S©MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports
http://semr.math.nsc.ru

Том 19, №1, стр. 1–17 (2022) УДК 519.724
DOI 10.33048/semi.2022.19.001 MSC 60K25, 90B15

СТАБИЛЬНОСТЬ И НЕСТАБИЛЬНОСТЬ СИСТЕМ СЛУЧАЙНОГО МНОЖЕСТВЕННОГО ДОСТУПА С МЕХАНИЗМОМ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ ПОДПИТКИ

А.В. РЕЗЛЕР, М.Г. ЧЕБУНИН

Abstract. We introduce a generalisation of the model of the classical synchronised multiple access system with a single transmission channel controlled by a randomised transmission protocol (ALOHA) and additionally equipped with an energy harvesting mechanism. The generalisation is the assumption that messages may receive an unlimited amount of energy.

Keywords: Markov chains, ALOHA algorithm, generalised Foster criterion, ergodicity, transience.

1. Введение

Системы множественного доступа с механизмом «энергетической подпитки» (energy harvesting) представляют большой интерес благодаря множеству приложений (см. [1]). Например, сенсорные сети, снабженные перезаряжающимися батареями, которые «подпитываются энергией» из окружающей среды, могут существенно увеличить срок ее годности. Другой пример использования данного механизма был предложен в работе Xun Zhou, Rui Zhang и Chin Keong Ho (см. [2]), где авторы рассмотрели многопользовательскую систему с базовой станцией, использующей технологию «OFDM» (orthogonal frequency division

Rezler, A., Chebunin, M., Stability and instability of a random multiple access system with an energy harvesting mechanism.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1675.

Поступила 1 ноября 2021 г., опубликована 11 января 2022 г.

multiplexing) и беспроводной канал для передачи информации и энергии пользователям. Использование механизма энергетической подпитки в системах случайного множественного доступа ставит новые задачи и, в частности, о нахождении пропускных способностей систем. Так, в работе J. Jeon и A. Ephremides (см. [3]) рассматривался случай системы с ограниченным количеством пользователей, децентрализованным механизмом энергетической подпитки и протоколом передачи данных типа ALOHA. В работе было предложено выражение для пропускной способности данной системы, а также был продемонстрирован эффект ее уменьшения, при ограничении вместимости у механизма для хранения энергии, которым снабжен каждый пользователь системы. Изучению энергоэффективности протоколов разрешения конфликтов посвящена работа A. Bergman и M. Sidi (см. [4]). Как известно, традиционные системы множественного доступа (см. например [5], [6]) с бесконечным числом пользователей в известном смысле нестабильны ни при каких значениях управляемых параметров (см. [7]) и метастабильны при малых значениях входного потока и вероятности передачи сообщений (см. [8]). Однако, как было показано в работах С.Г. Фосса, Д.К. Кима и А.М. Тюрликова [9] и [1], ограничения на поступление энергии и входной поток в систему с бесконечным числом пользователей может стабилизировать ее, то есть количество сообщений в накопителе системы не будет неограниченно расти. В работе [9] были найдены области стабильности и нестабильности модели для классической синхронизированной системы случайного множественного доступа с одним передающим прибором, управляемой протоколом передачи типа ALOHA, снабженной централизированным механизмом энергетической подпитки. Однако, как отмечают авторы, рассмотренная модель далека от практики. Тем не менее, рассмотренная в работе [1] модель (далее будем называть ее *основной*) для децентрализованного механизма энергетической подпитки, в которой каждый пользователь системы снабжен индивидуальным механизмом для хранения энергии, имеет практические аналоги. В упомянутой работе, при определении конкретного вида функции вероятности подзарядки сообщений на каждом шаге, обратно пропорциональной общему количеству сообщений, присутствующих в системе, была найдена пропускная способность *основной* модели.

В данной работе изучается обобщение *основной* модели. Главное отличие от нее состоит в том, что теперь сообщения могут принимать более одной единицы энергии. Одной из причин для изучения обобщенной модели является эффект, продемонстрированный в работе [3], возникающий при увелечении емкости накопителя энергии у пользователей и, как следствие, приводящий к расширению областей стабильности системы. Так, появляется возможность улучшения в некотором смысле характеристик системы и в случае бесконечного числа пользователей. Главная цель данной работы — построить естественные обобщения *основной* модели и определить их пропускную способность.

Работа состоит из 3 параграфов и приложения. Во втором параграфе описываются математические модели и формулируется основная теорема, в третьем параграфе проводится ее доказательство. В приложении приводятся формулировки утверждений, используемых при доказательстве основной теоремы.

2. Описание моделей и основные результаты

Мы рассматриваем систему с одним передающим прибором, которая принимает и, при успешной передаче, отправляет сообщения. Время слотировано. Пусть ξ_n — случайная величина, определяющая количество сообщений, поступивших в накопитель системы в течении интервала времени $[n-1, n)$. Далее предполагаем, что $\{\xi_n\}_{n\geq 0}$ образует последовательность независимых одинаково распределенных (н.о.р.) неотрицательных целочисленных случайных величин с конечным математическим ожиданием $\lambda \in (0,1)$. Каждое сообщение снабжено батареей с неограниченным количеством ячеек для хранения энергии и прибывает в накопитель системы с пустой батареей, ожидая энергетической подпитки. Механизм энергетической подпитки в каждый временной слот можно описать следующим образом: каждое сообщение, имеющее в начале временного слота батарею, заряженную на i ячеек, где $i \geq 1$, будет передано на передающий прибор с вероятностью $1 - p^i$ или останется в системе с вероятностью p^i, где $p \in (0,1)$ фиксировано ($p = 0$ мы не рассматриваем, так как система, в данном случае, функционирует в соответствии со стандартным центрированным протоколом ALOHA), а также, после передачи, каждое сообщение, независимо от остальных параметров системы, получит одну единицу энергии с вероятностью $\mu > 0$. Затем, если в заданный временной интервал на передающий прибор поступило только одно сообщение, то оно покидает систему. Если на передающий прибор поступило два или более сообщений, то происходит наложение (конфликт) и передававшиеся сообщения возвращаются в систему, но теряют весь заряд своих батарей (другими словами, накопившаяся энергия используется только один раз при передаче на передающий прибор).

Теперь предположим, что к началу, скажем, $(n+1)$-го временного слота, ξ_n — новые сообщения, которые только прибыли в накопитель системы, а q_n — сообщения, которые уже находились в накопителе системы к началу данного временного слота. Пусть $v_n^{(i)}$ — количество сообщений, имеющих i единиц энергии, где $i \geq 1$, к началу данного временного слота. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{\infty} v_n^{(i)} \leq q_n$ п.н. Обозначим через $\{U_{n,i}^{(j)},\ -\infty < n < \infty,\ i \geq 1,\ j \geq 1\}$ и $\{\widetilde{U}_{n,i}^{(j)},\ -\infty < n < \infty,\ i \geq 1,\ j \geq 1\}$ независимые семейства н.о.р. случайных величин, имеющих равномерное распределение на отрезке $[0,1]$. Пусть $I(A)$ — индикаторная функция события A: она принимает значение, равное 1, если событие происходит, и 0 иначе. Введем также некоторую измеримую неотрицательную функцию $\mu : \mathbb{Z}_+ \to [0,1]$, которая будет подчеркивать свойство адаптивности модели. То есть в зависимости от количества сообщений, скажем, в n-ый момент времени q_n, значение $\mu(q_n)$ будет равно вероятности подзарядки каждого сообщения в n-ый момент времени. Теперь пусть $B_n^{(j)}(k, 1-p^j) = \sum_{i=1}^{k} I(U_{n,i}^{(j)} < 1 - p^j)$, где $-\infty < n < \infty$, $k \geq 0$, $j \geq 1$, и $\widetilde{B}_n^{(j)}(k,\mu) = \sum_{i=1}^{k} I(\widetilde{U}_{n,i}^{(j)} < \mu)$, где $-\infty < n < \infty$, $k \geq 0$, $j \geq 1$, два взаимно независимых семейства случайных величин, имеющих биномиальное распределение и независимых от остальных параметров системы. Обозначим также через $D_n^{(j)}(k, p^j) = k - B_n^{(j)}(k, 1-p^j)$. Очевидно, что случайная величина $D_n^{(j)}(k, p^j)$ имеет биномиальное распределение с параметрами p^j, k. Пусть

$I_p(n) = I(\sum_{i=1}^{\infty} B_n^{(i)}(v_n^{(i)}, 1-p^i) = 1)$, то есть $I_p(n)$ — индикатор события, состоящего в том, что в n-ый момент времени произошла успешная отправка сообщения. Таким образом мы получим следующую рекурсию.

$$(\mathrm{M1}) \qquad \begin{cases} q_{n+1} = q_n - I_p(n) + \xi_n, \\ \\ v_{n+1}^{(1)} = v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p) + \widetilde{B}_n^{(1)}(q_n - \sum_{i=1}^{\infty} v_n^{(i)} + \xi_n, \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}_n^{(2)}(v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p), \mu(q_n)) \\ \\ v_{n+1}^{(2)} = v_n^{(2)} - B_n^{(2)}(v_n^{(2)}, 1-p^2) + \widetilde{B}_n^{(2)}(v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p), \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}_n^{(3)}(v_n^{(2)} - B_n^{(2)}(v_n^{(2)}, 1-p^2), \mu(q_n)) \\ \ldots \end{cases}$$

Мы также рассмотрим вторую модель, которая отличается от предыдущей только своим поведением при возникновении наложения (конфликта) сообщений, а именно сообщения будут терять только одну единицу энергии при возникновении наложения (в прошлой модели они теряли весь заряд своих батарей). Таким образом, математически, динамика модели может быть описана следующей формулой:

$$(\mathrm{M2}) \qquad \begin{cases} q_{n+1} = q_n - I_p(n) + \xi_n, \\ \\ v_{n+1}^{(1)} = v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p) + \widetilde{B}_n^{(1)}(q_n - \sum_{i=1}^{\infty} v_n^{(i)} + \xi_n, \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}_n^{(2)}(v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p), \mu(q_n)) + B_n^{(2)}(v_n^{(2)}, 1-p^2) \cdot (1 - I_p(n)) \\ \\ v_{n+1}^{(2)} = v_n^{(2)} - B_n^{(2)}(v_n^{(2)}, 1-p^2) + \widetilde{B}_n^{(2)}(v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p), \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}_n^{(3)}(v_n^{(2)} - B_n^{(2)}(v_n^{(2)}, 1-p^2), \mu(q_n)) + B_n^{(3)}(v_n^{(3)}, 1-p^3) \cdot (1 - I_p(n)) \\ \ldots \end{cases}$$

Можно заметить, что обе модели, при $v_n^{(i)} \equiv 0$ для всех $i \geq 2$, $n \geq 0$, совпадают с *основной* моделью (M0), рассмотренной в работе С.Г. Фосса, А.М. Тюрликова и Д.К. Кима (см. [1]).

$$(\mathrm{M0}) \qquad \begin{cases} q_{n+1} = q_n - I(B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p) = 1) + \xi_n, \\ v_{n+1}^{(1)} = v_n^{(1)} - B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1-p) + \widetilde{B}_n^{(1)}(q_n - v_n^{(1)} + \xi_n, \mu(q_n)) \end{cases}$$

Заметим, что стохастические последовательности $(q_n, v_n^{(1)})$, соответствующие модели (M0) и $(q_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}\ldots)$, соответствующие моделям (M1), (M2) образуют марковские цепи . При том $(q_n, v_n^{(1)})$ — 2-мерная марковская цепь с пространством состояний $\mathbb{Z}_+^2$ при условии $v_n^{(1)} \leq q_n$ для всех $n \geq 0$, а $(q_n, v_n^{(1)}, v_n^{(2)}\ldots)$ — бесконечномерная марковская цепь с пространством состояний $\mathbb{Z}_+^{\infty}$ при условии $\sum_{i=1}^{\infty} v_n^{(i)} \leq q_n$ для всех $n \geq 0$. Ради краткости написания, далее будем отождествлять модели и соответствующие им стохастические последовательности. Будем говорить, что система работает стабильно (для краткости — цепь стабильна), если соответствующая ей цепь Маркова сходится к своему стационарному распределению в метрике полной вариации из любого начального состояния. В упомянутой выше работе [1] было показано, что если для некоторой константы $c > 0$

$$\mu(q) = \begin{cases} \min(c/q, 1), & q \in \mathbb{Z}_+ \backslash \{0\} \\ 1, & q = 0 \end{cases} \tag{1}$$

то цепь Маркова (M0) стабильна при входной интенсивности $\lambda < ce^{-c}$ и нестабильна при $\lambda > ce^{-c}$.

Построенные модели (M1), (M2) предполагают наличие у каждого пользователя механизма для хранения неограниченного числа ячеек энергии. В существующих системах с передачей энергии по радиоканалу (см., например, [2]) энергия, передаваемая базовой станцией, накапливается у каждого абонента в своем индивидуальном источнике и далее используется для передачи информации. Однако, каждый индивидуальный источник имеет только одну ячейку для хранения энергии. Таким образом, модели (M1) и (M2) отражают работу беспроводных систем, снабженных механизмом энергетической подпитки, с тем отличием от существующих, что в моделях дополнительно предполагается наличие механизма для хранения неограниченного количества ячеек энергии у пользователей сети.

Сформулируем основные результаты данной работы. Сначала заметим, что, так как $\mathbb{E}\,\xi_1 = \lambda < 1$, то $\mathbb{P}(\xi_1 = 0) > 0$. То есть цепи Маркова (M1), (M2) за один шаг с положительной вероятностью не изменят состояния. Следовательно, рассматриваемые цепи являются апериодичными. Более того, можно заметить, что на каждом шаге с положительной вероятностью из систем уходят и в них поступают сообщения, а также в системах с положительной вероятностью сообщения «подзаряжаются» на произвольное количество ячеек энергии за некоторое количество шагов. Таким образом, можно утверждать, что все их состояния являются сообщающимися. Следовательно, из эргодической теоремы, для определения пропускной способности систем, достаточно найти компактное положительно возвратное множество у полученных цепей, чему и посвящена большая часть данной работы.

Перейдем к рассмотрению основной теоремы, доказательство которой основано на некоторых утверждениях, сформулированных в Приложении (см. работы [1], [10] и [11]). Также всюду далее мы будем использовать следующие обозначения $x = (x_1, x_2, ...)$, $\mathbb{E}_x(\cdot) = \mathbb{E}(\cdot \mid X_0 = x)$, $\mathbb{P}_x(\cdot) = \mathbb{P}(\cdot \mid X_0 = x)$, $\|x\|_{l_1} = \|x\| = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$.

Теорема. *Если, для некоторой константы $c > 0$, $\mu(q)$ имеет вид (1), тогда стохастические последовательности, представляемые бесконечномерными марковскими цепями (M1) и (M2) стабильны при входной интенсивности $\lambda < ce^{-c}$ и нестабильны при $\lambda > ce^{-c}$.*

Замечание 1. *При построении модели мы взяли вероятность передачи сообщения, заряженного на положительное число ячеек (i), как некоторую функцию $f(i)$, равную $1 - p^i$. Однако, в доказательстве теоремы будет отмечено, что $f(i)$ может быть произвольной положительной ограниченной* 1 *$(0 < f(i) < 1)$ и неубывающей функцией, как минимум для модели (M1).*

Замечание 2. *Также, представляют интерес и другие модели, в которых предполагается наличие батарейки лишь с ограниченным числом ячеек для хранения энергии у каждого пользователя. Наша проверка показывает, что* *условия стабильности таких моделей будут аналогичны условиям, сформулированным в основной теореме. Данный результат можно получить немного изменив доказательство основной теоремы. При этом модель (M2), в случае наличия батарейки с m ячейками, будет выглядеть следующим образом:*

$$\begin{cases} q_{n+1} = q_n - I_p(n) + \xi_n, \\ \\ v^{(1)}_{n+1} = v^{(1)}_n - B^{(1)}_n(v^{(1)}_n, 1-p) + \widetilde{B}^{(1)}_n(q_n - \sum_{i=1}^m v^{(i)}_n + \xi_n, \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}^{(2)}_n(v^{(1)}_n - B^{(1)}_n(v^{(1)}_n, 1-p), \mu(q_n)) + B^{(2)}_n(v^{(2)}_n, 1-p^2) \cdot (1 - I_p(n)) \\ \\ v^{(2)}_{n+1} = v^{(2)}_n - B^{(2)}_n(v^{(2)}_n, 1-p^2) + \widetilde{B}^{(2)}_n(v^{(1)}_n - B^{(1)}_n(v^{(1)}_n, 1-p), \mu(q_n)) \\ -\widetilde{B}^{(3)}_n(v^{(2)}_n - B^{(2)}_n(v^{(2)}_n, 1-p^2), \mu(q_n)) + B^{(3)}_n(v^{(3)}_n, 1-p^3) \cdot (1 - I_p(n)) \\ \ldots \\ v^{(m)}_{n+1} = v^{(m)}_n - B^{(m)}_n(v^{(m)}_n, 1-p^m) \\ +\widetilde{B}^{(m)}_n(v^{(m-1)}_n - B^{(m-1)}_n(v^{(m-1)}_n, 1-p^{m-1}), \mu(q_n)). \end{cases}$$

3. Доказательство основной теоремы

Мы будем использовать обобщенный критерий Фостера и условия невозвратности цепей (см. Приложения, утверждения 2, 3) для доказательства стабильности и нестабильности марковских цепей (M1) и (M2). В обоих случаях мы будем оценивать условное математическое ожидание расстояния (в смысле функции Ляпунова) от цепи в некоторый момент времени до ее начального состояния (далее усредненный «снос»). Сначала мы покажем, что если норма вектора заряженных сообщений больше некоторой константы, то усредненный снос цепи за один шаг удовлетворяет условиям утверждений 2, 3, и далее, в дополнении к рассмотренной области, мы определим некоторое положительное число k так, чтобы соответствующие условия утверждений 2, 3 выполнялись за k шагов. В процессе определения числа k мы найдем промежутки времени, на которых цепи (M1) и (M2) «склеиваются» с *основной* цепью (M0) с вероятностью, сколь угодно близкой к 1. Начнем с доказательства стабильности цепи (M1). Пусть $X_n = (q_n, v^{(1)}_n, v^{(2)}_n, \ldots)$. Используя обобщенный критерий Фостера (см. Приложения, утверждение 2), достаточно найти неотрицательную тестовую функцию (Ляпунова) $L(x)$ и натуральное число N_0 (достаточно большое) такое, что для множества

$$D = \{x \in \mathbb{Z}^{\infty}_{+} : L(x) \le N_0\}$$

и для подходящей положительной и ограниченной сверху целочисленной функции $g(x)$, марковская цепь имеет ограниченный усредненный снос на D

$$\sup_{x \in D} \mathbb{E}_x(L(X_{g(x)}) - L(x)) \equiv K < \infty, \tag{2}$$

а также равномерно отрицательный снос на дополнении к D ($\overline{D}$): для любого $x \in \overline{D}$

$$\mathbb{E}_x(L(X_{g(x)}) - L(x)) \le -\varepsilon, \tag{3}$$

где ε — некоторая фиксированная положительная константа. Пусть тестовая функция L имеет следующий вид

$$L(x) = \|x\| = q + \|v\|\,, \quad x = (q, v^{(1)}, v^{(2)}, ...) \in \mathbb{Z}_+^\infty,$$
$$\|v\| \le q, \quad v = (v^{(1)}, v^{(2)}, ...).$$

Далее мы покажем, что подходящий выбор функции $g(x)$ ведет к доказательству стабильности. Рассмотрим $g(x) \equiv 1$, тогда

$$\mathbb{E}_x(L(X_1) - L(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}_x(v_1^{(i)} - v_0^{(i)}) + \mathbb{E}_x(q_1 - q_0)$$
$$= \mu(q_0)(q_0 - \|v_0\| + \lambda) - \sum_{i=1}^{\infty}(1 - p^i)v_0^{(i)} + \lambda - \mathbb{P}_x(I_p(0) = 1).$$

Очевидно, что данное выражение можно ограничить константой

$$K = \max(1, c) + 2\lambda$$

для всех $X_0 = x \in \mathbb{Z}_+^\infty$. Таким образом условие (2) выполнено для любой константы $N_0 \ge 0$. Теперь выберем $N_0 > 2c$ и, так как $q_0 \ge \|v_0\|$, тогда получим, что $q_0 > c$ для всех $x \in \overline{D}$. Значит для $x \in \overline{D}$ имеем

$$(q_0 + \lambda)\frac{c}{q_0} - \frac{c}{q_0}\|v_0\| - \sum_{i=1}^{\infty}(1 - p^i)v_0^{(i)} + \lambda - \mathbb{P}_x(I_p(0) = 1)$$
$$\le (c + 2\lambda) - (1 - p)\|v_0\|\,.$$

Ясно, что последнее неравенство несложно обобщить на случай, когда вероятность передачи сообщения, заряженного на i ячеек, будет неубывающей функцией. Заметим, что для $x \in \overline{D}$, при $\|v_0\| > R := \frac{2\lambda + c}{1 - p}$, выполняется условие (3). Чтобы завершить доказательство стабильности цепи (M1), нам достаточно показать, что при $\|v_0\| \le R$ и $x \in \overline{D}$, следующее выражение строго меньше нуля

$$\mathbb{E}_x(L(X_k) - L(x)) = \mathbb{E}_x(q_k - q_0) + \mathbb{E}_x(\|v_k\| - \|v_0\|).$$

Для этого мы:
а) оценим второе слагаемое для любого $k \ge 0$ с помощью построения вспомогательной марковской цепи;
б) покажем, что при достаточно больших значениях k и N_0, рассматриваемое выражение будет строго меньше нуля при $\|v_0\| \le R$ и $x \in \overline{D}$.

а) Пусть $\{Y_n\}_{n \ge 0}$ последовательность н.о.р. случайных величин, которые не зависят от ξ_n и имеют следующее распределение

$$\mathbb{P}(Y_n > x) = \sup_{q \ge c} \mathbb{P}(B_1(q, \mu(q)) > x). \tag{4}$$

Используя неравенство Маркова, можно заключить, что для $x > 0$ и для любого $\alpha > 0$, правая часть равенства (4) не превосходит

$$\sup_{q \ge c} \mathbb{E}\,\frac{e^{\alpha B_1(q, c/q)}}{e^{\alpha x}} = \sup_{q \ge c}\Big(1 + (e^\alpha - 1)\frac{c}{q}\Big)^q e^{-\alpha x} \equiv C_1 e^{-\alpha x},$$

где C_1 конечна, так как $\left(1+(e^\alpha-1)\frac{c}{q}\right)^q \to \exp(c(e^\alpha-1)) < \infty$, при $q\to\infty$. Таким образом, распределение Y_1 — собственное, то есть

$$\mathbb{P}(Y_n < \infty) = 1$$

для всех $n \ge 0$ и, более того, имеет конечный экспоненциальный момент. Теперь рассмотрим вспомогательную последовательность

$$Z_n^{(1)} = Y_n^{(1)} + \xi_n,\ \ W_{n+1}^{(1)} = D_n^{(1)}(W_n, p) + Z_n^{(1)},\ \ W_0^{(1)} = v_0^{(1)}.$$

Тогда, из свойств (IV) и (V) утверждения 1 (см. Приложения)

$$\mathbb{E}(v_n^{(1)} \mid v_0^{(1)}) \le \mathbb{E}(W_n^{(1)} \mid W_0^{(1)}) \le v_0^{(1)} + C^{(1)}, \tag{5}$$

где

$$C^{(1)} = \frac{E(Y_1+\xi_1)}{1-p} = \frac{EY_1+\lambda}{1-p}.$$

Теперь покажем, что

$$\mathbb{E}_x(\|v_n\| - \|v_0\|) \le C^{(1)} + C^{(2)}(n, q_0)\ ,\ \text{при}\ n \ge 0, \tag{6}$$

где $C^{(2)}(n,q_0) \to 0$ при $q_0 \to \infty$ для любого фиксированного $n > 0$. Сначала заметим, что в силу (5) выполняется следующее неравенство

$$\mathbb{E}_x(v_n^{(1)} - v_0^{(1)}) \le C^{(1)}.$$

Таким образом, осталось показать, что усредненный снос суммы сообщений заряженных на более, чем одно деление, мажорируется $C^{(2)}(n,q_0)$. Для этого достаточно рассмотреть следующую цепочку неравенств, при $q_0 \ge n$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\Big[\sum_{i=2}^{\infty}(v_n^{(i)} - v_0^{(i)})\Big] &\le \mathbb{E}_x\Big[\sum_{i=2}^{\infty}(v_{n-1}^{(i)} - v_0^{(i)})\Big] + p\,\mathbb{E}_x\mu(q_{n-1})v_{n-1}^{(1)}\\ &\le p\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}_x\mu(q_k)v_k^{(1)} \le pn(C^{(1)}+R)\frac{c}{q_0-n+1} =: C^{(2)}(n,q_0),\end{aligned}$$

где первое неравенство верно в силу того, что общее количество сообщений, заряженных на более, чем одну ячейку, может пополниться только сообщениями, которые были заряжены на одну ячейку. Ясно, что $C^{(2)}(n,q_0) \to 0$ при $q_0 \to \infty$ для любого фиксированного $n > 0$. Таким образом, неравенство (6) выполнено.

б) Рассмотрим вспомогательную последовательность

$$\widetilde{V}_{n+1} = \widetilde{V}_n - B_n(\widetilde{V}_n, 1-p) + \eta_n, \tag{7}$$

где $\{\eta_n\}_{n\ge 0}$ — семейство н.о.р. случайных величин с распределением Пуассона с параметром c (Π_c). Используя (III) и (VI) пункты утверждения 1, можем заключить, что последовательность $\widetilde{V}_n$ сходится к π — распределению Пуассона с параметром $c/(1-p)$ в метрике полной вариации. Тогда, по определению, мы можем выбрать $l \ge 1$ так, что для всех $n \ge l$

$$\sup_{\widetilde{\mathrm{V}}_0 \le \mathrm{R}} |\,\mathbb{P}_x(B_n^{(1)}(\widetilde{V}_n, 1-p) = 1) - ce^{-c}| < \delta/4. \tag{8}$$

Далее выберем $\delta > 0$ такое, что $\lambda + \delta < ce^{-c}$. Так как $\|v_0\| \le R$, то достаточно зафиксировать шаг, на котором R элементов, имеющих заряд в начальный момент времени, с большой вероятностью потеряют весь свой заряд. Для этого рассмотрим события $A_0^n = \{$после $(n-1)$-ого шага все изначально заряженные сообщения пытались передаться хотя бы один раз$\}$ при $n \geq 0$. В силу того, что вероятность передачи заряженных сообщений тем выше, чем выше их заряд, значит «медленнее» всего, в произвольный момент времени, будут передаваться на передающий прибор сообщения, имеющие всего один заряд. Тогда верна следующая оценка $\mathbb{P}_x(A_0^n) \geq \mathbb{P}_x(B(R, p^n) = 0) = (1-p^n)^R$. Заметим, что данные рассуждения верны и в случае, если вероятность передачи сообщения, заряженного на i ячеек, есть неубывающая функция. Таким образом существует n_0 такое, что для любого $n \geq n_0$ выполнено

$$\mathbb{P}_x(A_0^n) \geq 1 - \delta/6.$$

Далее выберем $k > \max(n_0, l)$ так, что

$$\begin{aligned} -\varepsilon &= k\lambda + 2C^{(1)} - (k - \max(n_0, l))(ce^{-c} - \delta) \\ &= k(\lambda - (ce^{-c} - \delta)) + \max(n_0, l)(ce^{-c} - \delta) + 2C^{(1)} < 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Очевидно, что можно выбрать C_3 так, что вероятность события

$$A_1(C_3) = \{W_n^{(1)} \leq C_3 \text{ для всех } 0 \leq n \leq k\}$$

будет не меньше, чем $1 - \delta/6$. Рассмотрим событие, состоящее в том, что ни одно уже заряженное сообщение не получает новый заряд за k шагов

$$\begin{aligned} A_2 = \{\widetilde{B}_n^{(i)}(v_n^{(i-1)} - B_n^{(i-1)}(v_n^{(i-1)}, 1 - p^{i-1}), \mu(q_n)) = 0 \\ \text{для всех } 2 \leq i < \infty \text{ и } 0 \leq n \leq k\}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_x(A_2 \cap A_1(C_3)) \geq \mathbb{P}_x(\{\widetilde{B}_n^{(1)}(R + C_3, \mu(q_n)) = 0 \text{ для всех } 0 \leq n \leq k\}) \\ = (1 - \mu(q_0 - k))^{(R+C_3)k}. \end{aligned} \tag{10}$$

Неравенство справедливо в силу того, что в исходной цепи, при $\|v_0\| \leq R$, в начальном состоянии будет не более чем $\lfloor R \rfloor$ заряженных сообщений, а также вероятность подзарядки одного сообщения в произвольный момент времени не зависит от того, какой заряд оно имеет. Теперь выберем $\widetilde{q}$ так, что:

1. Расстояние между $\widetilde{B}_n^{(1)}(q - v^{(1)} + \xi_n, \mu(q))$ для любого фиксированного n, при $q \geq \widetilde{q}$ и распределением Пуассона с параметром c не превосходит $\delta/4$ в метрике полной вариации равномерно по $v^{(1)} \in (0, 1, ..., C_3)$, что можно сделать по известной теореме Пуассона.
2. Значение в (10) не меньше чем $1 - \frac{\delta}{6}$. Для этого достаточно подобрать такое значение $\widetilde{q}$, чтобы выполнялось следующее неравенство

$$\left(1 - \frac{c}{(\widetilde{q} - k)}\right)^{(R+C_3)k} \geq 1 - \delta/6.$$

3. Выполняется неравенство $C^{(2)}(n, \widetilde{q}) < C^{(1)}$ (см. (6)).

Наконец пусть $N_0 = \widetilde{q} + k + R$. Тогда для любого x такого, что $\|x\| \geq N_0$ и $\|v_0\| \leq R$ мы получаем, что $q_i \geq \widetilde{q}$ для всех $0 \leq i \leq k$, так как $q_{i+1} \geq q_i - 1$ п.н. Теперь последовательно соберем все ограничения вместе. Сначала рассмотрим событие $A_3 = \{v_n^{(i)} = 0$ для всех $2 \leq i \leq \infty$ и $\max(n_0, l) \leq n \leq k\}$. Заметим, что

$$A_2 \cap A_0^{n_0} \cap A_1(C_3) \subseteq A_3,$$

так как, во-первых, начальные сообщения после момента времени n_0 потратили весь свой заряд и, во-вторых, за k шагов не было заряжено на более чем одно деление ни одного сообщения. Следовательно, с момента времени $\max(n_0, l)$ по момент времени k в системе не было сообщений, заряженных более, чем на одно деление. Таким образом верна следующая оценка

$$\mathbb{P}_x(A_3) \geq \mathbb{P}_x(A_2 \cap A_0^n \cap A_1(C_3)) \geq 1 - \delta/2. \tag{11}$$

Тогда, имеет место следующее неравенство

$$\mathbb{P}_x(v_n^{(i)} = 0 \text{ при } \max(n_0, l) \leq n \leq k \text{ и для всех } i \geq 2) \geq 1 - \delta/2,$$

и, следовательно, при $\max(n_0, l) \leq n \leq k$

$$|\,\mathbb{P}_x(I_p(n) = 1) - \mathbb{P}_x(B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1 - p) = 1)| < \delta/2. \tag{12}$$

В силу (8) можно утверждать, что при всех $\max(n_0, l) \leq n \leq k$, верно

$$|\,\mathbb{P}_x(B_n^{(1)}(v_n^{(1)}, 1 - p) = 1) - ce^{-c}| < \delta/2. \tag{13}$$

Далее, осталось собрать (12) и (13) вместе, чтобы заключить, что при всех $\max(n_0, l) \leq n \leq k$

$$|\,\mathbb{P}_x(I_p(n) = 1) - ce^{-c}| < \delta. \tag{14}$$

Наконец из (6), получим

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x(L(X_k) - L(x)) &= \mathbb{E}_x(q_k - q_0) + \mathbb{E}_x(\|v_k\| - \|v_0\|) \\
&\leq k\lambda - \sum_{i=\max(n_0,l)+1}^{k} \mathbb{P}_x(I_p(n) = 1) + C^{(1)} + C^{(2)}(k, q_0) \\
&< k\lambda - \sum_{i=\max(n_0,l)+1}^{k} (ce^{-c} - \delta) + 2C^{(1)} \\
&= k\lambda - (k - max(n_0, l))(ce^{-c} - \delta) + 2C^{(1)} < -\varepsilon,
\end{aligned}$$

где ε определена в (9) и $C^{(2)}(k, q_0) < C^{(1)}$, так как $q_0 \geq \widetilde{q}$. Таким образом, доказательство стабильности марковской цепи (M1) завершено.

Перейдем к доказательству нестабильности цепи (M1). Мы будем использовать утверждение 3, сформулированное в приложении. Пусть n_k — некоторая последовательность натуральных чисел такая, что $n_k \to \infty$, при $k \to \infty$, а также $|n_{k+1} - n_k| \leq C < \infty$ для любого $k \geq 0$. В силу неравенства

$$q_n \geq q_{n_k} - C \text{ п.н. для всех } n_k \leq n \leq n_{k+1} \text{ и } k \geq 0, \tag{15}$$

можно утверждать, что, если $q_{n_k} \to \infty$, при $k \to \infty$, то $q_n \to \infty$, при $n \to \infty$. Таким образом, если положить $\widetilde{L}(x) = q$, где $x = (q, v^{(1)}, v^{(2)}, ...) = (q, v)$ и

$$\widetilde{g}(x) = \begin{cases} 1, & \|v\| > \widetilde{R} \\ \widetilde{k}, & \|v\| \leq \widetilde{R} \end{cases},$$

где константы $\widetilde{k}$, $\widetilde{R}$ будут заданы далее подходящим образом, то при заданных в условии утверждения 3 ограничениях, достаточно показать, что, во-первых, марковская цепь имеет положительный снос

$$\mathbb{E}_x(\Delta_{\widetilde{g}(x)} I(\Delta_{\widetilde{g}(x)} \leq M)) \geq \widetilde{\varepsilon}, \tag{16}$$

где $\Delta_{\widetilde{g}(x)} = \widetilde{L}(X_{\widetilde{g}(x)}) - \widetilde{L}(x)$. И, во-вторых, что следующее семейство случайных величин

$$(\Delta^{-}_{\widetilde{g}(x)})^2 = (\min(0, \Delta_{\widetilde{g}(x)}))^2 \tag{17}$$

равномерно интегрируемо. Тогда из условий (15), (16) и (17), из соответствующего утверждения, будет следовать

$$\mathbb{P}_x(\widetilde{L}(X_n) \to \infty) = 1.$$

В силу неравенства (15), можно утверждать, что, при выбранных функциях $\widetilde{L}$ и $\widetilde{g}$, верно $0 \geq \Delta^{-}_{\widetilde{g}(x)} \geq -\widetilde{k}$ п.н. и, таким образом, условие (17) выполнено. Также, в силу того, что $\mathbb{E}\,\xi_1 = \lambda < \infty$, условие (16) эквивалентно

$$\mathbb{E}_x(\Delta_{\widetilde{g}(x)}) \geq \varepsilon', \tag{18}$$

для некоторого $\varepsilon' > 0$. Следовательно, для доказательства нестабильности, нужно показать, что выполняется неравенство (18).
Пусть $\widetilde{R}$ такая, что

$$\gamma := \sup_{\|v_0\| \geq \widetilde{R}} \mathbb{P}_x(\sum_{i=1}^{\infty} B_0^{(i)}(v_0^{(i)}, 1 - p^i) = 1) < \lambda.$$

В силу того, что

$$\mathbb{P}_x(\sum_{i=1}^{\infty} B_0^{(i)}(v_0^{(i)}, 1 - p^i) = 1) = \sum_{j=1}^{\infty} v_0^{(j)}(1 - p^j) p^{\sum_{i \geq 1} i v_0^{(i)} - j}$$

$$\leq p^{\|v_0\| - 1} \sum_{j=1}^{\infty} v_0^{(j)}(1 - p^j) \leq p^{\|v_0\| - 1} \|v_0\| \to 0 \text{ , при } \|v_0\| \to \infty,$$

можно утверждать, что такая константа $\widetilde{R}$ существует. Заметим, что некоторая константа $\widetilde{R}$ существует и в случае, если вероятность передачи сообщения, заряженного на i ячеек, есть неубывающая функция, так как ясно, что чем больше сообщений пытается попасть на передающий прибор, тем выше вероятность помехи. Таким образом, при $\|v_0\| > \widetilde{R}$

$$\mathbb{E}_x(q_1 - q_0) \geq \lambda - \gamma > 0.$$

Зафиксируем моменты времени $\widetilde{l}$ и $\widetilde{n_0}$ такие, что после них, вспомогательная цепь (7) с вероятностью, близкой к 1, совпадает с *основной*, а также с вероятностью, близкой к 1, изначально заряженные сообщения хотя бы один раз пытались передаться. Тогда, из доказательства стабильности цепи (M1), мы можем утверждать, что при достаточно большом значении q_0, исходная и *основная* цепи совпадают во временном отрезке $[\max(\widetilde{n_0}, \widetilde{l}), \widetilde{k}]$ с достаточно большой вероятностью, где $\widetilde{l}$ задана выше, а $\widetilde{k}$ такое, что верно следующее неравенство

$$\begin{aligned} \varepsilon' &= \widetilde{k}\lambda - \widetilde{l} - (\widetilde{k} - \max(\widetilde{n_0}, \widetilde{l}))(ce^{-c} + \widetilde{\delta}) \\ &= \widetilde{k}(\lambda - (ce^{-c} + \widetilde{\delta})) + \max(\widetilde{n_0}, \widetilde{l})(ce^{-c} - \widetilde{\delta}) - \widetilde{l} > 0, \end{aligned} \tag{19}$$

где $\widetilde{\delta}$ такая, что

$$0 < \widetilde{\delta} < \lambda - ce^{-c}.$$

Таким образом, при $q_0 > \widetilde{q} + \widetilde{k}$ и $\|v_0\| \le \widetilde{R}$, получим

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x(\widetilde{L}(X_{\widetilde{k}}) - \widetilde{L}(x)) &\ge \widetilde{k}\lambda - \max(\widetilde{n_0}, \widetilde{l}) - \sum_{i=\max(\widetilde{n_0},\widetilde{l})+1}^{\widetilde{k}} \mathbb{P}_x(I_p(i) = 1) \\ &> \widetilde{k}\lambda - \max(\widetilde{n_0}, \widetilde{l}) - \sum_{i=\max(\widetilde{n_0},\widetilde{l})+1}^{\widetilde{k}} (ce^{-c} + \widetilde{\delta}) \\ &= \widetilde{k}\lambda - \max(\widetilde{n_0}, \widetilde{l}) - (\widetilde{k} - max(\widetilde{n_0}, \widetilde{l}))(ce^{-c} + \widetilde{\delta}) > \varepsilon',\end{aligned}$$

где ε' из (19). Таким образом, доказательство нестабильности цепи (M1) завершено.

Перейдем к доказательству стабильности марковской цепи (M2). Мы также будем использовать обобщенный критерий Фостера, с тестовой функцией $L(x) = q + \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i/2} v^{(i)}$, тогда усредненное приращение за один шаг равно

$$\mathbb{E}_x(L(X_1) - L(x)) = \mathbb{E}_x(q_1 - q_0) + \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i/2}\, \mathbb{E}_x(v_1^{(i)} - v_0^{(i)}).$$

Раскроем каждое слагаемое в соответствии с его определением и посчитаем условные математические ожидания получившихся случайных величин. Таким образом, выражение сверху не превышает

$$\begin{aligned}&\lambda - \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i/2} v_0^{(i)}(1 - p^i) + \mu(q_0)(q_0 + \lambda - \|v_0\|) + \sum_{i=1}^{\infty} p^{-(i+1)/2} v_0^{(i)} p^i \mu(q_0) \\ &- \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i/2} v_0^{(i)} p^i \mu(q_0) + \sum_{i=2}^{\infty} p^{-(i-1)/2} v_0^{(i)}(1 - p^i) = \lambda - p^{-1/2} v_0^{(1)}(1 - p) \\ &- \sum_{i=2}^{\infty}(p^{-i/2} - p^{-(i-1)/2}) v_0^{(i)}(1 - p^i) + \mu(q_0)(q_0 + \lambda) - \mu(q_0)\,\|v_0\| \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}(p^{-(i+1)/2} - p^{-i/2}) v_0^{(i)} p^i \mu(q_0) \le \lambda - (1-p)(1-\sqrt{p}) \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i/2} v_0^{(i)} + c + \\ &\lambda + \sum_{i=1}^{\infty}(p^{i/2-1/2} - p^{i/2} - 1) v_0^{(i)} \mu(q_0) \le -(1-p)(1-\sqrt{p}) \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i/2} v_0^{(i)} + c + 2\lambda.\end{aligned}$$

Таким образом, при $L((0, v_0)) > R := \frac{2\lambda + c}{(1-p)(1-\sqrt{p})}$ и $X_0 = x \in \overline{D}$, выполняется условие (3). Далее можно полагать, что $L((0, v_0)) \le R$. Теперь, аналогично доказательству стабильности цепи (M1), мы покажем, что:

а) усредненный снос заряженных сообщений цепи (M2) не превышает некоторой константы;

б) при достаточно большом значении q_0, после некоторого количества времени $t(R, p)$, с вероятностью, близкой к единице, цепи (M2) и (M0) склеиваются.

а) Заметим, что упомянутый снос зависит преимущественно от сообщений, заряженных на 1 ячейку. Действительно, рассмотрим следующую цепочку неравенств, при $q_0 \geq n$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x\Big[\sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}(v_n^{(i)} - v_0^{(i)})\Big] &\leq \mathbb{E}_x\Big[\sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}(v_{n-1}^{(i)} - v_0^{(i)})\Big] + \mathbb{E}_x v_{n-1}^{(1)}\mu(q_{n-1}) \\ &+ \sum_{i=2}^{\infty}(p^{i/2-1/2} - p^{i/2})\,\mathbb{E}_x v_{n-1}^{(i)}\mu(q_{n-1}) \leq \mathbb{E}_x\Big[\sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}(v_{n-1}^{(i)} - v_0^{(i)})\Big] \\ &+ \sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}_x v_{n-1}^{(i)}\mu(q_{n-1}) \leq \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{i=1}^{\infty}\mathbb{E}_x v_k^{(i)}\mu(q_k) \\ &\leq n\Big[R + n\Big(c + \frac{\lambda c}{q_0 - n + 1}\Big)\Big]\frac{c}{q_0 - n + 1}, \end{aligned} \tag{20}$$

где последнее неравенство справедливо в силу того, что за один временной слот, скажем $[k, k{+}1)$, общее количество заряженных сообщений в среднем увеличится не более, чем на $c{+}\lambda\mu(q_k)$, а изначальное количество заряженных сообщений не превышает R, так как $\|v_0\| \leq L((0, v_0)) \leq R$. Таким образом, при достаточно большом q_0 и фиксированном $n > 0$, снос сообщений, заряженных на более, чем одну ячейку, будет сколь угодно малым. Чтобы завершить доказательство данного пункта, осталось оценить усредненный снос сообщений, заряженных на 1 ячейку. Заметим, что, в отличие от модели (M1), в (M2) у элемента $v_n^{(1)}$ появляется дополнительное неотрицательное слагаемое $B_n^{(2)}(v_n^{(2)}, 1{-}p^2)\cdot(1{-}I_p(n))$. Следовательно, неравенство (5) принимает следующий вид

$$\mathbb{E}_x v_n^{(1)} \leq \mathbb{E}_x W_n^{(1)} + (1 - p^2)\,\mathbb{E}_x v_n^{(2)} \leq v_0^{(1)} + C^{(1)} + \mathbb{E}_x v_n^{(2)}. \tag{21}$$

Таким образом, в силу неравенств (20) и (21), а также

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_x v_n^{(2)} \leq \mathbb{E}_x \sum_{i=2}^{\infty} v_n^{(i)} \leq \mathbb{E}_x \sum_{i=2}^{\infty} v_{n-1}^{(i)} + p\,\mathbb{E}_x\mu(q_{n-1})v_{n-1}^{(1)} \\ \leq \mathbb{E}_x \sum_{i=2}^{\infty} v_0^{(i)} + p\sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}_x\mu(q_k)v_k^{(1)} \leq R + n\Big[R + n\Big(c + \frac{\lambda c}{q_0 - n + 1}\Big)\Big]\frac{c}{q_0 - n + 1},\end{aligned}$$

имеем

$$\mathbb{E}_x p^{-1/2}(v_n^{(1)} - v_0^{(1)}) \leq p^{-1/2}\Big[C^{(1)} + R + n\Big(R + n\Big(c + \frac{\lambda c}{q_0 - n + 1}\Big)\Big)\frac{c}{q_0 - n + 1}\Big].$$

Итого, справедлива следующая оценка

$$\mathbb{E}_x\Big[\sum_{i=2}^{\infty} p^{-i/2}(v_n^{(i)} - v_0^{(i)})\Big] \leq p^{-1/2}(2C^{(1)} + R),$$

при q_0 таком, что $(1{+}p^{-1/2})n\Big[R{+}n\Big(c{+}\lambda c/(q_0{-}n{+}1)\Big)\Big]c/(q_0{-}n{+}1) \leq p^{-1/2}C^{(1)}$.

б) Сведем цепь (M2) к цепи (M0) с вероятностью, близкой к 1. Сначала заметим, что верно следующее неравенство

$$\sum_{i=1}^{\infty} i v_0^{(i)} \leq s_0 \sum_{i=1}^{\infty} p^{-i/2} v_n^{(i)} \leq s_0 R,$$

где $s_0 = s_0(p)$ первое такое, что $p^{-i/2} \geq i$ для всех $i \geq s_0$. Следовательно, суммарный изначальный заряд не превышает $s_0 R$. Таким образом, за некоторое количество времени $t(R,p)$, при достаточно большом значении q_0, в системе не будет сообщений, заряженных на более, чем одно деление с близкой к единице вероятностью. Итого, в силу ограниченности усредненного сноса заряженных сообщений, склеивания исходной цепи (M2) с цепью (M0), а также доказанных выше свойств цепи (M0), можем заключить, что цепь (M2) стабильна.

Случай нестабильности цепи (M2) можно доказать схожим образом, почти полностью повторив соответствующие рассуждения доказательства нестабильности для цепи (M1), то есть сначала нужно найти некоторую константу $\widetilde{R}$ такую, что, при $\sum_{i=1}^{\infty} i v_0^{(i)} \geq \widetilde{R}$, снос цепи (M2) за один шаг будет отрицательным, а затем, в дополнении к данной области, с помощью склеивания цепи (M2) с цепью (M0), найти некоторую константу $\widetilde{k}$ такую, что снос цепи (M2) за $\widetilde{k}$ шагов станет отрицательным.

Авторы выражают благодарность за постановку задачи, полезные обсуждения и замечания в ходе работы над этой статьей Фоссу С.Г.

4. Приложения

Сформулируем вспомогательные утверждения, используемые при доказательстве основной теоремы. Сначала приведем лемму 1 из работы [1]. Далее мы будем использовать следующие обозначения:

$$D_n(k,p) := k - B_n(k, 1-p) = \sum_{i=1}^{k} I(U_{n,i} > 1-p),$$

$$\widetilde{D}_n(k,p) := k - \widetilde{B}_n(k, 1-p) = \sum_{i=1}^{k} I(\widetilde{U}_{n,i} > 1-p).$$

Ясно, что $D_n(k,p)$ и $\widetilde{D}_n(k,p)$ имеют биномиальное распределение с параметрами k и p.

Утверждение 1. *Пусть $\{Z_n\}_{n\geq 0}$ последовательность н.о.р. неотрицательных целочисленных случайных величин с конечным средним $\mathbb{E}\, Z_0 < \infty$. Предположим, что они не зависят от семейств н.о.р. случайных величин $\{U_{n,i}^{(j)};$ $-\infty < n < \infty,\ i \geq 1\}$ и $\{\widetilde{U}_{n,i}^{(j)};\ -\infty < n < \infty,\ i \geq 1,\ 1 \leq j \leq m\}$, имеющих равномерное распределение на интервале (0, 1).*

(I) Для любого начального значения W_0 и для любого параметра $p \in (0,1)$, последовательность

$$W_{n+1} = W_n - B_n(W_n, 1-p) + Z_n \equiv D_n(W_n, p) + Z_n \tag{22}$$

эргодична.

(II) Для $m \leq n$ определим случайные величины

$$D_{m:n}(k,p) = D_n(D_{n-1}(...(D_{m+1}(D_m(k,p),p)...,p) \tag{23}$$

и заметим, что случайная величина $D_{m:n}(k, 1-p)$ *имеет биномиальное распределение с параметрами* k *и* p^{n-m+1}. *Тогда стационарная последовательность* $W^{(n)}$, *определенная следующим образом*

$$W^{(n)} = Z_{n-1} + \sum_{j=1}^{+\infty} D_{(n-j):(n-1)}(Z_{n-j-1}, p), \tag{24}$$

имеет конечное математическое ожидание $EW^{(n)} = \frac{EZ_0}{1-p}$ *и образует стационарное решение для рекурсивного уравнения,*

$$W^{(n+1)} = D_n(W^{(n)}, p) + Z_n. \tag{25}$$

(III) Пусть Q — *распределение* $W^{(0)}$. *Тогда, для любого начального значения* W_0

$$\mathbb{P}(W_n = W^{(n)}) = \mathbb{P}(W_l = W^{(l)}, \forall l \geq n) \to 1 \tag{26}$$

и, в частности,

$$\sup_{\mathrm{A} \in \mathrm{Z}_+} |\, \mathbb{P}(W_n \in A) - Q(A)| \leq \mathbb{P}(W_n \neq W^{(n)}) \to 0, \text{ при } n \to \infty. \tag{27}$$

В частности, если W_0 *и* Z_0 *имеют конечные экспоненциальные моменты, тогда*

$$\mathbb{P}(W_n \neq W^{(n)}) \leq K_1 e^{-K_2 n}, \tag{28}$$

для некоторых $K_1, K_2 > 0$ *и для всех* $N \geq 0$.
(IV) Для любого $n \geq 0$,

$$W_n \leq W_0 + W^{(n)} \text{ п.н.} \tag{29}$$

и

$$\mathbb{E}\, W_n \leq \mathbb{E}\, W_0 + \frac{\mathbb{E}\, Z_0}{1-p}. \tag{30}$$

(V) Пусть $\widetilde{Z}_n$ — *любая другая последовательность неотрицательных целочисленных случайных величин, таких что* $0 \leq \widetilde{Z}_n \leq Z_n$ *п.н., для всех* n. *Рассмотрим рекурсивное уравнение*

$$\widetilde{W}_{n+1} = D_n(\widetilde{W}_n, p) + \widetilde{Z}_n \tag{31}$$

с целочисленным начальным значением $0 \leq \widetilde{W}_0 \leq W_0$. *Тогда*

$$\widetilde{W}_n \leq W_n \quad \text{п.н., для всех } n \geq 0. \tag{32}$$

(VI) В частности, если Z_0 *пуассоновская случайная величина с параметром* c, *то каждый* $W^{(n)}$ *имеет пуассоновское распределение с параметром* $c/(1-p)$.

Далее сформулируем второе вспомогательное утверждение из работы [11]. Пусть X_n — однородная по времени цепь Маркова, принимающая значения в некотором польском пространстве $\mathcal{X}$. Пусть $L : \mathcal{X} \to \mathbb{R}_+$ — некоторая измеримая функция Ляпунова. Пусть $g : \mathcal{X} \to \mathbb{N}$ и $h : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ — измеримые функции такие, что:
1) функция h ограничена снизу: $\underset{x \in \mathcal{X}}{h(x)} > -\infty$;
2) функция h асимптотически положительна: $\sup\limits_{K>0} \inf\limits_{L(x)>K} h(x) > 0$;
3) функция g локально ограничена сверху: $\sup\limits_{L(x) \leq N} g(x) < \infty$ для всех $N \geq 0$;

4) функция g асимптотически ограничена функцией h: $\inf\limits_{K>0} \sup\limits_{L(x)>K} \frac{g(x)}{h(x)} < \infty$.

Для измеримого множества $B \subseteq \mathcal{X}$ определим $\tau_B = \inf\{n \geq 1 : X_n \in B\}$. Множество B называется *возвратным*, если $\mathbb{P}_x(\tau_B < \infty) = 1$ и *положительно возвратным*, если $\sup\limits_{x\in\mathcal{X}} \mathbb{E}_x\tau_B < \infty$. Теперь мы готовы сформулировать утверждение.

Утверждение 2 (обобщенный критерий Фостера)**.** *Предположим, что существуют тестовая функция («функция Ляпунова»)* $L(x) \geq 0$, *и функции* g *и* h, *удовлетворяющие условиям* $1) - 4)$ *такие, что*

$$\mathbb{E}(L(X_{g(X_0)}) - L(X_0)|X_0 = x) \leq -h(x). \tag{33}$$

Тогда существует $N_0 \in \mathbb{N}$ *такая, что для всех* $N > N_0$ *и всех* $x \in \mathcal{X}$ *имеем* $\mathbb{E}_x\tau < \infty$ *и* $\mathop{\mathbb{E}_x\tau}\limits_{L(x)\leq N} < \infty$, *где* $\tau \equiv \tau(N) = \inf\{n \geq 1 : L(x) \leq N\}$.

Сформулируем третье вспомогательное утверждение, которое было исследовано в работе С.Г. Фосса и Д.Е. Денисова [10]. Данное утверждение более аккуратно изложено, а также доказано при более общих условиях в работе Д.Е. Денисова [12]. Но ради простоты мы приведем только частный случай для однородных цепей Маркова. Пусть последовательность $\{X_n\}_{n\geq 0}$ образует цепь Маркова такую, что

$$X_{n+1} = f(X_n, \alpha_n)$$

с начальным значением $X_0 = x$, где $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ образует последовательность независимых равномерно распределенных на отрезке $[0, 1]$ случайных величин, а f — измеримая функция. Пусть далее $\Delta = L(X_1) - L(X_0)$, где L — измеримая функция. Определим

$$\tau(N) = \inf\{n \geq 0 \ : \ L(X_n) \geq N\}.$$

Также далее полагаем, что $h(t)$ — некоторая вещественная функция такая, что $(h(t))^{-1}$ интегрируема на промежутке $(1, \infty)$.

Утверждение 3. *Пусть существуют такие числа* $N > 0$, $\varepsilon > 0$ *и такая функция* $h(t)$, *что*
1) $\tau(N) < \infty$ *п.н. для произвольного начального состояния цепи;*
2) Для всех $x \in X$ *таких, что* $L(x) \geq N$, *выполняется:*

$$\mathbb{E}_x(\Delta \cdot I(\Delta \leq M)) \geq \varepsilon;$$

3) Семейство случайных величин $\{h(-min(0, \Delta)), \ X_0 = x, \ L(x) \geq N\}$ *равномерно интегрируемо. Тогда для каждого* $x \in X$

$$\mathbb{P}_x(\lim_{n\to\infty} L(X_n) = \infty) = 1.$$

References

[1] S. Foss, D. Kim, A. Turlikov, *Stability and instability of a random multiple access model with adaptive energy harvesting*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **13** (2016), 16–25. Zbl 1345.60122

[2] Xun Zhou, Rui Zhang, Chin Keong Ho, *Wireless information and power transfer in multiuser OFDM systems*, IEEE Transactions on Wireless Communications, **13**:4 (2014), 2282–2294.

[3] J. Jeon, A. Ephremides, *The stability region of random multiple access under stochastic energy harvesting*, Proceedings of the IEEE International Symposium on Information Theory (ISIT), (2011), 1796–1800.

[4] A. Bergman, M. Sidi, *Energy efficiency of collision resolution protocols*, Computer Communications, **29** (2006), 3397–3415.

[5] N. Abramson, *Development of the ALOHANET*, IEEE Trans. Inf. Theory, **31** (1985), 119–123. Zbl 0563.94001

[6] G. Fayolle, E. Gelenbe, J. Labetoulle, *Stability and optimal control of the packet switching broadcast channel*, J. Assoc. Comput. Mach., **24**:3 (1977), 375–386. Zbl 0364.94004

[7] F.P. Kelly, I.M. McPhee, *The number of packets transmitted by collision detect random access schemes*, Ann. Probab., **15**:4 (1987), 1557–1568. Zbl 0628.60110

[8] N. Vvedenskaya, Yu. Suhov, *Multi-access system with many users: Stability and metastability*, Probl. Inf. Transm., **43**:3 (2007), 263–269. Zbl 1136.68342

[9] D. Kim, A. Turlikov, S. Foss, *Random multiple access with common energy harvesting mechanism*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **11** (2014), 896–905. Zbl 1329.60312

[10] S.G. Foss, D.E. Denisov, *On transience conditions for Markov chains*, Sib. Math. J., **42**:2 (2001), 364–371. Zbl 1074.60505

[11] S. Foss, T. Konstantopoulos, *An overview of some stochastic stability methods*, J. Oper. Res. Soc. Japan, **47**:4 (2004), 275–303. Zbl 1134.93412

[12] D. Denisov, *Markov chains and random walks with heavy-tailed increments*, PhD thesis, Heriot-Watt University, Edinburgh, 2004.

Alexandr Vadimovich Rezler
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: `rezlers123@gmail.com`

Mikhail Georgievich Chebunin
Karlsruhe Institute of Technology,
Institute of Stochastics,
Karlsruhe, 76131, Germany
Novosibirsk State University,
2, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: `chebuninmikhail@gmail.com`