S(e)MR ISSN 1813-3304

СИБИРСКИЕ ЭЛЕКТРОННЫЕ
МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ИЗВЕСТИЯ

Siberian Electronic Mathematical Reports

http://semr.math.nsc.ru

Том 18, №2, стр. 1667–1688 (2021) УДК 519.21

DOI 10.33048/semi.2021.18.127 MSC 60F17

ОБ АСИМПТОТИКЕ ВЕРОЯТНОСТИ НЕВЫХОДА НЕОДНОРОДНОГО ОБОБЩЕННОГО ПРОЦЕССА ВОССТАНОВЛЕНИЯ ЗА НЕВОЗРАСТАЮЩУЮ ГРАНИЦУ

А.Д. ШЕЛЕПОВА, А.И. САХАНЕНКО

Abstract. We consider a non-homogeneous compound renewal process, which is also known as a cumulative renewal process, or a continuous time random walk. We suppose that the jump sizes have zero means and finite variances, whereas the renewal-times has moments of order greater than 3/2. We investigate the asymptotic behaviour of the probability that this process is staying above a moving non-increasing boundary up to time T which tends to infinity. Our main result is a generalization of a similar one for homogeneous compound renewal process, due to A. Sakhanenko, V. Wachtel, E. Prokopenko, A. Shelepova (2021).

Keywords: compound renewal process, continuous time random walk, non-homogeneous process, boundary crossing problems, moving boundaries, exit times

1. Введение

1.1. **Постановка задачи.** Пусть $(X_1, v_1), (X_2, v_2), \ldots$ — бесконечная последовательность независимых пар случайных величин таких, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\text{(1)} \qquad \mathbf{E}X_n = 0, \quad \sigma_n^2 := \mathbf{E}X_n^2 > 0, \quad v_n > 0 \quad \text{п.н.}, \quad a_n := \mathbf{E}v_n,$$
$$A_n := a_1 + \ldots a_n < \infty \quad \text{и} \quad B_n^2 := \sigma_1^2 + \ldots + \sigma_n^2 < \infty.$$

Shelepova, A.D., Sakhanenko, A.I., On the asymptotics of the probability to stay above a non-increasing boundary for a non-homogeneous compound renewal process.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ и DFG в рамках научного проекта №20-51-12007. Работа второго автора по разделам 2 и 3 статьи проводилось также при частичной поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН № I.1.3., проект № 0314-2019-0008.

Поступила 28 октября 2021 г., опубликована 24 декабря 2021 г.

Положим $S_0 = V_0 = B_0 = A_0 = 0$ и

$$S_n = X_1 + \ldots + X_n, \quad V_n = v_1 + \ldots + v_n, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

При $t \geq 0$ введем случайный процесс

$$S(t) = S_{N(t)}, \quad \text{где} \quad N(t) = \max\{k \geq 0 : V_k \leq t\}. \tag{2}$$

Таким образом, $N(t)$ — это неоднородный простой процесс восстановления, построенный по случайным величинам $v_1, v_2, v_3, \ldots$, а $S(t)$ — обобщенный процесс восстановления (ОПВ) (см. монографию А. А. Боровкова [1]). В иностранной, особенно физической, литературе такие процессы также называют случайными блужданиями с непрерывным временем.

Пусть $g(t)$ — некоторая функция, определенная при $t \geq 0$. Введем случайную величину

$$\tau := \inf\big\{t > 0 : S(t) \leq g(t)\big\} = \inf\big\{t > 0 : Z(t) := S(t) - g(t) \leq 0\big\} \tag{3}$$

равную первому моменту пересечения сверху вниз уровня $g(t)$ нашим обобщенным процессом восстановления $S(t)$. Цель данной работы — изучить асимптотику для вероятности

$$\mathbf{P}(\tau > T) = \mathbf{P}\big(\underline{Z}(T) := \inf_{0<t\leq T}(S(t) - g(t)) > 0\big) \quad \text{при} \quad T \to \infty \tag{4}$$

в случае, когда

$$g(t) = o(\sqrt{t}) \quad \text{при} \quad t \to \infty. \tag{5}$$

С целью избежать в дальнейшем тривиальных оговорок, мы будем рассматривать в работе только функции для которых

$$\mathbf{P}(\tau > T) > 0 \quad \text{при всех} \quad T > 0. \tag{6}$$

Мы будем далее предполагать, что случайные величины $\{X_i\}$ удовлетворяют классическому условию Линдеберга, которое можно переписать следующим образом [2]

$$L_{2,n} = L_{2.n}(X_\bullet) := \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[\frac{|X_k|^3}{B_n^3} \wedge \frac{X_k^2}{B_n^2}\right] \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Аналогичное условие мы накладываем ниже на случайные величины $\{v_i\}$:

$$L_{1,n} = L_{1,n}(v_\bullet) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[\frac{v_k^2}{A_n^2} \wedge \frac{v_k}{A_n}\right] = o\left(\frac{1}{\sqrt{A_n}}\right) \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{8}$$

Здесь и всюду в работе для любых чисел a и b мы полагаем:

$$a \wedge b = \min\{a, b\}, \quad a \vee b = \max\{a, b\}, \quad a^+ = a \wedge 0, \quad a^- = (-a)^+.$$

В частности, из условий (8) и (7) следует (см. лемму 1), что

$$A_{n+1} \sim A_n \to \infty \quad \text{и} \quad B_{n+1} \sim B_n \to \infty \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{9}$$

Напомним, что условие $L_{2,n} \to 0$ достаточно для ЦПТ Линдеберга, и является необходимым и достаточным условием для справедливости функциональной ЦПТ Прохорова. Аналогично, условие $L_{1,n} \to 0$ достаточно для выполнения закона больших чисел для величин $\{v_i\}$ (см. [2], стр. 180, параграф 3). Но условие (8) жёстче: оно влечёт наличие некоторой скорости сходимости в этом законе больших чисел (см лемму 2). Отметим ещё, что при проверке условия (8) может быть полезным следующее более простое условие:

$$\sqrt{A_n}L_{1,n} \le \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}v_k^q \Big/ A_n^{q-1/2} \to 0 \quad \text{при некотором} \quad q \in [1,2]. \tag{10}$$

1.2. **Основные результаты.** Введём два основных предположения.

($\mathbf{A}$) Для независимых пар случайных величин $\{(X_i, v_i)\}$ выполнены условия (1), (7), (8) и

$$A_n = O(B_n^2) \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{11}$$

($\mathbf{G}$) монотонно невозрастающая функция $g(\cdot)$ обладает свойством (5) и

$$\mathbf{P}(X_1 > g(v_1)) > 0. \tag{12}$$

Теорема 1. *Пусть выполнены условия (A) и (G). Тогда имеет место следующая асимптотика*

$$B_n \mathbf{P}(\tau > V_n) \sim \sqrt{2/\pi}\, U_n \qquad \text{при} \quad n \to \infty, \tag{13}$$

где последовательность

$$U_n := \mathbf{E}[S_n - g(V_n); \tau > V_n] > 0, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{14}$$

монотонно не убывает. Кроме того, последовательность $\{U_n\}$ является медленно меняющейся в следующем смысле: существует последовательность натуральных чисел $m(n)$ такая, что одновременно при $n \to \infty$

$$\frac{B_{m(n)}}{B_n} \to 0 \qquad \text{и} \qquad \max_{m(n) \le k \le n} \left| \frac{U_k}{U_n} - 1 \right| \to 0. \tag{15}$$

Отметим, что в случае невозрастающих функций $g(\cdot)$ условия (12) и (6) эквивалентны, поскольку $\mathbf{P}(S_k \ge S_1 = X_1) > 0$ для сумм независимых случайных величин с нулевыми средними.

При $0 \le T < \infty$ обозначим

$$n(T) := \max\{n > 0 : A_n \le T\}, \quad B(T) = B_{n(T)}, \quad U(T) = U_{n(T)}. \tag{16}$$

Теорема 2. *Пусть выполнены все условия теоремы 1 и существует число $c \in (0, \infty)$ такое, что*

$$A_n \sim c^2 B_n^2 \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{17}$$

Тогда

$$B(T)\mathbf{P}(\tau > T) \sim \sqrt{2/\pi}\, U(T) \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{18}$$

Кроме того, функция $U(T) \ge U_1 > 0$ монотонно не убывает и является медленно меняющейся в классическом смысле при $T \to \infty$.

В частности, при $T = A_n$ асимптотика (18) имеет следующий вид

$$B_n \mathbf{P}(\tau > A_n) \sim \sqrt{2/\pi}\, U_n \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

1.3. **Частные случаи и предшествующие результаты.** Оказывается, что все известные предшествующие результаты удовлетворяют следующему условию:

$$\forall\ n \quad a_n = c^2\sigma_n^2, \quad \text{а потому} \quad A_n = c^2 B_n^2$$

при некотором $c \in (0, \infty)$. В частности, в этом случае автоматически выполняются предположения (17) и (11).

Следствие 1. *Пусть* $(X_1, v_1), (X_2, v_2), \ldots$ *— последовательность независимых и одинаково распределенных пар случайных величин таких, что*

$$\mathbf{E}X_1 = 0, \quad \mathbf{E}X_1^2 = 1 = \mathbf{E}v_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{E}v_1^{3/2} < \infty. \tag{19}$$

Тогда все утверждения теорем 1 и 2 имеют место при $A_n = B_n^2 = n$.

Для доказательства этого утверждения нам достаточно лишь проверить, что выполнено условие (8). Действительно, при $n \to \infty$

$$\sqrt{n}L_{1,n} = \sqrt{n} \cdot n\mathbf{E}\left[\frac{v_1^2}{n^2} \wedge \frac{v_1}{n}\right] = \mathbf{E}\left[\frac{v_1^2}{\sqrt{n}} \wedge \sqrt{n}v_1\right] \le \mathbf{E}\left[\frac{v_1^2}{\sqrt{n}} \wedge v_1^{3/2}\right] \to 0.$$

В частности, следствие 1 усиливает аналогичное утверждение из работы [6], где использовалось более жёсткое условие

$$\mathbf{E}v_1^q < \infty \qquad \text{при некотором} \quad q > 3/2. \tag{20}$$

Отметим, что если бы в доказательстве следствия 1 мы бы проверяли не громоздкое условие (8), а более простое достаточное условие (10), то мы бы также пришли к предположению (20), вместо более общего и изящного условия (19) с $q = 3/2$.

В случае классических случайных блужданий результаты настоящей работы позволяют получить

Следствие 2. *Пусть* $X_1, X_2, \ldots$ *— последовательность независимых случайных величин с нулевыми средними, для которых выполнено условие Линдеберга* (7)*. Предположим, что величины* $\{v_k\}$ *неслучайны и* $v_k = \sigma_k^2 := \mathbf{D}X_k > 0$ *при всех* $k = 1, 2, \ldots$*. Если ещё выполнено условие (G), то в этом случае все утверждения теорем 1 и 2 верны при* $A_n = B_n^2$.

Отметим, что в этом случае

$$\tau = A_\beta = B_\beta^2, \quad \text{где} \quad \beta = \min\{n \ge 1 : S_n \le g_n := g(B_n^2)\}$$

— это момент первого выхода классического случайного блуждания за последовательность чисел g_n, построенную по функции $g(\cdot)$. Подчеркнём, что следствие 2 слабее, чем главный результат работы [4], в которой не предполагалось, что функция $g(\cdot)$ является монотонно невозрастающей. Там от этой функции требовались только условия (5) и (6). Однако наши прикидки показывают, что в случае неклассических ОПВ со случайными $\{v_k\}$, для возрастающих функций $g(\cdot)$ наша асимптотика (13) перестанет иметь место, если мы ограничимся условиями (5) и (6) вместо более жёсткого предположения (G).

Напомним, что данной теме посвящено значительное количество работ, в которых изучаются моменты выхода через постоянные границы $g(\cdot) = g(0)$ для классических случайных блужданий порождённых независимыми и одинаково распределенными случайными величинами $X_1, X_2, \ldots$. Дело в том, что в этом частном случае можно применить метод факторизационных тождеств (см., например, [5]).

1.4. **О структуре доказательств.** Доказательство теоремы 1 будет проведено в параграфах 2 – 4 в несколько этапов. При этом используется подход, основанный на идеях из [4] для обычных случайных блужданий, который был затем в [6] перенесён на ОПВ, но только для частного случая описанного в следствии 1.

Сначала в параграфе 2 мы докажем несколько полезных вспомогательных утверждений. Затем в параграфе 3 мы найдём простую оценку сверху (см. предложение 3) для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$, из которой затем в предложении 4 извлечём асимптотическую оценку сверху для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$. Кроме того, в предложении 3 мы докажем свойство (15) о медленном изменении последовательности $\{U_n\}$. Весь параграф 4 посвящён доказательству предложения 5, которое содержит асимптотическую оценку снизу для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$. Утверждение теоремы 1 очевидным образом следует из предложений 3, 4 и 5.

Отметим, что в параграфах 2 – 4 предполагаются выполненными все условия теоремы 1, а пределы берутся при $n \to \infty$; причём эти два факта мы обычно не оговариваем в этих параграфах.

Теорема 2 доказывается в последнем параграфе 5. И там мы всегда оговариваем: берётся ли предел при $T \to \infty$, или при $n \to \infty$.

Далее в работе через $C_0, C_1, \dots$ мы обозначаем вводимые нами абсолютные постоянные. А через $K_0, K_1, \dots$ обозначаются постоянные, которые зависят от параметров возникающих из условий (A) и (G).

2. Вспомогательные леммы

2.1. **Свойства условий** (7) **и** (8)**.** Введем вспомогательные срезанные случайные величины

$$\tilde{v}_{j,n} := v_j \mathbf{I}\{v_j \le A_n\} \ge 0 \quad \text{и} \quad \check{v}_{j,n} := v_j \mathbf{I}\{v_j > A_n\} = v_j - \tilde{v}_{j,n} \ge 0, \tag{21}$$

$$\tilde{V}_n := \sum_{j=1}^{n} \tilde{v}_{j,n} \ge 0 \qquad \text{и} \qquad \check{V}_n := \sum_{j=1}^{n} \check{v}_{j,n} = V_n - \tilde{V}_n \ge 0.$$

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* (7) *и* (8)*. Тогда имеют место все соотношения в* (9) *и*

$$\overline{a}_n := \frac{1}{A_n} \max_{k \le n} a_k \to 0 \quad \text{и} \quad \overline{\sigma}_n := \frac{1}{B_n} \max_{k \le n} \sigma_k \to 0. \tag{22}$$

Кроме того, в этом случае

$$L_{1,n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}\tilde{v}_{j,n}^2}{A_n^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}\check{v}_{j,n}}{A_n} \ge \frac{\mathbf{D}\tilde{V}_n}{A_n^2} + \frac{\mathbf{E}\check{V}_n}{A_n} \to 0. \tag{23}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что соотношения в (23) немедленно вытекают из определения (8) величины $L_{1,n}$. Поэтому, при всех $j = 1, \dots, n$ мы имеем:

$$\tilde{M}_{j,n}^2 := \frac{\mathbf{E}\tilde{v}_{j,n}^2}{A_n^2} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}\tilde{v}_{j,n}^2}{A_n^2} \le L_{1,n} \to 0,$$

$$\check{M}_{j,n}^2 := \left(\frac{\mathbf{E}\check{v}_{j,n}}{A_n}\right)^2 \le \frac{\mathbf{E}\check{v}_{j,n}}{A_n} \le \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}\check{v}_{j,n}}{A_n} \le L_{1,n} \to 0.$$

А поскольку $a_j/A_n = \tilde{M}_{j,n} + \check{M}_{j,n}$, то из определения (22) получаем:

$$\overline{a}_n = \max_{j\le n}\left(\tilde{M}_{j,n} + \check{M}_{j,n}\right) \le 2\sqrt{L_{1,n}} \to 0. \tag{24}$$

Таким образом, из (24) вытекает первая сходимость в (22). Но из неё мы находим, что

$$1 \ge \frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{A_{n+1}-a_{n+1}}{A_{n+1}} = 1 - \frac{a_{n+1}}{A_{n+1}} \ge 1 - \overline{a}_{n+1} \to 1, \tag{25}$$

$$0 \le \frac{a_1}{A_n} \to 0, \quad \text{где} \quad a_1 = \mathbf{E}v_1 > 0 \quad \text{поскольку} \quad v_1 > 0 \quad \text{п.н.} \tag{26}$$

Но из (26) следует, что $A_n \to \infty$, а из (25) вытекает, что $A_n \sim A_{n+1}$. Значит, (25) и (26) доказывают первое соотношение в (9).

Вторые соотношения в (22) и (9) известны, поскольку они много раз извлекались из знаменитого условия Линдеберга. Кроме того, они могут быть получены аналогично тому, как мы вывели первые соотношения. □

2.2. **Оценки для распределения величины V_n.** Введем следующие величины

$$\theta_n := \sqrt[3]{B_n L_{1,n}}, \quad \overline{\theta}_n := \sup_{k\ge n}\theta_k, \quad \overline{A}_n := (1+\theta_n)A_n. \tag{27}$$

И отметим, что

$$0 < \theta_n \le \tilde{\theta}_n := \overline{\theta}_n + L_{1,n} \to 0 \quad \text{и} \quad \theta_n \le \overline{\theta}_n \downarrow 0. \tag{28}$$

Лемма 2. *Пусть выполнено условие* (8). *Тогда при всех* $n = 1, 2, \dots$

$$\mathbf{P}(V_n - A_n < -\tilde{\theta}_n A_n) \le \theta_n / B_n, \tag{29}$$

$$\mathbf{P}(V_n > 2A_n) \le L_{n,1} = \theta_n^3/B_n, \tag{30}$$

$$\widehat{E}_n := \mathbf{E}[\sqrt{V_n}; V_n > 2A_n] \le 3\sqrt{A_n}L_{1,n} = 3\theta_n^3\sqrt{A_n}/B_n. \tag{31}$$

Если же, $\theta_n \le 1$, *то*

$$\mathbf{P}(V_n > \overline{A}_n) = \mathbf{P}(V_n - A_n > \theta_n A_n) \le \theta_n/B_n. \tag{32}$$

Доказательство. Прежде всего заметим, что в силу (21) и (23)

$$0 \le \tilde{A}_n := \sum_{j=1}^n \mathbf{E}\tilde{v}_{j,n} \le A_n = \tilde{A}_n + \mathbf{E}\check{V}_n \le \tilde{A}_n + A_n L_{1,n}. \tag{33}$$

По неравенству Чебышева

$$\forall\,\theta > 0 \quad \theta A_n \mathbf{P}(\pm(\tilde{V}_n - \tilde{A}_n) > \theta A_n) \le \theta A_n \mathbf{P}(|\tilde{V}_n - \tilde{A}_n| > \theta A_n)$$

$$\le E_n^*(\theta) := \mathbf{E}[|\tilde{V}_n - \tilde{A}_n|\,; |\tilde{V}_n - \tilde{A}_n| > \theta A_n] \le \frac{\mathbf{E}|\tilde{V}_n - \tilde{A}_n|^2}{\theta A_n} = \frac{\mathbf{D}\tilde{V}_n}{\theta A_n}. \tag{34}$$

Суммируя, при $\theta = \theta_n$ получаем:

$$(1-\tilde{\theta}_n)A_n = \tilde{A}_n + \mathbf{E}\check{V}_n - \theta_n A_n - L_{n,1}A_n \le \tilde{A}_n - \theta_n A_n,$$

$$\mathbf{P}(V_n < (1-\tilde{\theta}_n)A_n) = \mathbf{P}(\tilde{V}_n < \tilde{A}_n - \theta_n A_n) \le \frac{\mathbf{D}\tilde{V}_n}{\theta_n^2 A_n^2} \le \frac{L_{1,n}}{\theta_n^2} = \frac{\theta_n}{B_n},$$

что доказывает (29). При выводе последнего неравенства мы также использовали определение (27) и тот факт, что $\tilde{V}_n \le V_n$ ввиду (21).

Далее, заметим, что

$$\mathbf{P}(V_n \neq \tilde{V}_n) \leq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(v_{j,n} \neq \tilde{v}_{j,n}) = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{P}(v_{j,n} > A_n) \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}\check{v}_{j,n}}{A_n} = \frac{\mathbf{E}\check{V}_n}{A_n}.$$

Отсюда и из (34) при $0 < \theta \leq 1$ находим:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(V_n > (1+\theta)A_n) &\leq \mathbf{P}(V_n > \tilde{A}_n + \theta A_n) \\ &\leq \mathbf{P}(\tilde{V}_n > \tilde{A}_n + \theta A_n) + \mathbf{P}(V_n \neq \tilde{V}_n) \\ &\leq \frac{\mathbf{D}\tilde{V}_n}{\theta^2 A_n^2} + \frac{\mathbf{E}\check{V}_n}{A_n} \leq \frac{\mathbf{D}\tilde{V}_n}{\theta^2 A_n^2} + \frac{\mathbf{E}\check{V}_n}{\theta^2 A_n} = \frac{L_{1,n}}{\theta^2}. \end{aligned} \tag{35}$$

Здесь мы также использовали (21), (27) и (33). Подставляя $\theta = 1$ в (35) мы получаем (30), а при $\theta = \theta_n \leq 1$ из (35) мы находим (32).

Наконец, оценим $\widehat{E}_n$. Прежде всего заметим, что

$$\sqrt{V}_n = \sqrt{\tilde{A}_n + \tilde{V}_n - \tilde{A}_n + \check{V}_n} \leq \sqrt{A_n} + \sqrt{|\tilde{V}_n - \tilde{A}_n|} + \sqrt{\check{V}_n}$$

и $I_n := \mathbf{I}(V_n > 2A_n) = I_n^2 = \sqrt{I_n}$. Таким образом,

$$\widehat{E}_n = \mathbf{E}\sqrt{V_n I_n} \leq \sqrt{A_n}\mathbf{E}I_n + \mathbf{E}\sqrt{|\tilde{V}_n - \tilde{A}_n| I_n} + \mathbf{E}\sqrt{\check{V}_n I_n}. \tag{36}$$

Кроме того, $\mathbf{E}I_n = \mathbf{P}(V_n > 2A_n) \leq L_{n,1}$ как следует из оценки (30). Применяя неравенство Гёльдера с $p = 4$ и $q = 4/3$ и учитывая (23), получаем при $\delta = \sqrt{|\tilde{V}_n - \tilde{A}_n|}$, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\sqrt{|\tilde{V}_n - \tilde{A}_n| I_n} &= \mathbf{E}(\delta_n I_n) \leq (\mathbf{E}\delta_n^4)^{1/4}(\mathbf{E}I_n^{4/3})^{3/4} \leq (\mathbf{E}|\tilde{V}_n - \tilde{A}_n|^2)^{1/4}(\mathbf{E}I_n)^{3/4} \\ &= (\mathbf{D}\tilde{V}_n)^{1/4}(\mathbf{P}(V_n > 2A_n))^{3/4} \leq (A_n^2 L_{1,n})^{1/4}(L_{1,n})^{3/4} = \sqrt{A_n} L_{1,n}. \end{aligned} \tag{37}$$

Аналогично, из неравенства Гёльдера с $p = q = 2$ находим

$$\mathbf{E}\sqrt{\check{V}_n \cdot I_n} \leq \sqrt{\mathbf{E}\check{V}_n \cdot \mathbf{E}I_n} \leq \sqrt{A_n L_{1,n} \cdot L_{1,n}} = \sqrt{A_n} L_{1,n}, \tag{38}$$

поскольку $\mathbf{E}\check{V}_n \leq A_n L_{1,n}$ ввиду (23).

Подставляя теперь (30), (37) и (38) в (36), приходим к (31). □

2.3. **Одно следствие из свойств мартингалов.** Положим

$$\beta := \inf\{n > 0 : \underline{Z}(V_n) \leq 0\} = \inf\{n > 0 : \tau \leq V_n\}.$$

Из определения (2) вытекает, что для невозрастающей функции $g(\cdot)$ процесс $S(t)$ может опускаться ниже этой функции только в моменты времени $t = V_1, V_2, \ldots$. Следовательно

$$\begin{gathered} \tau = V_\beta, \qquad \{\tau > V_n\} = \{\beta > n\}, \\ \beta = \inf\{n > 0 : S_n \leq g(V_n)\} = \inf\{n > 0 : Z_n \leq 0\}. \end{gathered} \tag{39}$$

Из определений (3) и (4) величин $Z(\cdot)$ и $\underline{Z}(\cdot)$ нетрудно понять, что последовательность троек

$$\mathcal{M} := \{(V_k, Z(V_k), \underline{Z}(V_k)) : k = 1, 2, \ldots\} \tag{40}$$

образует цепь Маркова, а β — момент остановки этой цепи. Положим

$$Z_n = S_n - g(V_n), \quad Z_n^* = Z_n I\{\beta > n\}. \tag{41}$$

Лемма 3. *Пусть выполнены условия (A) и (G), а α — такой момент остановки цепи Маркова $\mathcal{M}$, что $1 \le \alpha \le n$ при некотором неслучайном натуральном n. Тогда*

$$\mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* = \mathbf{E}[Z_\beta; \alpha < \beta \le n] + \mathbf{E}[g(V_{\beta\wedge n}) - g(V_\alpha); \alpha < \beta \wedge n]. \tag{42}$$

Доказательство. Так как S_n — мартингал, то по теореме об остановке мартингала имеет место следующее равенство

$$0 = \mathbf{E}S_{\alpha\wedge\beta} = \mathbf{E}[S_\beta; \beta \le \alpha] + \mathbf{E}[S_\alpha; \beta > \alpha].$$

Поскольку

$$\mathbf{E}Z_\alpha^* = \mathbf{E}[S_\alpha; \beta > \alpha] - \mathbf{E}[g(V_\alpha); \beta > \alpha],$$

то

$$\mathbf{E}Z_\alpha^* = -\mathbf{E}[S_\beta; \beta \le \alpha] - \mathbf{E}[g(V_\alpha); \beta > \alpha]. \tag{43}$$

Введем события

$$D_1 := \{\alpha < \beta \le n\}, \quad D_2 := \{\alpha < n < \beta\}. \tag{44}$$

Легко видеть, что

$$D_0 := D_1 \cup D_2 = \{\alpha < \beta, \alpha < n\} = \{\alpha < \beta \wedge n\}. \tag{45}$$

Из (43) получим, что

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z_\alpha^* + \mathbf{E}[S_\beta; \beta \le \alpha] &= -\mathbf{E}[g(V_\alpha); \beta > \alpha] \\ &= -\mathbf{E}[g(V_\alpha); D_1] - \mathbf{E}[g(V_\alpha); D_2] - \mathbf{E}[g(V_n); \alpha = n < \beta]. \end{aligned} \tag{46}$$

Подставляя теперь $\alpha = n$ в левую часть (46), мы имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z_n^* + \mathbf{E}[S_\beta; \beta \le n] &= -\mathbf{E}[g(V_n); \beta > n] \\ &= -\mathbf{E}[g(V_n); D_2] - \mathbf{E}[g(V_n); \alpha = n < \beta], \end{aligned} \tag{47}$$

Вычитая (47) из (46), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* = \mathbf{E}[S_\beta; \beta \le n] - \mathbf{E}[S_\beta; \beta \le \alpha] - \mathbf{E}[g(V_\alpha); D_1 \cup D_2] \\ + \mathbf{E}[g(V_n); D_2]. \end{aligned}$$

Из предыдущего равенства очевидным образом получаем

$$\mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* = \mathbf{E}[Z_\beta; D_1] + \mathbf{E}[g(V_\beta) - g(V_\alpha); D_1] + \mathbf{E}[g(V_n) - g(V_\alpha); D_2].$$

Но из (44) и (45) вытекает, что последнее равенство можно переписать в виде (42). $\square$

2.4. **Свойства величин U_n.** Введем следующие величины

$$G(T) := \sup_{0 \le t \le T} |g(t)|, \quad \varkappa_n := \sup_{k \ge n} \frac{G(2A_k)}{\sqrt{A_k}} \downarrow 0. \tag{48}$$

Отметим, что ввиду определений (14), (16) и (42)

$$U(A_n) = U_n = \mathbf{E}Z_n^* \quad \text{при} \quad Z_n^* = Z_n I\{\beta > n\}. \tag{49}$$

Предложение 1. *Пусть верны все условия леммы 3 и $L_{2,n} \le 1$. Тогда*

$$0 \le \mathbf{E}Z_n^* - \mathbf{E}Z_\alpha^* \le 12\varkappa_n \sqrt{A_n} L_{1,n} + (4\varkappa_n \sqrt{A_n} + 2\sqrt[3]{L_{2,n}} B_n)\mathbf{P}(\beta > \alpha). \tag{50}$$

В частности, в случае невозрастающей функции $g(\cdot)$ последовательность $\{U_n\}$ не убывает и при всех $n \ge \alpha = m \ge 1$

$$U_n = \mathbf{E}Z_n^* \ge \mathbf{E}Z_m^* = U_m \ge U_1 = \mathbf{E}Z_1^* = \mathbf{E}[X_1 - g(v_1)\,; X_1 > g(v_1)] > 0. \tag{51}$$

Оставшаяся часть настоящего пункта посвящена доказательству предложения 1. Положим

$$E_1 := \mathbf{E}[g(V_\alpha) - g(V_{\beta\wedge n})\,; \alpha < \beta \wedge n], \quad E_2 := \mathbf{E}[Z_\beta; \alpha < \beta \le n], \tag{52}$$

$$E_3 := \mathbf{E}[G(V_{\beta\wedge n}); \alpha < \beta \wedge n], \quad E_4 := \mathbf{E}[X_\beta; \alpha < \beta \le n]. \tag{53}$$

Лемма 4. *Пусть верны все условия леммы 3. Тогда*

$$\mathbf{E}Z_\alpha^* - \mathbf{E}Z_n^* = E_1 - E_2 \le 4E_3 - E_4. \tag{54}$$

Кроме того, при всех $n \ge 1$

$$E_3 \le \varkappa_n \sqrt{A_n}(3L_{1,n} + \mathbf{P}(\beta > \alpha)). \tag{55}$$

Доказательство. Равенство в (54) очевидно следует из утверждения (42) леммы 3. Теперь используем определение величины β:

$$S_\beta = S_{\beta-1} + X_\beta > g(V_{\beta-1}) + X_\beta.$$

Далее, из определений величин Z_β и $G(\cdot)$ при $\beta \le n$ получим:

$$Z_\beta = S_\beta - g(V_\beta) > g(V_{\beta-1}) + X_\beta - g(V_\beta) \ge X_\beta - 2G(V_{\beta\wedge n}).$$

Воспользуемся теперь определениями событий $D_1 \subset D_0$ из (44) и (45). В итоге имеем:

$$E_2 = \mathbf{E}[Z_\beta - g(V_\alpha); D_1] \ge \mathbf{E}[X_\beta; D_1] - 2\mathbf{E}[G(V_n); D_0] = E_4 - 2E_3. \tag{56}$$

Аналогичным образом, при $\alpha \le n$ находим:

$$E_1 = \mathbf{E}[g(V_\alpha) - g(V_{\beta\wedge n}); D_0] \le 2\mathbf{E}[G(V_{\beta\wedge n}); D_0] = 2E_3. \tag{57}$$

Из оценок (56) и (57) очевидно вытекает неравенство в (54).

Наконец, ввиду (53) для оценки E_3 мы можем использовать следующее неравенство

$$\begin{aligned} E_3 &\le \mathbf{E}[G(V_n); V_n > 2A_n] + \mathbf{E}[G(V_n); \beta > \alpha, V_n \le 2A_n] \\ &\le \mathbf{E}[\varkappa_n \sqrt{V_n}; V_n > 2A_n] + \mathbf{E}[G(2A_n)\,; \beta > \alpha] \\ &= \varkappa_n \widehat{E}_n + G(2A_n)\mathbf{P}(\beta > \alpha) \le \varkappa_n \widehat{E}_n + \varkappa_n \sqrt{A_n}\mathbf{P}(\beta > \alpha). \end{aligned}$$

Но из полученного неравенства и (31) вытекает (55). □

Лемма 5. *При выполнении условий предложения 1 для всех* $n \ge 1$ *верна следующая оценка*

$$E_4 \le 2\sqrt[3]{L_{2,n}}B_n\mathbf{P}(\beta > \alpha). \tag{58}$$

Доказательство. Для всех $x > 0$ и $2 \le j \le n$ введем величину

$$\begin{aligned} \check{E}_{j,m}(x) &:= \mathbf{E}[-X_\beta; \beta = j > \alpha, -X_\beta > x] \\ &\le \mathbf{E}[-X_j; \beta > j-1 \ge \alpha, -X_j > x] \\ &= \mathbf{E}[-X_j; -X_j > x]\mathbf{P}(\beta > j-1 \ge \alpha), \end{aligned}$$

Второе равенство верно, так как событие $\{\beta > j-1 \ge \alpha\}$ порождается случайными величинами $X_1, \dots, X_{j-1}$, а, значит, оно независит от случайной величины X_j. Значит,

$$\check{E}_{j,m}(x) \le \mathbf{E}[|X_j|\,; |X_j| > x]\mathbf{P}(\beta > \alpha).$$

Следовательно, для любого $x > 0$

$$E_4 = \mathbf{E}[-X_\beta; n \geq \beta > \alpha] \tag{59}$$
$$= \mathbf{E}[-X_\beta; n \geq \beta > \alpha, 0 \leq -X_\beta \leq x] + \mathbf{E}[-X_\beta; n \geq \beta > \alpha, -X_\beta > x]$$
$$\leq x\mathbf{P}(\beta > \alpha) + \sum_{j=2}^{n} \check{E}_{j,m}(x) \leq x\mathbf{P}(\beta > \alpha) + \sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[|X_j|\,; |X_j| > x]\mathbf{P}(\beta > \alpha).$$

Поскольку $|X|(|X| \wedge B_n)$ не убывает, как функция от $|X|$, по неравенству Чебышева,

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}[|X_j|\,; |X_j| > x] \leq \sum_{j=1}^{n} \frac{\mathbf{E}[|X_j| \cdot |X_j|(|X_j| \wedge B_n)]}{x(x \wedge B_n)} = \frac{B_n^3}{x(x \wedge B_n)} L_{2,n}. \tag{60}$$

Подставляя (60) в (59) при $0 < x \leq B_n$, находим:

$$E_4 \leq x\mathbf{P}(\beta > \alpha) + \frac{B_n^3}{x^2} L_{2,n}\mathbf{P}(\beta > \alpha), \quad \text{при} \quad 0 < x \leq B_n.$$

Поскольку $L_{2,n} \leq 1$, то полагая в последнем выражении $x = \sqrt[3]{L_{2,n}} B_n \leq 1$, мы получим требуемое неравенство (58). □

Для завершения доказательства предложения 1 обратимся сначала к определению (52) и заметим, что $E_1 \geq 0$ поскольку функция $g(\cdot)$ не возрастает, а $E_2 \leq 0$ так как $Z_\beta \leq 0$ по свойству (39) момента β. Но отсюда следует левое неравенство в (54), а значит мы доказали и левое неравенство в (50). Но из этого факта при $\alpha = m$ вытекает, что последовательность $\{U_n\}$ не убывает и что выполнено (51). Подставляя, наконец, оценки(55) и (58) в (54), мы приходим ко второму неравенству в (50).

2.5. **Оценки в одной граничной задаче.** Целью данного пункта является получение, при некоторых t, x и $n > k > 0$, двусторонних оценок для следующих вероятностей:

$$Q_{k,n}(t, x) := \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \leq \bar{A}_n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x). \tag{61}$$

При $n > k \geq 0$ и $C_1 := 22$ мы введем обозначения:

$$B_{k,n}^2 = B_n^2 - B_k^2, \quad \overline{\rho}_n := C_1 \sqrt[4]{L_{2,n}} + \frac{3G(\bar{A}_n)}{B_n} \leq C_1 \sqrt[4]{L_{2,n}} + 3\varkappa_n \frac{\sqrt{A_n}}{B_n}. \tag{62}$$

Предложение 2. *Пусть числа t, x и k, m, n удовлетворяют следующим условиям:*

$$x > 0, \quad 0 < t < \overline{A}_n, \quad 0 < k \leq m < n, \quad B_m^2 \leq B_n^2/2. \tag{63}$$

Тогда

$$Q_{k,n}(t, x) \leq \frac{C_0 x}{B_{m,n}} + \overline{\rho}_n, \tag{64}$$

где $0.7 < C_0 = 2\varphi(0) = \sqrt{2/\pi} < 0.8$ *− постоянная.*

С другой стороны, при любом $h > 0$ имеем:

$$Q_{k,n}(t, x) \geq C_0 \frac{x}{B_n} \left(1 - \frac{h^2}{B_n^2} - \mathbf{I}[x > \sqrt{2}h]\right) - \overline{\rho}_n - p_{k,n}(t, x), \tag{65}$$

где

$$p_{k,n}(t, x) := \mathbf{P}(V_n > \bar{A}_n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x). \tag{66}$$

Остальная часть данного пункта посвящена выводу сформулированного предложения. Введём функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \Psi(x) = 2\int_0^x \varphi(y)dy. \tag{67}$$

Как известно

$$\Psi(x^+) = \mathbf{P}(x + \min_{0\le t\le 1} W(t) > 0),$$

где $W(t)$ — стандартный винеровский процесс. При $0 < k < n$ рассмотрим величины

$$\mu_{k,n} := \min_{k<j\le n}(S_j - S_k), \quad q_{k,n}(x) := \mathbf{P}(x + \mu_{k,n} > 0). \tag{68}$$

Лемма 6. *Для любых $0 < k < n$ и всех y справедливы неравенства*

$$\Psi\left(\frac{y + 2\pi_n B_n}{B_{k,n}}\right) + \pi_n \ge q_{k,n}(y) \ge \Psi\left(\frac{y - 2\pi_n B_n}{B_{k,n}}\right) - \pi_n, \tag{69}$$

где

$$\forall\ n > 0 \quad \pi_n \le 6.3\sqrt[4]{L_{2,n}}. \tag{70}$$

Доказательство. Утверждения из (69) получены в [4] при выводе леммы 18, где в качестве π_n было выбрано расстояние Прохорова в пространстве $C[0,1]$ между винеровским процессом $W(t)$ и соответствующей случайной ломаной, построенной по величинам, удовлетворяющим условию (7). Оценка (70) для π_n была установлена в [7]. □

Если ввести величину

$$M_{k,n} := \min\{Z(t) : V_k \le t \le V_n\}, \quad 0 < k < n, \tag{71}$$

то $Q_{k,n}(t,x)$ можно переписать в виде

$$Q_{k,n}(t,x) = \mathbf{P}(M_{k,n} > 0, V_n \le \bar{A}_n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x). \tag{72}$$

Отметим, что при $V_k \le t \le V_n$

$$Z(t) - Z_k = S_{N(t)} - S_k - g(t) + g(V_k),$$

следовательно, при тех же t

$$\Delta_k(t) := |Z(t) - Z_k - (S_{N(t)} - S_k)| \le 2G(V_n).$$

Из определений (68) и (71) несложно увидеть, что

$$|M_{k,n} - Z_k - \mu_{k,n}| \le \sup_{V_k\le t\le V_n} \Delta_k(t) \le 2G(V_n), \quad 0 < k < n. \tag{73}$$

Легко заметить, что из определения (67) величины Ψ можно получить

$$\forall\ x, z \quad |\Psi(x - z) - \Psi(x)| \le 2\varphi(0)|z| = C_0|z|. \tag{74}$$

Так как $B_n \ge B_{k,n}$, то

$$\forall\ x \ge 0 \quad \Psi\left(\frac{x}{B_n}\right) \le \Psi\left(\frac{x}{B_{k,n}}\right) \le \frac{2\varphi(0)x}{B_{k,n}} = \frac{C_0 x}{B_{k,n}}. \tag{75}$$

Лемма 7. *Для любых* $n > k \geq 0$ *и всех* $x > 0$

$$Q_{k,n}(t,x) \leq \frac{C_0 x}{B_{k,n}} + \rho_{k,n}, \tag{76}$$

где

$$\rho_{k,n} := c_{k,n}\pi_n + \frac{2C_0 G(\bar{A}_n)}{B_{k,n}}, \quad c_{k,n} = 1 + 2C_0\frac{B_n}{B_{k,n}}. \tag{77}$$

Доказательство. Применим представление (72) и неравенство (73):

$$\begin{aligned} Q_{k,n} &\leq \mathbf{P}(Z_k + \mu_{k,n} + 2G(V_n) > 0, V_n \leq \bar{A}_n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x) \\ &\leq \mathbf{P}(x + 2G(\bar{A}_n) + \mu_{k,n} > 0 | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x) \\ &= q_{k,n}(x + 2G(\bar{A}_n)). \end{aligned} \tag{78}$$

Используя лемму 6, можем оценить

$$q_{k,n}(x + 2G(\bar{A}_n)) \leq \Psi\left(\frac{x + 2G(\bar{A}_n) + 2\pi_n B_n}{B_{k,n}}\right) + \pi_n. \tag{79}$$

Следовательно, в силу (74) и (75),

$$q_{k,n}(x + 2G(\bar{A}_n)) \leq \frac{C_0 x}{B_{k,n}} + c_{k,n}\pi_n + \frac{2C_0 2G(\bar{A}_n)}{B_{k,n}}. \tag{80}$$

Из (78) и (80) получим требуемое неравенство. □

Лемма 8. *При выполнении условий леммы 7*

$$Q_{k,n}(t,x) \geq \Psi\left(\frac{x}{B_n}\right) - \rho_{k,n} - p_{k,n}(t,x), \tag{81}$$

где величины $\rho_{k,n}$ *и* $p_{k,n}$ *определена в лемме 7 и в предложении 2.*

Доказательство. Используем представление (72) и неравенство (73):

$$\begin{aligned} Q_{k,n}(t,x) &\geq \mathbf{P}(Z_k + \mu_{k,n} - 2G(V_n) > 0, V_n \leq \bar{A}_n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x) \\ &\geq \mathbf{P}(x + \mu_{k,n} - 2G(\bar{A}_n) > 0, V_n \leq \bar{A}_n | \tau > V_k, V_k = t, Z_k = x) \\ &\geq q_{k,n}(x - 2G(\bar{A}_n)) - p_{k,n}(t,x). \end{aligned} \tag{82}$$

Далее, применяя лемму 6 и оценки (74), (75),

$$\begin{aligned} q_{k,n}(x - 2G(\bar{A}_n)) &\geq \Psi\left(\frac{x - 2G(\bar{A}_n) - 2\pi_n B_n}{B_{k,n}}\right) - \pi_n \\ &\geq \Psi\left(\frac{x}{B_{k,n}}\right) - \pi_n - 2C_0\left(\frac{G(\bar{A}_n) + \pi_n B_n}{B_{k,n}}\right) \\ &\geq \Psi\left(\frac{x}{B_n}\right) - c_{k,n}\pi_n - \frac{2C_0 G(\bar{A}_n)}{B_{k,n}}. \end{aligned} \tag{83}$$

Из (82) и (83) получим неравенство (81). □

Доказательство предложения 2. Оценим снизу $\Psi(y)$ из (67) с помощью разложения в ряд Тейлора

$$\Psi(y) = 2\int\limits_0^y \varphi(x)dx \geq 2\int\limits_0^y \varphi(0)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)dx = 2\varphi(0)\left(y - \frac{y^3}{6}\right).$$

Следовательно, при $y = x/B_n$

$$\begin{aligned}(84)\qquad \Psi\left(\frac{x}{B_n}\right) &\geq \Psi\left(\frac{x}{B_n}\right)\mathbf{I}[0 < x \leq \sqrt{6}h] \geq C_0\frac{x\mathbf{I}[0 < x \leq \sqrt{6}h]}{B_n}\left(1 - \frac{x^2}{6B_n^2}\right)\\ &\geq C_0\frac{x\mathbf{I}[0 < x \leq \sqrt{6}h]}{B_n}\left(1 - \frac{h^2}{B_n^2}\right) \geq C_0\frac{x}{B_n}\left(1 - \frac{h^2}{B_n^2} - \mathbf{I}[x > 2h]\right),\end{aligned}$$

где $\mathbf{I}[A]$ — индикатор множества A.

Далее, при выполнении (63) имеем из (77) что

$$B_{k,n} \leq \sqrt{2}B_n, \quad 2C_0\frac{B_n}{B_{k,n}} \leq C_2 := 2\sqrt{2}C_0 < 2.4, \quad c_{k,n} \leq 1 + C_2,$$

а потому ввиду (70)

$$(85)\qquad \rho_{k,n} = c_{k,n}\pi_n + \frac{2C_0G(\bar{A}_n)}{B_{k,n}} \leq 6.3(1 + C_2)\sqrt[4]{L_{2,n}} + \frac{C_2G(\bar{A}_n)}{B_n} \leq \overline{\rho}_n.$$

Здесь мы использовали ещё определение $\overline{\rho}_n$ из (62).

Оценивая теперь величину $\rho_{k,n}$ в (77) при помощи (85), мы получаем (64). А подставляя (84) и (85) в (81) мы приходим ко второму утверждению (65) предложения 2. $\square$

3. Оценки сверху для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$

3.1. **Ключевое неравенство.** Пусть числа m, n такие, что

$$(86)\qquad 0 < m < n, \quad B_m^2 \leq B_n^2/2, \quad \theta_n \leq 1.$$

Лемма 9. *Пусть выполнено условие* (86)*. Тогда*

$$(87)\qquad \mathbf{P}(\tau > V_n) \leq \frac{C_0U_n}{B_{m,n}} + \overline{\rho}_n\mathbf{P}(\tau > V_m) + \frac{\theta_n}{B_n}.$$

Доказательство. Используя определение (61), неравенство (76) и марковское свойство пар $\{(V_m, Z_m), m = 1, 2, \ldots\}$, имеем:

$$\mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \leq \bar{A}_n) = \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \leq \bar{A}_n, \tau > V_m) = \mathbf{E}[Q_{m,n}(V_m, Z_m), \tau > V_m].$$

Но отсюда и из неравенства (76) находим:

(88)

$$P_n := \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \leq \bar{A}_n) \leq \mathbf{E}\Big[\frac{C_0Z_m}{B_{m,n}} + \overline{\rho}_n, \tau > V_m\Big] = \frac{C_0U_m}{B_{m,n}} + \overline{\rho}_n\mathbf{P}(\tau > V_m).$$

Далее, очевидно

$$(89)\qquad \mathbf{P}(\tau > V_n) \leq \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \leq \bar{A}_n) + \mathbf{P}(V_n > \bar{A}_n) \leq P_n + \frac{\theta_n}{B_n}.$$

Подставляя теперь (88) в (89) и учитывая, что $U_m \leq U_n$, мы приходим к (87). $\square$

3.2. **Грубая оценка сверху для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$.** Из асимптотики (9) и условия (11) следует, что

$$K_1 := \sup_{n\ge 1} \frac{B_{n+1}}{B_n} < \infty \quad \text{и} \quad K_2 := \sup_{n\ge 1} \frac{\sqrt{A_n}}{B_n} < \infty, \tag{90}$$

поскольку $B_1 > 0$. Введём обозначения:

$$N_0 := \min\big\{n \ge 1 : \overline{\theta}_n \le 1 \ \text{ и } \ \overline{L}_{2,n} := \sup_{k\ge n} L_{2,k} \le 1\big\}, \tag{91}$$

$$\lambda_n := 12\varkappa_n K_2 \overline{\theta}_n^3 / U_1 + 4\varkappa_n K_2 + 2\sqrt[3]{\overline{L}_{2,n}} \to 0. \tag{92}$$

Предложение 3. *В условиях теоремы 1 найдётся такое число $K_0 < \infty$, что*

$$\forall\ n > 0 \quad B_n \mathbf{P}(\tau > V_n) \le K_0 U_n. \tag{93}$$

Кроме того, если $n \ge N_0$, то справедливы неравенства

$$0 \le U_n - U_m \le \lambda_n U_n (1 + K_0 B_n / B_m) \quad \textit{при} \ \ n > m > 0\ . \tag{94}$$

В частности, свойство (15) *имеет место, например, при*

$$m(n) = n \wedge \min\{k \ge 1 : B_k \ge \sqrt{\lambda_n} B_n\}. \tag{95}$$

Доказательство. Введем числа

$$N_1 = \min\{n \ge 1 : 2\sqrt{2} K_1 \overline{\rho}_n \le 1 \quad \text{и} \quad \overline{\theta}_n \le 1\}, \tag{96}$$

$$K_0 = 2\sqrt{2} C_0 + \frac{2}{U_1} + \max_{n<N_1} \frac{B_n \mathbf{P}(\tau > V_n)}{U_n}. \tag{97}$$

При $n < N_1$ неравенство очевидно следует из определения постоянной K_0. Рассмотрим $n \ge N_1 \ge 1$. По индукции, пусть для всех $m < n$ неравенство уже доказано, то есть

$$\mathbf{P}(\tau > V_m) \le \frac{K_0 U_m}{B_m} \le \frac{K_0 U_n}{B_m}. \tag{98}$$

Здесь мы также использовали свойство $U_m \le U_n$. Выберем $m = \max\{k < n : B_k^2 \le B_n^2/2\}$. В этом случае очевидно, что

$$B_m^2 \le B_n^2/2 < B_{m+1}^2 \le K_1 B_m^2 \quad \text{и} \quad B_{m,n}^2 \ge B_n^2/2.$$

Применим оценку (87), подставим в нее (98) и используем (51). В итоге при $n > m \ge N_1$ получим:

$$\begin{aligned} B_n \mathbf{P}(\tau > V_n) &\le C_0 U_n \frac{B_n}{B_{m,n}} + K_0 \overline{\rho}_n \frac{B_n}{B_m} U_n + \theta_n \frac{U_n}{U_n} \\ &\le U_n \left(C_0 \frac{B_n}{B_{m,n}} + \frac{\theta_n}{U_n} + K_0 \overline{\rho}_n K_1 \frac{B_n}{B_{m+1}} \right) \\ &\le U_n \left(C_0 \sqrt{2} + \frac{1}{U_1} + K_0 \overline{\rho}_n K_1 \sqrt{2} \right) \le U_n \left(\frac{K_0}{2} + \frac{K_0}{2} \right) = K_0 U_n. \end{aligned} \tag{99}$$

При выводе последнего неравенства мы также использовали определения (96) и (97).

По индукции, (99) влечёт (93). Далее, чтобы получить (94), надо подставить (93) в доказываемое ниже неравенство (100) при $\alpha = m$ и воспользоваться равенствами из (49). Наконец, подставляя (95) в (94), имеем:

$$0 \le 1 - U_{m(n)}/U_n \le \lambda_n + K_0 \sqrt{\lambda_n} \to 0.$$

□

Лемма 10. *Пусть выполнены условия (A) и (G), а α — такой момент остановки цепи Маркова $\mathcal{M}$, что $1 \le \alpha \le n$ при некотором неслучайном натуральном n. Тогда при любом $n \ge N_0$*

$$0 \le \mathbf{E}Z^*_\alpha - \mathbf{E}Z^*_n \le \lambda_n U_n + \lambda_n B_n \mathbf{P}(\beta > \alpha). \tag{100}$$

Для вывода этого неравенства нам достаточно оценить правую часть в (50), используя определения (90), (91) и (92) величин K_2, N_0 и λ_n, а также учесть, что $L_{1,n} = \theta_n^3/B_n \le \overline{\theta}_n^3/B_n$.

3.3. **Асимптотическая оценка сверху $\mathbf{P}(\tau > V_n)$.** При произвольном $\varepsilon \in (0,1/2]$ положим

$$N_2(\varepsilon) := \min\left\{n \ge 2 : \frac{K_0 K_1 \overline{\rho}_n}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\theta_n}{U_1} \le C_0\varepsilon \quad \text{и} \quad \theta_n \le 1\right\}. \tag{101}$$

Предложение 4. *В условиях теоремы 1 при любом $\varepsilon \in (0,1/2]$ для всех $n > N_2(\varepsilon)$*

$$\sqrt{1-\varepsilon} B_n \mathbf{P}(\tau > V_n) \le (1+\varepsilon) C_0 U_n.$$

Доказательство. Пусть $m = \max\{k < n : B_k^2 \le \varepsilon B_n^2\}$. Тогда

$$B_m^2 \le \varepsilon B_n^2 < B_{m+1}^2 \le K_1 B_m^2 \quad \text{и} \quad B_n^2 \ge B_{m,n}^2 \ge (1-\varepsilon) B_n^2.$$

Теперь мы можем использовать оценки (87) и (98) вместе с предыдущим неравенством. Подставляя неравенство (98) в (87) и применяя (51), получим

$$\begin{aligned}
\sqrt{1-\varepsilon} B_n \mathbf{P}(\tau > V_n) &\le B_{m,n} \mathbf{P}(\tau > V_n) \\
&\le C_0 U_n + \overline{\rho}_n K_0 U_m \frac{B_{m,n}}{B_m} + C \frac{B_{m,n}\theta_n}{B_n} \frac{U_n}{U_n} \\
&\le U_n \left(C_0 + K_0 \overline{\rho}_n \frac{B_{m+1}}{B_m} \frac{B_n}{B_{m+1}} + \frac{\theta_n}{U_n} \right) \\
&\le U_n \left(C_0 + K_0 \overline{\rho}_n \frac{K_1}{\sqrt{\varepsilon}} + \frac{\theta_n}{U_1} \right) \le (1+\varepsilon) C_0 U_n.
\end{aligned}$$

При выводе последнего неравенства мы также использовали определение (101). □

4. Доказательство теоремы 1

4.1. **Основная идея.** Введем вспомогательные случайные величины:

$$\nu(h) := \inf\{k > 0 : Z_k \ge h\}, \quad \nu_m = \min\{\nu(h), m\}, \quad m, h > 0, \tag{102}$$

где $m \in \mathbb{N}$ и $h = h(n) \in \mathbb{R}$ будут определены позже.

Лемма 11. *При любых $n > m > 0$ и $h > 0$*

$$P_n = \mathbf{E}[Q_{\nu_m,n}(V_{\nu_m}, Z_{\nu_m}); \beta > \nu_m, V_{\nu_m} \le \bar{A}_n], \tag{103}$$

где величины P_n и $Q_{k,n}(t,x)$ были введены в (88) и (61) соответственно.

Доказательство. По формуле полной вероятности, используя тот факт, что $V_k < V_n$ для всех $k < n$,

$$\mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \le \bar{A}_n) = \sum_{k=1}^{m} \mathbf{P}(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \le \bar{A}_n). \tag{104}$$

Отметим, что ν_m является моментом остановки цепи Маркова $\mathcal{M}$, введенной в (40). В таком случае, так как $\{\tau > V_k\} = \{\beta > k\}$ и $V_k < V_n$ для всех $k < n$, получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \le \bar{A}_n) \\ &= \mathbf{P}(\nu_m = k, \tau > V_n, V_n \le \bar{A}_n, \tau > V_k, V_k \le \bar{A}_n) \\ &= \mathbf{E}[Q_{k,n}(V_k, Z_k); \beta > k = \nu_m, V_k \le \bar{A}_n]. \end{aligned} \tag{105}$$

При выводе равенства выше существенно использовалось определение (61) функции $Q_{k,n}(\cdot,\cdot)$.

Подставляя (105) в (104), получим утверждение леммы. □

Остальная часть данного параграфа посвящена выводу следующего утверждения.

Предложение 5. *Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда для всех* $\varepsilon \in (0, 1/2]$ *существует такое число* $N_3(\varepsilon)$*, что*

$$B_n \mathbf{P}(\tau > V_n) \ge (1-\varepsilon) C_0 U_n \quad \textit{для всех} \quad n \ge N_3(\varepsilon).$$

Доказательство теоремы 1. Первое утверждение (13) теоремы 1 непосредственно следует их предложений 4 и 5. Второе утверждение (15) этой теоремы уже выведено во второй части предложения 3. □

4.2. Нижняя оценка для $\mathbf{P}(\tau > V_n)$.

Лемма 12. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и* (86)*. Тогда для всех* $h > 0$

$$\begin{aligned} B_n \mathbf{P}(\tau > V_n) &\ge C_0 \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; D_{m,n}] \left(1 - \frac{h^2}{B_n^2}\right) \\ &- \overline{\rho}_n B_n \mathbf{P}(D_{m,n}) - C_0 E_{m,n} - B_n \mathbf{P}(V_n > \bar{A}_n), \end{aligned} \tag{106}$$

где

$$D_{m,n} := \{\tau > V_{\nu_m}, V_{\nu_m} \le \bar{A}_n\},\ E_{m,n} := \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; Z^*_{\nu_m} > 2h, V_{\nu_m} \le \bar{A}_n]. \tag{107}$$

Кроме того,

$$\mathbf{P}(\beta > \nu_m) - \mathbf{P}(V_n > \bar{A}_n) \le \mathbf{P}(D_{m,n}) \le \mathbf{P}(\tau > V_m) + \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; D_{m,n}]/h. \tag{108}$$

Доказательство. Нетрудно заметить, что

$$\mathbf{P}(\tau > V_n) \ge P_n = \mathbf{P}(\tau > V_n, V_n \le \bar{A}_n) = \mathbf{E}[Q_{\nu_m,n}(V_{\nu_m}, Z_{\nu_m}); D_{m,n}].$$

Подставим в последнее математическое ожидание оценку для $Q_{k,n}(t,x)$ из (65). В итоге получим

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}(\tau > V_n) \ge \\ &\mathbf{E}\left[C_0 \frac{Z^*_{\nu_m}}{B_n}\left(1 - \frac{h^2}{B_n^2} - \mathbf{I}[Z^*_{\nu_m} > \sqrt{2}h]\right) - \overline{\rho}_n - p_{\nu_m,n}(V_{\nu_m}, Z^*_{\nu_m}); D_{m,n}\right] \\ &\ge \frac{C_0 \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; D_{m,n}]}{B_n}\left(1 - \frac{2h^2}{3B_n^2}\right) - \frac{C_0 E_{m,n}}{B_n} - \overline{\rho}_n \mathbf{P}(D_{m,n}) - \mathbf{P}(V_n > \bar{A}_n), \end{aligned}$$

что даёт (106).

Заметим теперь, что по неравенству Чебышева из определения (107) имеем:

$$\mathbf{P}(D_{m,n}, \tau \le V_m) = \mathbf{P}(Z^*_{\nu_m} > h, D_{m,n}) \le \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; D_{m,n}]/h.$$

Следовательно

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(D_{m,n}) &\le \mathbf{P}(\tau > V_m) + \mathbf{P}(D_{m,n}, \tau \le V_m)\\ &\le \mathbf{P}(\tau > V_m) + \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; D_{m,n}]/h.\end{aligned} \tag{109}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\beta > \nu_m) = \mathbf{P}(\tau > V_{\nu_m}) &\le \mathbf{P}(D_{m,n}) + \mathbf{P}(V_{\nu_m} > \bar{A}_n)\\ &\le \mathbf{P}(D_{m,n}) + \mathbf{P}(V_n > \bar{A}_n).\end{aligned} \tag{110}$$

Тем самым (109) и (110) доказывают оба неравенства из (108). □

4.3. **Оценка для $E_{m,n}$.**

Лемма 13. *Пусть выполнены условия теоремы 1, а числа n, m и h такие, что*

$$h \ge 4G(\bar{A}_n) \quad \text{и} \quad h \ge 2B_m. \tag{111}$$

Тогда найдётся число $K_3 < \infty$ такое, что при всех $n \ge m > 0$

$$E_{m,n} \le \frac{16}{h} K_3 U_n B_m \sqrt{L_{2,n}}. \tag{112}$$

Доказательство. По определению величины ν_m и функции $G(\cdot)$, используя (111), имеем

$$\begin{aligned}Z_{\nu_m} &= Z_{\nu_m - 1} + X_{\nu_m} - g(V_{\nu_m}) + g(V_{\nu_m - 1})\\ &< h + X_{\nu_m} + 2G(V_{\nu_m}) \le 3h/2 + X_{\nu_m} \quad \text{при} \quad V_n \le \bar{A}_n,\end{aligned}$$

поскольку $V_{\nu_m} \le V_n$. Но из этого соотношения мы также находим:

$$X_{\nu_m} > Z_{\nu_m} - 3h/2 \ge h/2 \quad \text{при} \quad Z_{\nu_m} > 2h \quad \text{и} \quad V_n \le \bar{A}_n.$$

Используя эти две оценки, получаем:

$$\begin{aligned}E_{m,n} &= \mathbf{E}[Z_{\nu_m}; \beta > \nu_m, Z_{\nu_m} > 2h, V_n \le \bar{A}_n]\\ &\le \mathbf{E}[3h/2 + X_{\nu_m}; \beta > \nu_m, X_{\nu_m} > h/2] \le \mathbf{E}[4X_{\nu_m}; \beta > \nu_m, X_{\nu_m} > h/2]\\ &\le \mathbf{E}[8X^2_{\nu_m}/h; \beta > \nu_m, X_{\nu_m} > h/2] = \frac{8}{h}\sum_{j=1}^m \mathbf{E}[X_j^2; \beta > \nu_m = j, X_j > h/2]\\ &\le \frac{8}{h}\sum_{j=1}^m \mathbf{E}[X_j^2; \beta > j-1, X_j > B_m] = \frac{8}{h}\sum_{j=1}^m \mathbf{E}[X_j^2; X_j > B_m]\mathbf{P}(\beta > j-1).\end{aligned} \tag{113}$$

Вспомним оценки (93) и (90):

$$\forall\ j = 2, \ldots, n, \quad \mathbf{P}(\beta > j-1) \le \frac{K_0 U_{j-1}}{B_{j-1}} \le \frac{K_0 U_n}{B_{j-1}} \le \frac{K_0 K_1 U_n}{B_j}.$$

Но поскольку $U_1 > 0$, $B_1 > 0$ и $\mathbf{P}(\beta > j-1) \le 1$, то это неравенство можно сделать верным и когда $j = 1$:

$$\forall\ j = 1, 2, \ldots, n, \quad \mathbf{P}(\beta > j-1) \le K_3 U_n / B_j, \tag{114}$$

при $K_3 := \max\{B_1/U_1, K_0 K_1\} < \infty$.

Введём обозначения:

$$m_j := \mathbf{E}[X_j^2; |X_j| > B_m], \quad M_j := \sum_{k=1}^{j} m_k \le B_j^2, \tag{115}$$

и заметим, что в этом случае

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{m_j}{B_j} \le \sum_{j=1}^{m} \frac{m_j}{M_j^{1/2}} = \sum_{j=1}^{m} \frac{M_j - M_{j-1}}{M_j^{1/2}} \le \int\limits_0^{M_m} \frac{dx}{x^{1/2}} = 2M_m^{1/2}. \tag{116}$$

Используя оценки из (114) и (116), а также обозначения (115), мы можем продлить цепочку неравенств в (113):

$$E_{m,n} \le \frac{8}{h} \sum_{j=1}^{m} m_j \mathbf{P}(\beta > j-1) \le \frac{8}{h} K_3 U_n \sum_{j=1}^{m} \frac{m_j}{B_j} \le \frac{16}{h} K_3 U_n M_m^{1/2}. \tag{117}$$

Сравнивая определения (115) и (7), нетрудно заметить, что

$$M_m = \sum_{j=1}^{m} \mathbf{E}[X_j^2; |X_j| > B_m] \le B_m^2 \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}\left[\frac{|X_k|^3}{B_m^3} \wedge \frac{X_k^2}{B_m^2}\right] = B_m^2 L_{2,m}.$$

Подставляя эту оценку в (117), мы приходим к (112). □

4.4. **Доказательство предложения 5.** Предположим, что $n \ge N_0$, выполнено (86), а число $h > 0$ удовлетворяет условиям (111). Из определений (102) и (107), с учётом предложения 1, получаем:

$$\mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; D_{m,n}] \le \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}] \le \mathbf{E}[Z^*_m] \le \mathbf{E}[Z^*_n] = U_n,$$
$$\mathbf{E}Z^*_{\nu_m} - \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; D_{m,n}] = \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; V_{\nu_m} > \bar{A}_n] \le h\mathbf{P}(V_{\nu_m} > \bar{A}_n).$$

А из леммы 10 при $\alpha = \nu_m$ находим:

$$0 \le \mathbf{E}Z^*_{\nu_m} - \mathbf{E}Z^*_n \le \lambda_n U_n + \lambda_n B_n \mathbf{P}(\beta > \nu_m).$$

Таким образом, из сказанного выше имеем:

$$U_n \ge \mathbf{E}[Z^*_{\nu_m}; D_{m,n}] \ge U_n - \lambda_n U_n - \lambda_n B_n \mathbf{P}(\beta > \nu_m) - h\mathbf{P}(V_{\nu_m} > \bar{A}_n). \tag{118}$$

Введем

$$\delta_{1,n} := E_{m,n} + B_n \mathbf{P}(V_n > \bar{A}_n) + h\mathbf{P}(V_{\nu_m} > \bar{A}_n),$$
$$\delta_{2,n} := \overline{\rho}_n B_n \mathbf{P}(D_{m,n}) + \lambda_n B_n \mathbf{P}(\beta > \nu_m).$$

Подставляя (118) в (106), получаем

$$\frac{B_n \mathbf{P}(\tau > V_n)}{U_n} \ge C_0 - \frac{h_n^2}{B_n^2} - \lambda_n - \frac{\delta_{1,n}}{U_n} - \frac{\delta_{2,n}}{U_n}. \tag{119}$$

Здесь мы ещё учли, что $0 < C_0 < 1$. Поскольку $V_{\nu_m} \le V_n$, то из (32) из (111) немедленно находим:

$$\delta_{1,n} \le \frac{16}{h} K_3 U_n B_m \sqrt{L_{2,n}} + \theta_n + \frac{h\theta_n}{B_n}. \tag{120}$$

Из неравенства (108), с учётом (98), имеем

$$\mathbf{P}(D_{m,n}) \le \frac{U_n}{h} + \mathbf{P}(\tau > V_m) \le \frac{U_n}{h} + \frac{K_0 U_n}{B_m},$$

где мы еще использовали, что $U_n \ge U_m$. Аналогично, учитывая (32)

$$\mathbf{P}(\beta > \nu_m) \le \mathbf{P}(D_{m,n}) + \mathbf{P}(V_n > A_n) \le \frac{U_n}{h} + \frac{K_0 U_n}{h} + \frac{\theta_n}{B_m}.$$

Суммируя, получаем

$$\delta_{2,n} \le \lambda_n\theta_n + K_0 U_n(\overline{\rho}_n + \lambda_n)B_n/B_m + U_n(\overline{\rho}_n + \lambda_n)B_n/h. \tag{121}$$

Введем числа

$$\gamma_n^2 := (\overline{\rho}_n + \lambda_n) \to 0, \quad \gamma_n^* := \lambda_n + \lambda_n\theta_n/U_1 + \theta_n/U_1 \to 0. \tag{122}$$

Подставляя (120) и (121) в (106) и используя обозначения (122), находим

$$\frac{B_n\mathbf{P}(\tau > V_n)}{U_n} \ge C_0 - \frac{h^2}{B_n^2} - \frac{h\theta_n}{B_n} - \gamma_n^* - K_0\gamma_n^2\frac{B_n}{B_m} - \gamma_n^2\frac{B_n}{h} - 16K_3\sqrt{L_{2,n}}\frac{B_m}{h}. \tag{123}$$

Выберем теперь число $m = m(n)$, полагая

$$m = m(n) := \max\{k : B_k \le \overline{\gamma}_n B_n\}, \quad \text{где} \quad \overline{\gamma}_n = \sup_{k\ge n}\gamma_n \to 0.$$

Таким образом при $m = m(n)$

$$B_m \le \gamma_n B_n < B_{m+1}, \quad \gamma_n^2\frac{B_n}{B_m} \le K_1\gamma_n^2\frac{B_n}{B_{m+1}} \le \frac{K_1\gamma_n^2}{\gamma_n} = K_1\gamma_n \to 0. \tag{124}$$

А поскольку $\overline{\gamma}_n \to 0$, то

$$N_4 := \min\{n \ge N_0 : \overline{\gamma}_n \le 1/2\} < \infty.$$

То есть при $n \ge N_4 \ge N_0$ выполнено (86).

Возьмем наконец в качестве $h = h(n)$ число

$$h = h(n) = 2\gamma_n B_n + 4K_1\varkappa_n B_n \ge 2B_m + 4G(2A_n), \tag{125}$$

где при выводе последнего неравенства мы использовали (124), (48) и (90).

Подставляя теперь в (123) числа m и h из (124) и (125), имеем

$$\begin{aligned}\frac{B_n\mathbf{P}(\tau > V_n)}{U_n} &\ge C_0 - \frac{h^2}{B_n^2} - \frac{h}{B_n} - \gamma_n^* - K_0K_1\gamma_n - \gamma_n - 8K_3\sqrt{L_{2,n}} \\ &= C_0 - O(\gamma_n + \varkappa_n) - \gamma_n^* - O(\gamma_n) - O(\sqrt{L_{2,n}}) \to C_0.\end{aligned}$$

Но из последней сходимости вытекает требуемое утверждение предложения 5.

5. Доказательство теоремы 2

Прежде всего мы установим справедливость двух вспомогательных утверждений.

Лемма 14. *При выполнении условий теоремы 2*

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{B(T)\mathbf{P}(\tau > T)}{U(T)} = \limsup_{T\to\infty}\frac{B_{n(T)}\mathbf{P}(\beta > n(T))}{U_{n(T)}} \le \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Доказательство. Заметим, что

$$\mathbf{P}(\tau > T) \le \mathbf{P}(\tau > V_M) + \mathbf{P}(V_M > T) \quad \text{при всех} \quad M \ge 0. \tag{126}$$

Для каждого из слагаемых в предыдущем неравенстве у нас имеются некоторые оценки. Для второго — это следующая оценка из леммы 2

$$\mathbf{P}(V_M > T) \le \mathbf{P}(V_M > A_M(1+\theta_M)) \le \frac{\theta_M}{B_M} \quad \text{при} \quad A_M(1+\theta_M) \le T. \tag{127}$$

А для первого слагаемого у нас имеется асимптотика, полученная в теореме 1:

$$\mathbf{P}(\tau > V_M) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{U_M}{B_M}\big(1+o(1)\big) \qquad \text{при} \quad M \to \infty. \tag{128}$$

Наша первая задача — подбор такого $M = M(T) \ge 0$, чтобы одновременно были справедливы (127) и (128).

Предположим далее, что

$$T > T_0 := \inf\{T > 0 : \overline{\theta}_{n(T/2)} \le 1/2\} \qquad \text{и} \quad N := n(T). \tag{129}$$

Поскольку $1 - n(T/2) \ge 1/2$ при $T > T_0$, то в этом случае возьмем

$$M := M(T) = n(T(1-\overline{\theta}_{n(T/2)})) \ge L := L(T) = n(T/2). \tag{130}$$

Но при выбранном $M = M(T)$, вспомнив, что $\theta_M \le \overline{\theta}_M \le \overline{\theta}_L$, получаем оценку:

$$A_M(1+\theta_M) \le A_M(1+\theta_L) \le T(1-\overline{\theta}_L)(1+\overline{\theta}_L) = T(1-\overline{\theta}_L^2) \le T,$$

из которой сразу же следует (127). А так как $M \ge L \to \infty$ при $T \to \infty$, то верно и (128). Подставив (127) и (128) в (126), имеем:

$$\begin{aligned} \frac{B_N \mathbf{P}(\tau > T)}{U_N} &\le \frac{B_N}{B_M}\frac{U_M}{U_N}\frac{B_M\mathbf{P}(\tau > V_M)}{U_M} + \frac{B_N}{B_M}\frac{\theta_M}{U_N} \\ &\le \frac{B_N}{B_M}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big(1+o(1)\big) + \frac{B_N}{B_M}\frac{\theta_M}{U_1} \sim \frac{B_N}{B_M}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{при} \quad M \to \infty. \end{aligned} \tag{131}$$

Поскольку $a_M \le \overline{a}_N A_N$ при $M \le N$, то, ввиду (130),

$$A_N \ge A_M \ge T(1-\overline{\theta}_L) - a_M \ge A_N(1-\overline{\theta}_N) - \overline{a}_N A_N = A_N(1-\overline{\theta}_N - \overline{a}_N).$$

Таким образом,

$$1 \ge \frac{A_M}{A_N} \ge 1 - \overline{\theta}_N - \overline{a}_N \to 1 \quad \text{при} \quad T \to \infty.$$

А по условию (17) теоремы 2

$$\frac{B_M}{B_N} = \frac{\sqrt{c^2 B_M^2}}{\sqrt{c^2 B_N^2}} \sim \frac{\sqrt{A_M}}{\sqrt{A_N}} = \sqrt{\frac{A_M}{A_N}} \to 1 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{132}$$

Но из этой сходимости и (131) вытекает требуемое утверждение леммы. □

Лемма 15. *При выполнении условий теоремы 2*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{B(T)\mathbf{P}(\tau > T)}{U(T)} = \liminf_{T\to\infty} \frac{B_{n(T)}\mathbf{P}(\beta > n(T))}{U_{n(T)}} \ge \sqrt{\frac{2}{\pi}}. \tag{133}$$

Доказательство. Аналогично, как и в предыдущей лемме,

$$\mathbf{P}(\tau > V_K) \le \mathbf{P}(\tau > T) + \mathbf{P}(V_K < T) \quad \text{при всех} \quad K \ge 0. \tag{134}$$

Из утверждения (29) в лемме 2 у нас есть оценка для

$$\mathbf{P}(V_K < T) \le \mathbf{P}(V_K < (1-\tilde\theta_K)A_K) \le \frac{\theta_K}{B_K} \quad \text{при} \quad T \le (1-\tilde\theta_K)A_K. \tag{135}$$

А из теоремы 1

$$\mathbf{P}(\beta > K) = \mathbf{P}(\tau > V_K) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{U_K}{B_K}\big(1+o(1)\big) \quad \text{при} \quad K \to \infty. \tag{136}$$

Теперь нам нужно найти такое $K = K(T) \ge N = n(T)$, чтобы были одновременно верны (135) и (136).

Предположим, что

$$T > T_1 := \min\{T > 0 : \tilde\theta_N^* := \sup_{k \ge N} \tilde\theta_k \le 1/2, \quad \overline{a}_N^* := \sup_{k\ge N} \overline{a}_k \le 1/2\},$$

где $\tilde\theta_N^* \downarrow 0$ и $\overline{a}_N^* \downarrow 0$ при $N \to \infty$. Теперь возьмем

$$K = K(\tilde T) = n(\tilde T) \ge N \quad \text{при} \quad \tilde T = \frac{T}{(1-\tilde\theta_N^*)(1-\overline{a}_N^*)}. \tag{137}$$

Тогда

$$A_K = A_{K+1} - a_{K+1} \ge A_{K+1} - \overline{a}_{K+1}A_{K+1} \ge A_{K+1}(1-\overline{a}_N^*) \ge \tilde T(1-\overline{a}_N^*).$$

А потому, ввиду (137),

$$A_K(1-\tilde\theta_K) \ge A_K(1-\tilde\theta_N^*) \ge \tilde T(1-\overline{a}_N^*)(1-\tilde\theta_N^*) = T \ge A_N. \tag{138}$$

Из (138) получаем, что при выбранном $K = K(T)$ верно (135). А так как $K(T) \ge n(T) \to \infty$, то верно и (136). Подставив (135) и (136) в (134), находим:

$$\begin{aligned} \frac{B_N\mathbf{P}(\tau > T)}{U_N} &\ge \frac{B_N}{B_K}\frac{U_K}{U_N}\frac{B_K\mathbf{P}(\tau > V_K)}{U_K} - \frac{B_N}{B_K}\frac{U_K}{U_N}\frac{\theta_K}{U_K} \\ &\ge \frac{B_N}{B_K}\frac{U_K}{U_N}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\big(1+o(1)\big) - \frac{B_N}{B_K}\frac{U_K}{U_N}\frac{\theta_K}{U_1} \sim \frac{B_N}{B_K}\frac{U_K}{U_N}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \quad \text{при} \quad K \to \infty. \end{aligned} \tag{139}$$

Далее, $A_{N+1} > T = \tilde T(1-\tilde\theta_N^*)(1-\overline{a}_N^*)$ в силу (137). Значит,

$$1 \le \frac{A_K}{A_N} \le \frac{\tilde T}{A_N} < \frac{A_{N+1}}{A_N}\frac{1}{(1-\tilde\theta_N^*)(1-\overline{a}_N^*)} \to 1 \quad \text{при} \quad N \to \infty.$$

Здесь мы также использовали (9). И следовательно, аналогично (132),

$$\frac{B_K}{B_N} \sim \sqrt{\frac{A_K}{A_N}} \to 1 \quad \text{при} \quad T \to \infty. \tag{140}$$

Заметим, что сходимость (140) является более жестким условием, чем использовалось в (15) при $n = K$ и $m = N$. Поэтому, при указанных m и n из свойства (15) мы получаем, что $U_K/U_N \to 1$ при $T \to \infty$. Подставляя последний факт и (140) в (139), мы находим (133). □

Из лемм 14 и 15 вытекает , что

$$\lim_{T\to\infty}\frac{B(T)\mathbf{P}(\tau>T)}{U(T)}=\lim_{T\to\infty}\frac{B_{n(T)}\mathbf{P}(\beta>n(T))}{U_{n(T)}}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Но эта сходимость совпадает с требуемым утверждением (18) теоремы 2. Кроме того, функция $U(\cdot)$ монотонно не убывает, поскольку не убывает последовательность $\{U_n\}$, и она является медленно меняющейся ввиду более сильного свойства (15), которое уже установлено в теореме 1.

Таким образом, все утверждения работы полностью доказаны.

References

[1] A.A. Borovkov, *Compound Renewal Processes*, Russ. Acad. Sci., Moscow, 2020.

[2] A.A. Borovkov, *Probability theory*, Gordon & Breach, Abingdon, Oxon, 1998. Zbl 0918.60003

[3] R. Kutner, J. Masoliver, *The continuous time random walk, still trendy: fifty-year history, state of art and outlook*, The European Physical Journal B, **90** (2017), Article number: 50.

[4] D. Denisov, A. Sakhanenko, V. Wachtel, *First-passage times for random walks with nonidentically distributed increments*, Ann. Probab., **46**:6 (2018), 3313–3350. Zbl 1434.60126

[5] R.A. Doney, *Spitzer's condition and the ladder variables in random walks*, Probab. Theory Relat. Fields, **101**:4 (1995), 577–580. Zbl 0818.60060

[6] A.I. Sakhanenko, V.I. Wachtel, E.I. Prokopenko, A.D. Shelepova *On the asymptotics of the distribution of the exit time beyond a non-increasing boundary for a compound renewal process*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **18**:1 (2021), 9–26. Zbl 1455.60122

[7] A.I. Sakhanenko, *On Borovkov's estimate in the invariance principle*, Sib. Èlektron. Mat. Izv., **16** (2019), 1776–1784. Zbl 1427.60054

Anastasiya Shelepova
Novosibirsk State University,
1, Pirogova str.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: nastya.shelepova.99@mail.ru

Alexander Sakhanenko
Sobolev Institute of Mathematics,
4, Acad. Koptyug ave.,
Novosibirsk, 630090, Russia
Email address: aisakh@mail.ru