

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯSiberian Electronic Mathematical Reports
<http://semr.math.nsc.ru>

Том 18, №2, стр. 1720–1734 (2021)
DOI 10.33048/semi.2021.18.132УДК 517.5
MSC 26E99ПРИНЦИП ДЛИНЫ И ПЛОЩАДИ ДЛЯ ФУНКЦИИ НА
АБСТРАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ НАД ОБЛАСТЬЮ ГРУППЫ
КАРНО

М.В. ТРЯМКИН

ABSTRACT. Given a domain of a Carnot group, we say that an abstract surface is defined over this domain if the volume element is induced by some weight function, while the usual vector norm in the horizontal vector bundle is replaced by a more general analog of this norm. Suppose that a continuous function f from a weighted Sobolev space and a smooth function φ are defined in a domain of a Carnot group. Assume also that an abstract surface is defined over the domain. In the paper we prove a version of the Lebesgue–Courant lemma (the length and area principle) for the function f in terms of the moduli of families of horizontal curves lying on the level sets of the function φ .

Keywords: abstract surface, Carnot group, horizontal curve, modulus of a curve family, Makenhaupt weight, weighted Sobolev space.

1. ВВЕДЕНИЕ

Класс отображений с ограниченным интегралом Дирихле естественно возникает при работе с уравнениями в частных производных, например, с уравнением минимальной поверхности. Этот же класс неизбежно появляется в квазиконформном анализе. Главное свойство отображений из упомянутого класса заключается в возможности оценить их колебание через интеграл Дирихле. Курант использовал такую оценку для изучения задачи Плато [1]. В наши

ТРЯМКИН, М.В., THE LENGTH AND AREA PRINCIPLE FOR A FUNCTION ON AN ABSTRACT SURFACE OVER A DOMAIN OF A CARNOT GROUP.

© 2021 Трямкин М.В.

Работа выполнена при поддержке Математического Центра в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

Поступила 26 октября 2021 г., опубликована 29 декабря 2021 г.

дни соответствующее утверждение называется леммой Куранта—Лебега. Приведём её современное звучание в соответствии с [2, лемма 8.3.5]. Пусть функция $f: B \rightarrow \mathbb{R}$, заданная в круге $B = \{x \in \mathbb{R}^2: |x| < 1\}$, принадлежит пространству Соболева $W^{1,2}(B)$, причём

$$\int_B |\nabla f(x)|^2 dx \leq K.$$

Зафиксируем произвольно $x_0 \in B$ и $\delta \in (0, 1)$. Тогда найдётся $r \in (\delta, \sqrt{\delta})$ такое, что

$$|f(x_1) - f(x_2)|^2 \leq \frac{4\pi K}{\ln(1/\delta)},$$

каковы бы ни были точки $x_1, x_2 \in B$, для которых $|x_1 - x_0| < r$ и $|x_2 - x_0| < r$. Суть выписанного только что утверждения такова: в плоском случае функция с ограниченным интегралом Дирихле имеет логарифмический модуль непрерывности.

Что же касается варианта леммы Куранта—Лебега для отображений, то во введении к своей монографии [3] Г. Д. Суворов, ссылаясь на Вольфа, сообщает следующий результат: для конформного отображения $f: B \rightarrow f(B)$ справедливо неравенство

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{\text{Length}^2(f(\Gamma_r))}{r} dr \leq 4\pi \text{Area}(f(B)),$$

где $\Gamma_r = C_r \cap B$, а $\{C_r: r \in (r_1, r_2)\}$ — произвольное семейство концентрических окружностей C_r переменного радиуса r . Г. Д. Суворов называет это предложение «принципом длины и площади». С его помощью в монографии [3] исследуются гомеоморфизмы областей n -мерного евклидова пространства, имеющие суммируемые обобщённые производные; при этом сам принцип принимает различные формы в зависимости от решаемой задачи. Примером тому служит фрагмент теоремы в [3, гл. XIV, § 1]. Пусть на области $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, задан гомеоморфизм $f = (f_1, \dots, f_n): D \rightarrow f(D)$, имеющий обобщённые производные. Тогда для любого семейства Γ кривых в D выполняется соотношение

$$(1) \quad \left(\inf_{\gamma \in \Gamma} \text{Length}(f(\gamma)) \right)^n \text{mod}_n(\Gamma) \leq \int_{D_\Gamma} \left(\sum_{i=1}^n |\nabla f_i|^2 \right)^{n/2} dx,$$

где D_Γ — любая подобласть в D , содержащая Γ , а $\text{mod}_n(\Gamma)$ — конформный модуль семейства Γ .

Это соотношение представляет для нас особый интерес. В. М. Миклюков — самый известный из учеников Г. Д. Суворова — предложил многочисленные обобщения неравенства (1) как в евклидовых пространствах, так и на римановых многообразиях (см. [4], [5], [6], [7]). Он применял различные варианты принципа длины и площади к изучению уравнений в частных производных. В этом отношении одним из ярких образцов служит статья [8] в сборнике, посвящённом 80-летию Б. В. Шабата. Авторы статьи Мартио, Миклюков и Вурунен доказывают неравенство Гарнака

$$\sup\{f(x): x \in B(a, R)\} \leq \theta \inf\{f(x): x \in B(a, R)\}$$

для положительных h -монотонных решений уравнения $\operatorname{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f) = 0$ на римановом n -мерном многообразии \mathcal{X} (постоянная $\theta \geq 1$ не зависит от f , R и a); здесь $p > n - 1$, а функция $h: \mathcal{X} \rightarrow [0, \infty)$ такова, что некоторый набор $\{B_h(t_k): k \in \mathbb{N}\}$ h -шаров $B_h(t_k) = \{x \in \mathcal{X}: h(x) < t_k\}$ исчерпывает многообразие \mathcal{X} . Ключевую роль в рассуждениях играет принцип длины и площади, обобщающий неравенство (1) на случай римановых многообразий, при этом число θ выражается в терминах модулей семейств дуг, лежащих на поверхностях уровня функции h , и тем самым оно отражает геометрию многообразия \mathcal{X} относительно функции исчерпания h .

Цель настоящей статьи — сформулировать и доказать принцип длины и площади, напоминающий неравенство (1), для непрерывных соболевских функций, заданных на областях групп Карно. Эти группы представляют важный класс субримановых многообразий. Дополнительно будем предполагать, что над областью задана абстрактная поверхность (термин, введённый В. М. Миклюковым)¹: иными словами, интеграл по области берётся с весом, а скалярное произведение в горизонтальном касательном расслоении заменяется на функцию, удовлетворяющую ряду естественных требований. Кроме того, определим на области гладкую функцию, — в таком случае область «расслаивается» на совокупность множеств уровня этой функции. Тогда принцип удаётся сформулировать на языке модулей семейств горизонтальных кривых, лежащих на поверхностях уровня данной гладкой функции.

Далее мы обстоятельно излагаем предварительные сведения, после чего переходим к детальному доказательству теоремы 1, содержанием которой и является искомая версия принципа длины и площади.

Группы Карно. *Стратифицированной однородной группой* [13] или, в другой терминологии, *группой Карно* [14] называется связная односвязная нильпотентная группа Ли \mathbb{G} , алгебра Ли \mathfrak{g} которой допускает представление $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$, причём

$$(2) \quad \dim \mathfrak{g}_1 \geq 2, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_k] = \mathfrak{g}_{k+1} \text{ для } 1 \leq k \leq m-1, \quad [\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{\mathbf{0}\}.$$

Пусть $n = \dim \mathfrak{g}_1$ и левоинвариантные векторные поля X_1, \dots, X_n образуют базис пространства \mathfrak{g}_1 . Тогда в касательном расслоении $T\mathbb{G}$ возникает подрасслоение $H\mathbb{G}$ со слоями

$$(3) \quad H_{\mathbf{x}}\mathbb{G} = \operatorname{span}\{X_1(\mathbf{x}), \dots, X_n(\mathbf{x})\}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{G}.$$

Говорят, что $H\mathbb{G}$ — это *горизонтальное касательное расслоение* группы \mathbb{G} , а $H_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$ — *горизонтальное касательное пространство* в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$. Поля X_1, \dots, X_n называются *горизонтальными*. Из соотношений (2) вытекает, что горизонтальные векторные поля порождают всю алгебру \mathfrak{g} . Это значит, что в качестве базиса пространства \mathfrak{g} можно взять систему векторных полей

$$X_1, \dots, X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+\dim \mathfrak{g}_2}, \dots, X_N,$$

где для каждого натурального числа j такого, что

$$\dim \mathfrak{g}_1 + \dots + \dim \mathfrak{g}_i < j \leq \dim \mathfrak{g}_1 + \dots + \dim \mathfrak{g}_i + \dim \mathfrak{g}_{i+1}, \quad 1 \leq i \leq m-1,$$

векторное поле X_j есть коммутатор

$$[\dots [[X_{k_1}, X_{k_2}], X_{k_3}], \dots, X_{k_i}]$$

¹В работах [9], [10], [11] и [12] автор настоящей статьи изучал свойства модулей семейств кривых на абстрактных поверхностях в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n .

некоторых горизонтальных векторных полей X_{k_1}, \dots, X_{k_i} . Разумеется,

$$N = \dim \mathfrak{g}_1 + \dots + \dim \mathfrak{g}_m.$$

Определим отображение $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{G}$ равенством $\exp(X) = \gamma(1)$, в котором $\gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{G}$ служит решением задачи Коши $\frac{d}{dt}\gamma(t) = X(\gamma(t))$, $\gamma(0) = \mathbf{e}$, где \mathbf{e} — единица группы \mathbb{G} . Известно (см., например, [13, предложение 1.2]), что это отображение, называемое *экспоненциальным*, есть диффеоморфизм между группой Карно и её алгеброй Ли. Следовательно, каждому элементу $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$ отвечает точка $(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$, для которой $\mathbf{x} = \exp(x_1 X_1 + \dots + x_N X_N)$. Поэтому в дальнейшем мы используем запись $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$. Например, единица \mathbf{e} группы \mathbb{G} отождествляется с точкой $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^N$, а вместо \mathbf{e} пишется $\mathbf{0}$.

Зададим на \mathbb{G} однопараметрическое семейство $\{\delta_t: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}\}_{t>0}$ *однородных растяжений*, полагая для $\mathbf{x} = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_m) \in \mathbb{G}$

$$\delta_t(\mathbf{x}) = (t\bar{x}_1, t^2\bar{x}_2, \dots, t^m\bar{x}_m),$$

где $\bar{x}_1 = (x_1, \dots, x_n)$, $\bar{x}_2 = (x_{n+1}, \dots, x_{n+\dim \mathfrak{g}_2})$, а для $3 \leq i \leq m$

$$\bar{x}_i = (x_{n+\sum_{k=2}^{i-1} \dim \mathfrak{g}_k+1}, \dots, x_{n+\sum_{k=2}^i \dim \mathfrak{g}_k}).$$

Можно показать (см. [15, теорема 2.2.18]), что если векторное поле X лежит в подпространстве \mathfrak{g}_i , то для каждой бесконечно гладкой функции $\varphi: \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ при всех $t > 0$ и $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$ справедливо равенство

$$(4) \quad X(\varphi \circ \delta_t)(\mathbf{x}) = t^i ((X\varphi) \circ \delta_t)(\mathbf{x}).$$

Под *однородной нормой* на группе Карно \mathbb{G} понимается непрерывная функция $|\cdot|: \mathbb{G} \rightarrow [0, \infty)$ класса C^∞ на $\mathbb{G} \setminus \{\mathbf{0}\}$, обладающая свойствами: 1) $|\mathbf{x}| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{x} = \mathbf{0}$; 2) $|\mathbf{x}| = |\mathbf{x}^{-1}|$ и $|\delta_t(\mathbf{x})| = t|\mathbf{x}|$; 3) существует постоянная $C > 0$ такая, что $|\mathbf{x}\mathbf{y}| \leq C(|\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|)$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{G}$. Естественно, что однородная норма не единственна, но любые две однородные нормы эквивалентны: если $|\cdot|_1$ и $|\cdot|_2$ — две однородные нормы, то существуют постоянные C_1 и C_2 такие, что $0 < C_1 \leq |\mathbf{x}|_1/|\mathbf{x}|_2 \leq C_2 < \infty$ при всяком $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Мы выберем однородную норму, задаваемую формулой

$$|\mathbf{x}| = \left(\sum_{i=1}^m \|\bar{x}_i\|^{\frac{2m!}{i}} \right)^{\frac{1}{2m!}}, \quad \text{где } \|\bar{x}_i\| \text{ — евклидова норма вектора } \bar{x}_i \text{ в } \mathbb{R}^{\dim \mathfrak{g}_i}.$$

Между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{G}$ определим *однородное расстояние* $d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, полагая $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = |\mathbf{x}^{-1}\mathbf{y}|$. Для $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$ и $r > 0$ пусть $B(\mathbf{x}, r) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{G}: d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) < r\}$. Совокупность открытых шаров $\{B(\mathbf{x}, r)\}_{r>0}$ образует фундаментальную систему окрестностей точки \mathbf{x} , и тем самым на \mathbb{G} появляется топология. Эта топология совпадает со стандартной евклидовой топологией на группе \mathbb{G} , если рассматривать эту группу как \mathbb{R}^N .

Напомним, что нетривиальная борелевская мера μ на локально компактной группе Ли \mathbb{G} называется *левоинвариантной* (соответственно *правоинвариантной*) *мерой Хаара*, если $\mu(\mathbf{x}E) = \mu(E)$ (соответственно $\mu(E\mathbf{x}) = \mu(E)$), каковы бы ни были $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$ и борелевское множество $E \subset \mathbb{G}$. Для данной группы \mathbb{G} существует левоинвариантная (правоинвариантная) мера Хаара, единственная с точностью до постоянного множителя (см. [16, гл. VII, § 1, п. 2, теорема 1]). Это значит, что класс множеств меры нуль не зависит от выбора конкретной меры. Если \mathbb{G} — группа Карно, то можно было бы, например, положить

$\mu(E) = \mathcal{L}^N(\exp^{-1}(E))$, где \mathcal{L}^N — мера Лебега в \mathbb{R}^N . Тем не менее мы уточним выбор. Отметим сначала, что шар $B(\mathbf{x}, r)$ получается левым сдвигом шара $B(\mathbf{0}, r)$ на элемент \mathbf{x} . В свою очередь, $B(\mathbf{0}, r) = \delta_r(B(\mathbf{0}, 1))$. Якобиан преобразования δ_r легко вычисляется: он равен r^Q , где

$$Q = \sum_{i=1}^m i \dim \mathfrak{g}_i.$$

Таким образом, если относительно однородного расстояния d определить меру Хаусдорфа \mathcal{H}^Q , то эта мера будет бинвариантной мерой Хаара² на \mathbb{G} . Число Q называется *однородной* размерностью группы \mathbb{G} (в отличие от числа N , которое называется *топологической* размерностью). Выполним нормировку так, что $\mathcal{H}^Q(B(\mathbf{0}, 1)) = 1$.

Введём левоинвариантную риманову метрику в горизонтальном расслоении $H\mathbb{G}$. Сначала наделим векторное пространство $H_0\mathbb{G}$ скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$, относительно которого горизонтальные векторные поля ортонормальны, т. е. $\langle X_i(\mathbf{0}), X_j(\mathbf{0}) \rangle_0 = \delta_{ij}$, $i, j = 1, \dots, n$. Затем «разнесём» полученное скалярное произведение по всей группе с помощью левого сдвига. С этой целью фиксируем $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$ и пусть $l_{\mathbf{x}}: \mathbb{G} \ni \mathbf{y} \mapsto \mathbf{x}\mathbf{y}$ — левый сдвиг на элемент \mathbf{x} , а $(l_{\mathbf{x}})_*: T_0\mathbb{G} \rightarrow T_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$ — дифференциал отображения $l_{\mathbf{x}}$ в единице группы. Так как $X_i(\mathbf{x}) = (l_{\mathbf{x}})_*(\mathbf{0})(X_i(\mathbf{0}))$, то в горизонтальном расслоении $H\mathbb{G}$ левоинвариантная риманова метрика будет задана, если скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbf{x}}$ в пространстве $H_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$ вычисляется так:

$$\langle X_i(\mathbf{x}), X_j(\mathbf{x}) \rangle_{\mathbf{x}} = \langle X_i(\mathbf{0}), X_j(\mathbf{0}) \rangle_0 = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Кривые. Под *кривой* в группе Карно \mathbb{G} будем понимать непрерывное отображение γ отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в группу \mathbb{G} . Кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{G}$, абсолютно непрерывная относительно евклидовой метрики, называется *горизонтальной*, если

$$\frac{d}{dt}\gamma(t) \in H_{\gamma(t)}\mathbb{G} \text{ для почти всех } t \in [a, b].$$

Длина $\ell(\gamma)$ горизонтальной кривой определяется формулой

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n \left\langle \frac{d}{dt}\gamma(t), X_i(\gamma(t)) \right\rangle_{\gamma(t)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt.$$

Соотношения (2) позволяют применить теорему Рашевского—Чоу ([17], [18]) и сделать вывод о том, что любые две точки в группе Карно можно соединить горизонтальной кривой. *Расстояние Карно—Каратеодори* $d_c(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ между точками $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{G}$ задаётся следующим образом:

$$d_c(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \inf\{\ell(\gamma): \gamma \text{ — горизонтальная кривая, соединяющая } \mathbf{x} \text{ и } \mathbf{y}\}.$$

Однородное расстояние d не является метрикой, так как для него не выполняется «обычное» неравенство треугольника. Что касается расстояния Карно—Каратеодори d_c , то оно подчиняется всем аксиомам метрики. Однако величина d проще вычисляется и к тому же она эквивалентна метрике d_c .

²Мера Хаара называется *бинвариантной*, если она одновременно левоинвариантная и правоинвариантная.

Говорят, что кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{G}$ *спрямляема* (в метрике d_c), если конечна величина

$$(5) \quad \sup \sum_{i=1}^k d_c(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})),$$

где точная верхняя граница берётся по всем наборам $a = t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_k \leq t_{k+1} = b$. В работе [14] установлено, что кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{G}$ абсолютно непрерывна относительно метрики d_c в том и только в том случае, если она горизонтальна; при этом числа $\ell(\gamma)$ и (5) совпадают. Именно поэтому ниже при определении модуля семейства кривых мы ограничиваемся горизонтальными кривыми.

Пространства Соболева. Пусть на открытом множестве $D \subset \mathbb{G}$ группы Карно \mathbb{G} задана функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. Локально суммируемая функция $g_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ называется *обобщённой производной* функции f вдоль векторного поля X_i , $i = 1, \dots, n$, если

$$\int_D g_i(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}) = \int_D f(\mathbf{x}) X_i^* \varphi(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x})$$

для любой функции $\varphi \in C_0^\infty(D)$. Здесь под X_i^* понимается дифференциальный оператор, формально сопряжённый к оператору X . Последнее означает следующее: если в некоторой системе координат векторное поле X_i имеет вид

$$X_i(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N a_{ij}(\mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x_j}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{G},$$

то оператор X_i^* действует на функцию φ по правилу

$$X_i^* \varphi(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_j} (a_{ij}(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x})), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{G}.$$

Из свойства (4) следует (см. [15, предложение 1.3.8]), что на группе Карно $X_i^* = -X_i$. Далее вместо g_i используем обозначение $X_i f$.

Локально суммируемую функцию $\omega: D \rightarrow [0, \infty]$ такую, что $0 < \omega(\mathbf{x}) < \infty$ при \mathcal{H}^Q -почти всех $\mathbf{x} \in D$, будем называть *весом*.

Говорят, что вес ω принадлежит *классу Макенхаупта* A_p , $1 < p < \infty$, если

$$\sup \left(\frac{1}{\mathcal{H}^Q(B)} \int_B \omega(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}) \right) \left(\frac{1}{\mathcal{H}^Q(B)} \int_B \omega^{1/(1-p)}(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}) \right)^{p-1} < \infty,$$

где точная верхняя граница берётся по всем шарам $B \subset \mathbb{G}$. Подробное обсуждение класса A_p можно найти в [19].

Весовое пространство Лебега $L^p(D; \omega)$, $1 \leq p < \infty$, состоит из всех измеримых функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{L^p(D; \omega)} = \left(\int_D |f(\mathbf{x})|^p \omega(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}) \right)^{1/p}.$$

Весовое пространство Соболева $W^{1,p}(D;\omega)$, $1 \leq p < \infty$, состоит из всех локально суммируемых функций $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, для которых конечна величина

$$\|f\|_{W^{1,p}(D;\omega)} = \|f\|_{L^p(D;\omega)} + \|\nabla_0 f\|_{L^p(D;\omega)},$$

где $\nabla_0 f = (X_1 f, \dots, X_n f)$ — обобщённый горизонтальный градиент функции f и $|\nabla_0 f|^2 = (X_1 f)^2 + \dots + (X_n f)^2$.

Следующее утверждение в случае $\omega \equiv 1$ доказано в статье [20]. Повторяя с очевидными модификациями рассуждения из работы [21], получим его доказательство для случая $\omega \in A_p$.

Предложение 1. Пусть \mathbb{G} — группа Карно и на открытом множестве $D \subset \mathbb{G}$ задан вес ω . Предположим, что $\omega \in A_p$, $1 < p < \infty$. Тогда множество функций $C^\infty(D) \cap W^{1,p}(D;\omega)$ плотно в пространстве Соболева $W^{1,p}(D;\omega)$.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Напомним, что касательное расслоение к группе Карно \mathbb{G} , обозначаемое $T\mathbb{G}$, есть дизъюнктное объединение касательных пространств в каждой точке: $T\mathbb{G} = \bigsqcup_{\mathbf{x} \in \mathbb{G}} T_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$. Элемент такого объединения обычно записывается в виде упорядоченной пары (\mathbf{x}, v) , в которой $\mathbf{x} \in \mathbb{G}$ и $v \in T_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$. Попутно вводится каноническая проекция $\pi: T\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ по правилу $\pi(\mathbf{x}, v) = \mathbf{x}$. Поскольку группа \mathbb{G} имеет структуру гладкого многообразия топологической размерности N , то касательное расслоение $T\mathbb{G}$ известным образом снабжается структурой гладкого $2N$ -мерного многообразия, причём отображение $\pi: T\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$ оказывается гладким (см. [22, предложение 3.18]).

Пусть в группе Карно \mathbb{G} задана область D . Положим

$$HD = \pi^{-1}(D) \cap H\mathbb{G},$$

где $H\mathbb{G}$ — горизонтальное касательное расслоение со слоями (3). Наделим HD топологией, индуцированной топологией многообразия $T\mathbb{G}$. Допустим, что определена непрерывная функция $\mathcal{H}: HD \rightarrow \mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

- $\mathcal{H}(\mathbf{x}, v) \geq 0$ при всех $\mathbf{x} \in D$ и $v \in H_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$;
- при любом $\mathbf{x} \in D$, если $\mathcal{H}(\mathbf{x}, v) = 0$, то $v = 0$;
- в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ множество $\Xi(\mathbf{x}) = \{v \in H_{\mathbf{x}}\mathbb{G} : \mathcal{H}(\mathbf{x}, v) < 1\}$ является выпуклым³;
- в каждой точке $\mathbf{x} \in D$ выполняется равенство $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \alpha v) = |\alpha| \mathcal{H}(\mathbf{x}, v)$, каковы бы ни были $\alpha \in \mathbb{R}$ и $v \in H_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$.

Если на области D задан вдобавок вес w , то тройку (D, \mathcal{H}, w) будем называть абстрактной поверхностью над D .

Двойственная к \mathcal{H} функция $\mathcal{G}: HD \rightarrow \mathbb{R}$ определяется равенством

$$(6) \quad \mathcal{G}(\mathbf{x}, v) = \sup\{\langle v, v' \rangle_{\mathbf{x}} : v' \in \Xi(\mathbf{x})\}.$$

Свойства а)–д) остаются в силе, если исправить их формулировки, заменив \mathcal{H} на \mathcal{G} .

³Свойство с) обеспечивает выполнение неравенства треугольника для функции $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \cdot): H_{\mathbf{x}}\mathbb{G} \rightarrow \mathbb{R}$ при любом $\mathbf{x} \in D$, т. е. $\mathcal{H}(\mathbf{x}, v + \tilde{v}) \leq \mathcal{H}(\mathbf{x}, v) + \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{v})$ для всех $v, \tilde{v} \in H_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$.

Предложение 2. В любой точке $\mathbf{x} \in D$ справедлив аналог неравенства Коши–Буняковского:

$$(7) \quad |\langle v, \tilde{v} \rangle_{\mathbf{x}}| \leq \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{v}) \mathcal{G}(\mathbf{x}, v)$$

для всех $v \in H_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$ и $\tilde{v} \in H_{\mathbf{x}}\mathbb{G}$.

Доказательство. Если вектор \tilde{v} таков, что $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{v}) = 0$, то в силу пункта b) имеем $\tilde{v} = 0$, — в этом случае неравенство (7) выполняется.

Пусть $\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{v}) \neq 0$. Зададим произвольно $\varepsilon > 0$. Положим

$$v' = \frac{\tilde{v}}{(1 + \varepsilon)\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{v})}.$$

Из пункта d) вытекает, что $v' \in \Xi(\mathbf{x})$. Используя (6), получаем

$$\langle v, \tilde{v} \rangle_{\mathbf{x}} \leq (1 + \varepsilon)\mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{v})\mathcal{G}(\mathbf{x}, v).$$

Устремляя ε к нулю, заключаем, что $\langle v, \tilde{v} \rangle_{\mathbf{x}} \leq \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{v})\mathcal{G}(\mathbf{x}, v)$. Неравенство (7) будет доказано, если применить полученный результат и вспомнить пункт d):

$$-\langle v, \tilde{v} \rangle_{\mathbf{x}} = \langle v, -\tilde{v} \rangle_{\mathbf{x}} \leq \mathcal{H}(\mathbf{x}, -\tilde{v})\mathcal{G}(\mathbf{x}, v) = \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tilde{v})\mathcal{G}(\mathbf{x}, v).$$

□

Чтобы сформулировать главную теорему статьи, опишем ещё несколько величин. Предположим, что в области D группы Карно \mathbb{G} задано множество M , которое является счётно $(\mathcal{H}^{Q-1}, Q - 1)$ -спрямляемым⁴. Совокупность его компонент связности обозначим через $\mathcal{C}[M]$. Зафиксируем $M \in \mathcal{C}[M]$. Для произвольной пары точек $\mathbf{a} \in M$ и $\mathbf{b} \in M$ символом $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначим семейство всех горизонтальных кривых, соединяющих точки \mathbf{a} и \mathbf{b} и проходящих в множестве M . Пусть $1 \leq p < \infty$. Если над областью D задана абстрактная поверхность (D, \mathcal{H}, w) , то *модулем* этого семейства назовём число

$$(8) \quad \text{mod}_p(\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}); M, \mathcal{H}, w) = \inf \frac{\int_M \rho^p(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x})}{\left(\inf_{\gamma \in \Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \int_{\gamma} \rho(\mathbf{x}) ds_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) \right)^p},$$

где точная нижняя граница берётся по всем борелевским функциям $\rho: M \rightarrow [0, \infty]$. В знаменателе интегрирование выполняется относительно «элемента длины $ds_{\mathcal{H}}$ ». Поясним, в чём точный смысл этой фразы. Если $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{G}$ — горизонтальная кривая, то полагаем

$$\int_{\gamma} \rho(\mathbf{x}) ds_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}) = \int_a^b \rho(\gamma(t)) \mathcal{H} \left(\gamma(t), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right) dt,$$

⁴Пусть дано метрическое пространство X и натуральное число t . Множество $E \subset X$ называется *t-спрямляемым*, если существует липшицева вектор-функция, отображающая некоторое ограниченное подмножество пространства \mathbb{R}^m на E . Далее, множество E называется *счётно t-спрямляемым*, если E есть объединение некоторого счётного семейства, элементы которого *t-спрямляемы*. Наконец, множество E называется *счётно (μ, t) -спрямляемым*, если μ — мера на X и существует счётно *t-спрямляемое* множество, содержащее μ -почти все точки множества E .

где справа стоит обычный интеграл Лебега. Такое определение корректно, поскольку в силу свойства d) функции \mathcal{H} этот интеграл не зависит от параметризации кривой γ . Введём также следующую величину:

$$\mathcal{K}_p(\mathcal{M}; \mathcal{H}, w) = \inf_{M \in \mathcal{C}[\mathcal{M}]} \inf_{\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M} \text{mod}_p(\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}); M, \mathcal{H}, w).$$

Большое значение в обосновании предстоящей теоремы будет иметь *формула площади для горизонтального градиента* (см. [23, раздел 4.7]): равенство

$$(9) \quad \int_D u(\mathbf{x}) |\nabla_0 \varphi(\mathbf{x})| d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{\varphi^{-1}(t)} u(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x}) dt$$

выполняется для всех функций $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ класса C^∞ и всех измеримых функций $u: D \rightarrow [0, \infty]$, где D — область в группе Карно \mathbb{G} .

Для гладкой функции $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$Z = \{\mathbf{x} \in D: \nabla \varphi(\mathbf{x}) = 0\},$$

где $\nabla \varphi = (X_1 \varphi)X_1 + \dots + (X_N \varphi)X_N$ — «полный» градиент функции φ . Совокупностью *характеристических точек* функции φ назовём множество

$$\chi = \{\mathbf{x} \in D \setminus Z: \nabla_0 \varphi(\mathbf{x}) = 0\}.$$

Теорема 1. Пусть над областью D группы Карно \mathbb{G} задана абстрактная поверхность (D, \mathcal{H}, ω) и пусть $1 < p < \infty$. Предположим, что вес $\omega: D \rightarrow [0, \infty]$ лежит в классе Макензаунта A_p , а функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$ — в классе C^∞ , причём

$$(10) \quad \mathcal{H}^Q(\chi) = 0.$$

Допустим, что непрерывная функция $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ принадлежит весовому пространству Соболева $W^{1,p}(D; \omega)$. Помимо этого, пусть функция \mathcal{G} , двойственная к функции \mathcal{H} , обладает таким свойством: $\mathcal{G}(\cdot, \nabla_0 f(\cdot)) \in L^p(D; \omega)$ и для всякой последовательности функций $f_\nu \in C^\infty(D) \cap W^{1,p}(D; \omega)$, сходящейся в $W^{1,p}(D; \omega)$ к функции f , при каждом $\nu \in \mathbb{N}$ выполняется включение $\mathcal{G}(\cdot, \nabla_0 f_\nu(\cdot)) \in L^p(D; \omega)$, а также имеет место равенство

$$(11) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \|\mathcal{G}(\cdot, \nabla_0 f(\cdot)) - \mathcal{G}(\cdot, \nabla_0 f_\nu(\cdot))\|_{L^p(D; \omega)} = 0.$$

Тогда при любых $t_1 \in \varphi(D)$ и $t_2 \in \varphi(D)$ таких, что $t_1 < t_2$, справедливо соотношение

$$(12) \quad \int_{t_1}^{t_2} \Omega^p(t, f) \mathcal{K}_p(t) dt \leq \int_{D(t_1, t_2)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}).$$

Здесь используются следующие обозначения:

$$D(t_1, t_2) = \{\mathbf{x} \in D: t_1 < \varphi(\mathbf{x}) < t_2\},$$

$$\mathcal{K}_p(t) = \mathcal{K}_p(\varphi^{-1}(t); \mathcal{H}, w), \quad \text{где } w = \frac{\omega}{|\nabla_0 \varphi|},$$

$$\Omega(t, f) = \sup \{\text{osc}(f, M): M \in \mathcal{C}[\varphi^{-1}(t)]\},$$

где $\text{osc}(f, M) = \sup\{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})|: \mathbf{x} \in M, \mathbf{y} \in M\}$.

Доказательство. ШАГ 1. Прежде всего обсудим вкратце множество $\varphi^{-1}(t)$. Разумеется, оно не пусто и замкнуто при каждом $t \in \varphi(D)$.

По теореме Сарда имеем $\mathcal{L}^1(\varphi(Z)) = 0$, где символ \mathcal{L}^1 обозначает меру Лебега на \mathbb{R} . Следовательно, для \mathcal{L}^1 -почти всех $t \in \varphi(D)$ множество $\varphi^{-1}(t)$ является гладким многообразием топологической размерности $N - 1$. Кроме того, оно имеет хаусдорфову размерность $Q - 1$ относительно однородного расстояния d (см. [23, предложение 4.9]).

Уточним, насколько массивным может быть множество характеристических точек, попадающих на гиперповерхность $\varphi^{-1}(t)$. Функция $\varphi: D \rightarrow \mathbb{R}$, будучи гладкой, является локально липшицевой относительно однородного расстояния d на \mathbb{G} и обычной метрики на \mathbb{R} . Поскольку выполняется условие (10), то согласно [24, теорема 2.10.25] на каждой подобласти $D' \Subset D$ при почти всех $t \in \varphi(D') \setminus \varphi(Z)$ имеем⁵

$$\mathcal{H}^{Q-1}(\chi \cap \varphi^{-1}(t)) = 0.$$

Исчерпывая D счётным набором подобластей и пользуясь счётной аддитивностью меры, получаем, что $\mathcal{H}^{Q-1}(\chi \cap \varphi^{-1}(t)) = 0$ для почти всех $t \in \varphi(D) \setminus \varphi(Z)$. Обозначим через Σ_1 совокупность тех точек t , для которых последнее равенство нарушается. Тогда

$$(13) \quad \mathcal{H}^{Q-1}(\chi \cap \varphi^{-1}(t)) = 0 \text{ для всех } t \in \varphi(D) \setminus (\varphi(Z) \cup \Sigma_1), \text{ где } \mathcal{L}^1(\Sigma_1) = 0.$$

ШАГ 2. Здесь мы выпишем одно неравенство, которое найдёт применение на шаге 3. Пусть заданы гладкая функция $u: D \rightarrow \mathbb{R}$ и горизонтальная кривая $\gamma: [a, b] \rightarrow D$. Тогда

$$(14) \quad |u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))| \leq \int_{\gamma} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \nabla_0 u(\mathbf{x})) ds_{\mathcal{H}^1(\mathbf{x})}.$$

В самом деле, кривая γ горизонтальна и, значит, для почти всех $t \in [a, b]$ имеем

$$(15) \quad \frac{d}{dt} \gamma(t) = \alpha_1(\gamma(t))X_1(\gamma(t)) + \dots + \alpha_n(\gamma(t))X_n(\gamma(t)).$$

Напомним, что если кривая β — интегральная линия векторного поля X , то

$$Xu(\beta(t)) = \frac{d}{dt}(u \circ \beta)(t).$$

Ввиду (15) наша кривая γ служит интегральной линией векторного поля

$$X = \alpha_1 X_1 + \dots + \alpha_n X_n$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t) &= \alpha_1(\gamma(t))X_1 u(\gamma(t)) + \dots + \alpha_n(\gamma(t))X_n u(\gamma(t)) = \\ &= \left\langle \nabla_0 u(\gamma(t)), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle_{\gamma(t)}. \end{aligned}$$

⁵Запись $D' \Subset D$ означает, что область D' ограничена, а её замыкание лежит в D .

Пользуясь гладкостью функции u и обращаясь к неравенству (7), выводим:

$$\begin{aligned} |u(\gamma(b)) - u(\gamma(a))| &= \left| \int_a^b \frac{d}{dt}(u \circ \gamma)(t) dt \right| \leq \int_a^b \left| \left\langle \nabla_0 u(\gamma(t)), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right\rangle_{\gamma(t)} \right| dt \leq \\ &\leq \int_a^b \mathcal{G}(\gamma(t), \nabla_0 u(\gamma(t))) \mathcal{H} \left(\gamma(t), \frac{d}{dt} \gamma(t) \right) dt = \int_{\gamma} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \nabla_0 u(\mathbf{x})) ds_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

ШАГ 3. Покажем, что неравенство (12) выполняется для гладких функций. Иными словами, на этом шаге мы предполагаем, что $f \in C^\infty(D) \cap W^{1,p}(D; \omega)$.

Условие (10) и равенство (13) позволяют следующим образом воспользоваться формулой коплощади (9):

$$\begin{aligned} (16) \quad \int_{D(t_1, t_2)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}) &= \\ &= \int_{D(t_1, t_2)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) |\nabla_0 \varphi(\mathbf{x})| d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \int_{\varphi^{-1}(t)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x}) dt. \end{aligned}$$

Зададим $t \in (t_1, t_2) \setminus (\varphi(Z) \cup \Sigma_1)$ и поверхность $M \in \mathcal{C}[\varphi^{-1}(t)]$. Для произвольных точек $\mathbf{a} \in M$ и $\mathbf{b} \in M$ через $\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ обозначим семейство горизонтальных кривых, соединяющих эти точки и проходящих в M . Прибегая к неравенству (14), находим

$$|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \leq \inf_{\gamma \in \Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b})} \int_{\gamma} \mathcal{G}(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) ds_{\mathcal{H}}(\mathbf{x}).$$

Следовательно, если в (8) положить $\rho(\mathbf{x}) = \mathcal{G}(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x}))$, то получим

$$\begin{aligned} |f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \text{mod}_p(\Gamma(\mathbf{a}, \mathbf{b}); M, \mathcal{H}, w) &\leq \int_M \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x}) \leq \\ &\leq \int_{\varphi^{-1}(t)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x}), \end{aligned}$$

откуда согласно определению величины $\mathcal{K}_p(t)$ имеем

$$|f(\mathbf{b}) - f(\mathbf{a})| \mathcal{K}_p(t) \leq \int_{\varphi^{-1}(t)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x}).$$

Переходя к точной верхней границе по всевозможным парам точек $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in M$, а затем — по всем компонентам связности $M \in \mathcal{C}[\varphi^{-1}(t)]$, выводим

$$\Omega^p(t, f) \mathcal{K}_p(t) \leq \int_{\varphi^{-1}(t)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) w(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x}).$$

Объединяя этот результат с равенством (16), заключаем, что

$$(17) \quad \int_{t_1}^{t_2} \Omega^p(t, f) \mathcal{K}_p(t) dt \leq \int_{D(t_1, t_2)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}).$$

ШАГ 4. Установим здесь справедливость одного утверждения, к которому мы обратимся на следующем шаге. Пусть множество X наделено метрикой ρ . Снабдим метрическое пространство (X, ρ) регулярной мерой Бореля μ . Допустим ещё, что $0 < \mu(B(x, r)) < \infty$ при любых $x \in X$ и $r \in (0, \infty)$, где $B(x, r) = \{y \in X : \rho(y, x) < r\}$. Пусть $1 \leq p < \infty$. Предположим, что последовательность $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ непрерывных функций $f_\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$ сходится в L^p -норме к непрерывной функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, т. е.

$$(18) \quad \lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_X |f(x) - f_\nu(x)|^p d\mu(x) = 0.$$

Тогда

$$(19) \quad \text{osc}(f, X) \leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \text{osc}(f_\nu, X).$$

Будем рассуждать от противного, т. е. пусть

$$\text{osc}(f, X) > \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \text{osc}(f_\nu, X).$$

В этом случае можно подыскать число s и подпоследовательность $(f_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ с тем свойством, что

$$(20) \quad \text{osc}(f, X) > s > \text{osc}(f_{\nu_k}, X) \text{ при всех } k \in \mathbb{N}.$$

Условие (18) означает, что существует подпоследовательность $(f_{\nu_{k_i}})_{i \in \mathbb{N}}$ такая, что $\lim_{i \rightarrow \infty} f_{\nu_{k_i}}(x) = f(x)$ для каждого $x \in X \setminus E$, где $\mu(E) = 0$. В силу (20) имеем

$$(21) \quad |f_{\nu_{k_i}}(x) - f_{\nu_{k_i}}(y)| < s \text{ при всех } x, y \in X.$$

Зафиксируем произвольно пару точек $x, y \in X$. Если оказалось так, что $x, y \in X \setminus E$, то, переходя в (21) к пределу при $i \rightarrow \infty$, получаем $|f(x) - f(y)| \leq s$. Если же хотя бы одна из точек x, y попала в множество E , то рассуждаем следующим образом. Для определённости пусть $x \in E$ и $y \in X \setminus E$. Подберём последовательность $(x_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X \setminus E$ такую, что $x_j \rightarrow x$ при $j \rightarrow \infty$ ⁶. Поскольку $x_j, y \in X \setminus E$, то, как показано выше, имеем $|f(x_j) - f(y)| \leq s$. Но функция f непрерывна и, значит, $|f(x) - f(y)| \leq s$. Если $x \in E$ и $y \in E$, то нужно не только точку x , но ещё и точку y приблизить точками из $X \setminus E$. Окончательно приходим к выводу, что $|f(x) - f(y)| \leq s$ при всех $x, y \in X$, откуда $\text{osc}(f, X) \leq s$, что противоречит (20).

ШАГ 5. Наконец докажем, что соотношение (12) выполняется для непрерывной функции $f \in W^{1,p}(D; \omega)$. Ввиду предложения 1 найдётся последовательность $(f_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ функций $f_\nu \in C^\infty(D) \cap W^{1,p}(D; \omega)$, приближающих f в

⁶Существование требуемой последовательности $(x_j)_{j \in \mathbb{N}}$ следует из того, что множество $X \setminus E$ всюду плотно. В самом деле, если неверно, что оно всюду плотно, то $B(x, r) \cap (X \setminus E) = \emptyset$ хотя бы для одного шара $B(x, r)$. Значит, $B(x, r) \subset E$, откуда $\mu(B(x, r)) \leq \mu(E) = 0$, что не согласуется с условием $\mu(B(x, r)) > 0$.

пространстве $W^{1,p}(D; \omega)$. Тогда

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{D(t_1, t_2)} |f(\mathbf{x}) - f_\nu(\mathbf{x})|^p \omega(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}) = 0.$$

Используя формулу коплощади (9), запишем предыдущее равенство в виде

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \int_{\varphi^{-1}(t)} |f(\mathbf{x}) - f_\nu(\mathbf{x})|^p w(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x}) dt = 0.$$

Следовательно, найдутся подпоследовательность $(f_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$ и множество $\Sigma_2 \subset (t_1, t_2)$ со свойством $\mathcal{L}^1(\Sigma_2) = 0$ такие, что при всех $t \in (t_1, t_2) \setminus (\varphi(Z) \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2)$ для любой компоненты $M \in \mathcal{C}[\varphi^{-1}(t)]$ имеем

$$(22) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_M |f(\mathbf{x}) - f_{\nu_k}(\mathbf{x})|^p w(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x}) = 0.$$

Напомним, что множество точек, в которых вес ω обращается в нуль, имеет нулевую \mathcal{H}^Q -меру. Рассуждая точно так же, как и при выводе (13), заключаем, что

$$\mathcal{H}^{Q-1}(\{\mathbf{x} \in D: \omega(\mathbf{x}) = 0\} \cap \varphi^{-1}(t)) = 0$$

при всех $t \in \varphi(D) \setminus (\varphi(Z) \cup \Sigma_3)$, где Σ_3 — совокупность тех точек t , для которых указанное равенство неверно; конечно, $\mathcal{L}^1(\Sigma_3) = 0$.

Фиксируем $t \in (t_1, t_2) \setminus (\varphi(Z) \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3)$ и поверхность $M \in \mathcal{C}[\varphi^{-1}(t)]$. В утверждении, установленном на предыдущем шаге, положим $X = M$, $\rho = d$ и $\mu(A) = \int_A w(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^{Q-1}(\mathbf{x})$ для \mathcal{H}^{Q-1} -измеримого множества $A \subset M$. Так как $t \notin \Sigma_3$, то $\mu(\{y \in X: \rho(y, x) < r\}) > 0$ при всех $x \in X$ и $r \in (0, \infty)$. Для M выполняется условие (22) и, значит,

$$(23) \quad \text{osc}(f, M) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \text{osc}(f_{\nu_k}, M).$$

Разумеется, для всякого $k \in \mathbb{N}$

$$\text{osc}(f_{\nu_k}, M) \leq \sup\{\text{osc}(f_{\nu_k}, M): M \in \mathcal{C}[\varphi^{-1}(t)]\},$$

откуда

$$\liminf_{k \rightarrow \infty} \text{osc}(f_{\nu_k}, M) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Omega(f_{\nu_k}, t).$$

Учитывая это неравенство, перейдём в (23) к точной верхней границе по всем $M \in \mathcal{C}[\varphi^{-1}(t)]$. Получим

$$\Omega(f, t) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \Omega(f_{\nu_k}, t).$$

Применение леммы Фату даёт

$$\int_{t_1}^{t_2} \Omega^p(f, t) \mathcal{K}_p(t) dt \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{t_1}^{t_2} \Omega^p(f_{\nu_k}, t) \mathcal{K}_p(t) dt.$$

Осталось воспользоваться соотношением (17) и условием (11):

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \Omega^p(f, t) \mathcal{K}_p(t) dt &\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{D(t_1, t_2)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f_{\nu_k}(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}) = \\ &= \int_{D(t_1, t_2)} \mathcal{G}^p(\mathbf{x}, \nabla_0 f(\mathbf{x})) \omega(\mathbf{x}) d\mathcal{H}^Q(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

□

REFERENCES

- [1] R. Courant, *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, with an appendix by M. Schiffer. Reprint of the 1950 original. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977. MR0454858
- [2] J. Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, Seventh edition. Universitext. Springer, Cham, 2017. MR3726907
- [3] G.D. Suvorov, *Обобщенный «принцип длины и площади» в теории отображений* (Russian) [The generalized “length and area principle” in mapping theory], “Naukova Dumka”, Kiev, 1985. MR0869064
- [4] V.M. Miklyukov, *Геометрический анализ. Дифференциальные формы, почти-решения, почти квазиконформные отображения* (Russian) [Geometric Analysis. Differential Forms, Almost-solutions, Almost Quasiconformal Mappings], Volgograd Gos. Univ., Volgograd, 2007.
- [5] V.M. Miklyukov, *Conformal Maps of Nonsmooth Surfaces and Their Applications*, Xlibris Corporation, Philadelphia, 2008.
- [6] V.M. Miklyukov, *Введение в негладкий анализ* (Russian) [Introduction to Nonsmooth Analysis], Volgograd. Gos. Univ., Volgograd, 2008.
- [7] V.M. Miklyukov, *Функции весовых классов Соболева, анизотропные метрики и вырождающиеся квазиконформные отображения* (Russian) [Functions of Sobolev Weight Classes, Anisotropic Metrics, and Degenerating Quasiconformal Mappings], Volgograd Gos. Univ., Volgograd, 2010.
- [8] O. Martio, V.M. Miklyukov, M. Vuorinen, *Harnack's inequality for p-harmonic functions on Riemannian manifolds for different exhaustions*, Complex analysis in modern mathematics, 201–230, FAZIS, Moscow, 2001. MR1833514
- [9] M.V. Tryamkin, *An Estimate of the Modulus of a Family of Curves on an Abstract Surface over a Cylinder*, Math. Notes, **107**:1 (2020), 177–181. MR4045694
- [10] M.V. Tryamkin, *Modulus Estimates on Abstract Surfaces over a Domain of Revolution and a Cylindrical Ring*, Math. Notes, **108**:2 (2020), 297–301. MR4133422
- [11] M.V. Tryamkin, *The modulus of a family of curves on an abstract surface over a spherical ring*, Sib. Elektron. Mat. Izv., **17** (2020), 1816–1822. MR4239138
- [12] M.V. Tryamkin, *The Symmetry Principle and Nondegenerate Families of Curves on Abstract Surfaces*, Siberian Math. Journal, **62**:6 (2021), 1140–1151.
- [13] G.B. Folland, I.M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Princeton: Princeton Univ. Press, 1982. (Math. Notes. V. 28) MR0657581
- [14] P. Pansu, *Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un*, Ann. of Math. (2), **119** (1989), 1–60. MR0979599
- [15] A. Bonfiglioli, E. Lanconelli, F. Uguzzoni, *Stratified Lie Groups and Potential Theory for Their Sub-Laplacians*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2007. MR2363343
- [16] N. Bourbaki *Integration. II. Chapters 7–9*, Springer-Verlag, Berlin, 2004. MR2098271
- [17] P.K. Rashevsky, *О соединимости любых двух точек вполне неголономного пространства допустимой линией* (Russian) [Any two points of a totally nonholonomic space can be connected by an admissible curve], Uch. Zap. Ped. Inst. im. Liebknechta, Ser. Phys. Math. **2** (1938), 83–94.
- [18] W.L. Chow, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann. **117** (1939), 98–105. MR0001880

- [19] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 2006. MR2305115
- [20] S.K. Vodop'yanov, N.A. Evseev, *Isomorphisms of Sobolev spaces on Carnot groups and quasi-isometric mappings*, Sib. Math. J. **55**:5 (2014), 817–848. MR3289109
- [21] T. Kilpeläinen, *Weighted Sobolev spaces and capacity*, Ann. Acad. Sc. Fen. Ser. A. I. Math. **19** (1994), 95–113. MR1246890
- [22] J.M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Second edition. Graduate Texts in Mathematics, 218. Springer, New York, 2013. MR2954043
- [23] J. Heinonen, *Calculus on Carnot groups*, Fall School in Analysis (Jyväskylä, 1994), 1–31, Report, 68, Univ. Jyväskylä, Jyväskylä, 1995. MR1351042
- [24] H. Federer, *Geometric Measure Theory*, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153 Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969. MR0257325

MAXIM VLADIMIROVICH TRYAMKIN
SOBOLEV INSTITUTE OF MATHEMATICS,
4, KOPTYUGA AVE.,
NOVOSIBIRSK, 630090, RUSSIA
Email address: maxtryamkin@math.nsc.ru