom{m-k}{\nu} k^{m-k-\nu} \right) B_\nu(x) =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (k+1)^{k-1} \sum_{\nu=0}^{m-k} \binom{m-k}{\nu} B_\nu(x) k^{m-k-\nu} =$$
$$= \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} B_{m-k}(x+k)(k+1)^{k-1}.$$

Последнее равенство следует из формулы сложения для многочленов Бернулли. Таким образом

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} (k+1)^{k-1} B_{m-k}(x+k) = B_n(x-1).$$

References

1. G. Hardy, *Divergent series*, Oxford University Press, Oxford, 1949. Zbl 0032.05801
2. A.V. Ustinov, *A discrete analogue of Euler's summation formula,* Math. Notes, **71**:6 (2002), 851–856. Zbl 1025.65003
3. A.D. Mednykh, *On a class of difference equations with polynomial coefficients*, Sib. Mat. Zh., **19**:6 (1978), 1315–1331. Zbl 0409.39002
4. O.A. Shishkina, *The Euler-Maclaurin formula for rational parallelotope,* Izv. Irkutsk. Gos. Univ., Ser. Mat., **13** (2015), 56–71. Zbl 1348.65009
5. E.K. Leinartas, O.A. Shishkina, *The discrete analog of the Newton–Leibniz formula in the problem of summation over simplex lattice points*, J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys., **12**:4 (2019), 503–508. Zbl 7325528
6. M. Brion, M. Vergne, *Lattice points in simple polytopes,* J. Am. Math. Soc., **10**:2 (1997), 371–392. Zbl 0871.52009
7. M. Brion, M. Vergne, *Residue formulae, vector partition functions and lattice points in rational polytopes,* J. Am. Math. Soc., **10**:4 (1997), 797–833. Zbl 0926.52016
8. O.A. Shishkina, *The Euler-Maclaurin formula and differential operator of infinite order,* J. Sib. Fed. Univ., Math. Phys., **8**:1 (2015), 86–93. Zbl 7325207
9. A.V. Pukhlikov, A.G. Khovanskii, *The Riemann-Roch theorem for integrals and sums of quasipolynomials over virtual polytopes,* St. Petersbg. Math. J., **4**:4 (1993), 789–812. Zbl 0798.52010
10. A.P. Lyapin, S. Chandragiri, *Generating functions for vector partitions and a basic recurrence relation,* J. Difference Equ. Appl., **25**:7 (2019), 1052–1061. Zbl 1423.05017
11. Pita Claudio, *Carlitz-type and other Bernoulli identities,* J. Integer Seq., **19**:1 (2016), Article 16.1.8. Zbl 1364.11058
12. A.O. Gel'fond, *Ischisleniye konechnykh raznostey,* Fizmatlit, Moscow, 2006. (Zbl 0096.28201 – 1959)
13. L.I. Ronkin, *Introduction to the theory of entire functions of several variables,* Nauka, Moscow, 1971. Zbl 0225.32001
14. B.V. Shabat, *Introduction to complex analysis,* Nauka, Moscow, 1969. Zbl 0188.37902
15. V.K. Ivanov, *A characterization of the growth of an entire function of two variables and its application to the summation of double power series,* Transl., Ser. 2, Am. Math. Soc., **19** (1962), 179–192. Zbl 0123.27003
16. J. Riordan, *Combinatorial identities,* Nauka, Moscow, 1982. Zbl 0517.05006
17. H.W. Gould, *Tables of Combinatorial Identities,* Jocelyn Quaintance, 2010. (Zbl 0241.05011 – 1972)

Evgeniy Konstantinovich Leinartas
Siberian Federal University,
79, Svobodny ave.,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
Email address: `lein@mail.ru`

Maksim Evgenyevich Petrochenko
Siberian Federal University,
79, Svobodny ave.,
Krasnoyarsk, 660041, Russia
Email address: `petrochenkomax@rambler.ru`